CONCURSO PÚBLICO DE PROVAS E TÍTULOS PARA O CARGO EFETIVO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR – EDITAL Nº 28/2023 – PROGRAD

FOLHA DE QUESTÕES COM CHAVE DE CORREÇÃO

Área 11: Matemática **Número de C.P.F:**______________________

OBSERVAÇÕES:

(i) SEGUEM ABAIXO 20 (VINTE) QUESTÕES DISCURSIVAS, DENTRE ESSAS, O CANDIDATO DEVE ESCOLHER NO MÁXIMO 10 (DEZ) PARA RESOLVER.

(ii) CADA QUESTÃO TERÁ PONTUAÇÃO MÁXIMA DE 1 (UM) PONTO.

(iii) CADA QUESTÃO DEVERÁ SER IDENTIFICADA NA FOLHA DE RESPOSTA.

(iv) SOMENTE SERÃO CORRIGIDAS AS 10 (DEZ) PRIMEIRAS QUESTÕES QUE POSSUÍREM DESENVOLVIMENTO NA FOLHA DE RESPOSTAS, AS DEMAIS SERÃO DESCONSIDERADAS.

Questão 1 (1,0 ponto). Faça o que se pede:

a) Sejam $K \subset \mathbb{R}$ compacto e $F \subset \mathbb{R}$ fechado. Prove que existem $x_0 \in K$ e $y_0 \in F$ tais que $|x_0 - y_0| \leqslant |x - y|$ para todo $x \in K$ e $y \in F$.

b) Seja $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ uma série convergente, com $a_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Encontre o valor do limite da sequência

$$x_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}}}{n} + \frac{(-1)^n}{\ln(a_n)}.$$

Uma solução: *Solução do item (a):* Seja $m = \inf\{|x-y| : x \in K, y \in F\}$. Por definição de inf existem sequências $(x_n) \subset K, (y_n) \subset F$ tais que $|x_n - y_n| \to m$. Como K é compacto, a menos de subsequência, podemos assumir que $x_n \to x_0 \in K$. Agora, note que,

$$|y_n| \leq |x_n - y_n| + |x_n|,$$

e isso implica que (y_n) é limitada. Então, por Bolzano-Weierstrass, a menos de subsequência, podemos assumir que $y_n \to y_0$, e como é F é fechado deduzimos que $y_0 \in F$.

Finalmente, observe que

$$|x_0 - y_0| = \lim |x_n - y_n| = m \leq |x - y|, \forall x \in K, \forall y \in F.$$

Solução do item (b): Como $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge, a sequência $a_n \to 0$. Logo,

$$\lim ln(a_n) = -\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{ln(a_n)} = 0 \Rightarrow \lim \frac{(-1)^n}{ln(a_n)} = 0.$$

Por outro lado, a função e^x é contínua em $[0,1]$, e portanto integrável segundo Riemann em $[0,1]$. Dessa forma, sendo $P : x_0 = 0 < 1/n < 2/n, \cdots < (n-1)/n < n/n = x_n$ uma partição de $[0,1]$ obtemos que

$$\lim \frac{\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}}}{n} = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1.$$

Portanto,

$$\lim x_n = e - 1.$$

Questão 2 (1,0 ponto). Mostre que todas as soluções de $2y' + xy = 2$ tendem a um limite quando $x \to +\infty$ e encontre esse limite.

Uma solução: Dividindo por 2 a equação diferencial, temos

$$y' + \frac{x}{2} y = 1. \tag{1}$$

Logo, o fator integrante é $\mu(x) = e^{\int \frac{x}{2} dx} = e^{\frac{x^2}{4}}$. Então, multiplicando a equação (1) por $\mu(x)$, resulta

$$e^{\frac{x^2}{4}} y' + \frac{x}{2} e^{\frac{x^2}{4}} y = e^{\frac{x^2}{4}}.$$

A expressão à esquerda na igualdade acima é a derivada de $e^{\frac{x^2}{4}} y$, isto é,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^2}{4}} y\right) = e^{\frac{x^2}{4}}.$$

Integrando a expressão anterior no intervalo $[x_0, x]$, obtemos que

$$e^{\frac{x^2}{4}} y(x) - e^{\frac{x_0^2}{4}} y(x_0) = \int_{x_0}^{x} e^{\frac{s^2}{4}} ds.$$

Logo, a solução da equação diferencial é

$$y(x) = \frac{\int_{x_0}^{x} e^{\frac{s^2}{4}} ds}{e^{\frac{x^2}{4}}} + e^{-\frac{x^2}{4}} y(x_0) e^{\frac{x_0^2}{4}}.$$

Dado que

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{x_0}^{x} e^{\frac{s^2}{4}} ds = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{x^2}{4}} = +\infty,$$

podemos aplicar a regra de L'Hospital no primeiro termo da solução para obter o seguinte limite:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} y(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\int_{x_0}^{x} e^{\frac{s^2}{4}} ds}{e^{\frac{x^2}{4}}} + \lim_{x \to +\infty} e^{-\frac{x^2}{4}} y(x_0) \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x^2}{4}}}{\frac{x}{2} e^{\frac{x^2}{4}}} + 0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, as soluções da equação diferencial convergem para 0 quando $x \to +\infty$.

Questão 3 (1,0 ponto). Seja f um polinômio irredutível sobre um corpo K algebricamente fechado. Mostre que f tem grau 1.

Uma solução: Seja $f \in K[x]$ um polinômio irredutível. Como K é um corpo algebricamente fechado, segue que existe $a \in K$ tal que $f(a) = 0$. Logo, $(x - a)$ divide $f(x)$, isto é, existe $g \in K[x]$ tal que

$$f(x) = (x - a)g(x)$$

No entanto, f é irredutível, então g é um polinômio constante não nulo, ou seja, existe $b \in K$ tal que $g(x) = b$, para todo $x \in K$. Assim,

$$f(x) = bx - ba$$

onde $-ba$ é constante. Portanto, f tem grau 1.

Questão 4 (1,0 ponto). Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Então o traço de α está contido numa circunferência de raio $a > 0$ se, e só se, a torção é nula e a curvatura é constante igual $\dfrac{1}{a}$.

Uma solução: $(\Rightarrow)$ Suponha que α está parametrizada por comprimento de arco tal que $\alpha(I)$ está contido em uma circunferência de centro c e raio a, isto é, $||\alpha(s) - c||^2 = a^2$. Dado que α é uma curva plana, temos que a torção $\tau(s) = 0$ para todo $s \in I$ e

$$\langle \alpha(s) - c, b \rangle = 0,$$

onde b é o vetor binormal constante. Derivando duas vezes a expressão $||\alpha(s) - c||^2 = a^2$, obtemos

$$\langle \alpha'(s), \alpha(s) - c\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \alpha''(s), \alpha(s) - c\rangle = -1.$$

Podemos observar que $\alpha(s) - c$ é ortogonal aos vetores tangente $t(s)$ e binormal b. Segue então que $\alpha(s) - c$ é paralelo ao vetor normal $n(s)$ e, pela última igualdade, resulta que

$$\begin{aligned} \|\alpha''(s)\|\|\alpha(s) - c\| &= 1 \\ k(s)a &= 1, \end{aligned}$$

onde $k(s)$ denota a curvatura de α. Portanto, a torção é nula e a curvatura $k(s)$ é constante igual a $1/a$.

($\Leftarrow$) Suponha que α tem torção τ nula e curvatura $k(s) = \frac{1}{a}$ constante para todo $s \in I$. Consideremos a aplicação diferenciável $f : I \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(s) = \alpha(s) + a\, n(s)$, para todo $s \in I$. Vamos mostrar que $f(s)$ é constante. Pelas fórmulas de Frenet, temos que

$$\begin{aligned} f'(s) &= t(s) + a\, n'(s) \\ &= t(s) + a(-k(s)t(s) - \tau(s)b(s)). \end{aligned}$$

Dado que $\tau(s) = 0$ e $k(s) = 1/a$, resulta que $f'(s) = 0$ e o vetor binormal $b(s)$ é constante. Portanto $f(s) = c$ é constante, α está contido em um plano e

$$\|\alpha(s) - c\| = \|a\, n(s)\| = a.$$

Questão 5 (1,0 ponto). Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 3 com produto interno e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Prove que se T é auto-adjunto, então a representação matricial de T é simétrica..

Uma solução: Sejam $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ e T um operador auto-adjunto em $\mathbb{R}^3$. Como

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 \\ T(v_2) &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 \\ T(v_3) &= a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3 \end{aligned}$$

a representação matricial de T é

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Como T é auto-adjunto, segue que

$$a_{ij} = \langle T(v_i), v_j \rangle = \langle v_i, T(v_j) \rangle = a_{ji}$$

para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Logo,

$$[T]_\beta^\beta = ([T]_\beta^\beta)^*$$

ou seja, a reperesentação matricial de T é simétrica.

Questão 6 (1,0 ponto). Faça o que se pede:

a) Seja $f : U \to \mathbb{R}$ contínua no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, tal que $(x^2 + y^4)f(x, y) + (f(x, y))^3 = 1$ para qualquer $(x, y) \in U$. Prove que f é de classe C^1.

b) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica com período $p > 0$, isto é, $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que

$$\int_0^p f(x + y)dx = \int_0^p f(x)dx \text{ para todo } y \in \mathbb{R}.$$

Uma solução: *Solução do item (a):* Defina a função $F : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $F(x, y, z) = (x^2 + y^4)z + z^3 - 1$. Então, $F \in C^1(U \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e

$$F_z(x, y, z) = x^2 + y^4 + 3z^2.$$

Note que se $(x_0, y_0) \in U$ e $z_0 = f(x_0, y_0)$, então $z_0 \neq 0$, pois $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Além disso

$$F_z(x_0, y_0, z_0) = x_0^2 + y_0^4 + 3z_0^2 \geq 3z_0^2 > 0.$$

Aplicando o Teorema da Função Implícita, existem $V_0 \subset U \times \mathbb{R}$, aberto contendo (x_0, y_0, z_0), $U_0 \subset U$, aberto contendo (x_0, y_0), e uma única função $g : U_0 \to \mathbb{R}$, com $g(x_0, y_0) = z_0$, e satisfazendo a seguinte propriedade

$$(x, y, z) \in V_0 \text{ e } F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow (x, y) \in U_0 \text{ e } z = g(x, y).$$

Além disso, o Teorema da Função Implícita garante que $g \in C^1(U_0, \mathbb{R})$. Por outro lado, por hipótese, $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para $(x, y) \in U_0$, e pela unicidade de g segue que $f(x, y) = g(x, y)$ para todo $(x, y) \in U_0$. Disso segue que f é C^1.

Solução do item (b): Fazendo a mudança de variável $z = x + y$ obtemos que

$$\int_0^p f(x + y)dx = \int_y^{p+y} f(z)dz = \int_y^0 f(z)dz + \int_0^p f(z)dz + \int_p^{p+y} f(z)dz. \tag{2}$$

Fazendo a mudança de variável $z = w + p$ segue que

$$\int_p^{p+y} f(z)dz = \int_0^y f(w+p)dw = \int_0^y f(w)dw = -\int_y^0 f(w)dw = -\int_y^0 f(y)dy,$$

e inserindo essa igualdade em (2) inferimos que

$$\int_0^p f(x+y)dx = \int_0^p f(x)dx.$$

Questão 7 (1,0 ponto). Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} (x^2-9)y' + xy = 0, \\ y(5) = y_0. \end{cases}$$

(a) Qual é o intervalo de validade da solução $y = y(x)$?

(b) Qual é o limite de $y = y(x)$ quando $x \to +\infty$?

Uma solução: A equação diferencial é equivalente a

$$y' + \frac{x}{x^2-9}y = 0. \tag{3}$$

O fator integrante da equação acima é

$$\mu(x) = e^{\int \frac{x}{x^2-9}dx} = e^{\frac{1}{2}\ln|x^2-9|} = \sqrt{x^2-9}.$$

Multiplicando a equação (3) pelo fator integrante $\mu(x) = \sqrt{x^2-9}$, temos

$$\sqrt{x^2-9}\; y' + \frac{x\sqrt{x^2-9}}{x^2-9}y = 0,$$

que implica

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2-9}\; y\right) = 0.$$

Integrando a expressão acima no intervalo $[5, x]$ ou $[x, 5]$, temos

$$\sqrt{x^2-9}\; y(x) - 4y(5) = 0.$$

Logo a solução é

$$y(x) = \frac{4y_0}{\sqrt{x^2 - 9}}.$$

Solução do item (a): Se $y_0 = 0$, então $-\infty < x < +\infty$, isto é, intervalo de validade da solução é $\mathbb{R}$. Se $y_0 \neq 0$, então $x > 3$, isto é, o intervalo de validade da solução é $(3, +\infty)$.

Solução do item (b): $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$, pois não depende do valor de y_0.

Questão 8 (1,0 ponto). Seja G um grupo finito. Mostre que se $g \in G$, então $g^{|G|} = 1$ (elemento neutro do grupo).

Uma solução: Sejam G um grupo finito e $g \in G$. Como $H = \langle g \rangle$ é subgrupo de G, pelo Teorema de Lagrange, segue que:

$$|G| = |G : H||H|$$

Consequentemente, a ordem de g é igual a ordem de H, ou seja, $g^{|H|} = 1$. Portanto,

$$g^{|G|} = g^{|G:H||H|} = (g^{|H|})^{|G:H|} = 1$$

como queríamos mostrar.

Questão 9 (1,0 ponto). Mostre que o helicóide e o catenoide são superfícies localmente isométricas.

Uma solução: A parametrização de um catenoide é dada por

$$X(u, v) = (a \cosh(v) \cos(u), a \cosh(v)\text{sen}(u), a\ v),\ 0 < u < 2\pi,\ v \in \mathbb{R}.$$

A parametrização de um helicoide é dada por

$$Y(\overline{u}, \overline{v}) = (\overline{v} \cos(\overline{u}), \overline{v}\ \text{sen}(\overline{u}), a\ \overline{u}),\ 0 < \overline{u} < 2\pi,\ \overline{v} \in \mathbb{R}.$$

Vamos fazer a seguinte mudança de parâmetros, $\overline{u} = u$, $\overline{v} = a\ \text{senh}(v)$ com $0 < u < 2\pi$ e $v \in \mathbb{R}$. É possível fazer esta mudança, pois Y é bijetiva e seu Jacobiano

$$\frac{\partial(\overline{u}, \overline{v})}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \overline{u}}{\partial u} & \frac{\partial \overline{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \overline{v}}{\partial u} & \frac{\partial \overline{v}}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \cosh(v) \end{vmatrix} = a \cosh(v)$$

nunca se anula. Logo, uma nova parametrização do helicoide é

$$Y(u, v) = (a\ \text{senh}(v) \cos(u), a\ \text{senh}(v)\text{sen}(u), au).$$

Segue que

$$\begin{aligned}
X_u &= (-a\cosh(v)\mathrm{sen}(u), a\cosh(v)\cos(u), 0),\\
X_v &= (a\ \mathrm{senh}(v)\cos(u), a\ \mathrm{senh}(v)\mathrm{sen}(u), a),\\
Y_u &= (-a\ \mathrm{senh}(v)\mathrm{sen}(u), a\ \mathrm{senh}(v)\cos(u), a),\\
Y_v &= (a\cosh(v)\cos(u), a\cosh(v)\mathrm{sen}(u), 0).
\end{aligned}$$

Então os coeficientes da primeira forma fundamental do catenoide são

$$E = a^2\cosh^2(v),\ F = 0 \quad \text{e} \quad G = a^2\cosh(v),$$

e os coeficientes da primeira forma fundamental do helicoide são

$$\overline{E} = a^2\cosh^2(v),\ \overline{F} = 0 \quad \text{e} \quad \overline{G} = a^2\cosh(v).$$

Dado que as primeiras formas fundamentais coincidem, o catenoide e o helicoide são localmente isométricas.

Questão 10 (1,0 ponto). Seja p um inteiro. Mostre que se $6|p$, então $9|(p+3)^{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Uma solução: Como $6|p$, existe um inteiro $l \in \mathbb{Z}$, tal que $p = 6l$. Vamos provar, por indução, que a igualdade abaixo

$$(p+3)^{2n} = (6l+3)^{2n} = 9q,\ q \in \mathbb{Z}$$

vale para dodo $n \in \mathbb{N}$. No caso base $n = 1$, temos:

$$(6l+3)^2 = 36l^2 + 36l + 9 = 9(4l^2 + 4l + 1) = 9q_1,\ q_1 \in \mathbb{Z}.$$

Como hipótese, assuma que a afirmação é válida para algum $n = k > 1$, ou seja,

$$(6l+3)^{2k} = 9q_2,\ q_2 \in \mathbb{Z}.$$

Vamos mostrar que a afirmação é válido como passo indutivo para $n = k+1$:

$$(6l+3)^{2(k+1)} = (6l+3)^{2k+2} = (6l+3)^{2k}(6l+3)^2 = 9q_1 9q_2 = 9(9q_1q_2) = 9q_3,\ q_3 \in \mathbb{Z}.$$

Como queríamos mostrar.

Questão 11 (1,0 ponto). Mostre que:

a) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ for derivável em $[a,b]$, com f' contínua e positiva em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy = bf(b) - af(a).$$

b) Se f e g são contínuas em $[a,b]$, então existe $c \in (a,b)$ tal que

$$g(c)\int_a^b f(y)dy = f(c)\int_a^b g(y)dy.$$

Uma solução: *Solução do item (a):* Fazendo a mudança de variável $u = f^{-1}(y)$, obtemos que $f'(u)du = dy$ e

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy = \int_a^b uf'(u)du = [uf(u)]_a^b - \int_a^b f(u)du = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx.$$

Portanto,

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy = bf(b) - af(a).$$

Solução do item (b): Defina a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_a^x g(t)dt \int_a^b f(y)dy - \int_a^x f(t)dt \int_a^b g(y)dy.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo F é de classe C^1 e

$$F'(x) = g(x)\int_a^b f(y)dy - f(x)\int_a^b g(y)dy, \forall x \in [a,b].$$

Aplicando o Teorema do valor Médio, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$0 = F(b) - F(a) = F'(c)(b-a),$$

e isso implica que

$$g(c)\int_a^b f(y)dy = f(c)\int_a^b g(y)dy.$$

Questão 12 (1,0 ponto). Seja $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ um conjuto ortogonal de vetores não-nulos de um espaço vetorial finito V. Prove que S é linearmente independente.

Uma solução: Seja $a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0$. Fazendo o produto interno dos dois membros da igualdade anterior por v_i, segue que:

$$\langle a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n, v_i\rangle = \langle 0, v_i\rangle$$

Assim,

$$a_1 \langle v_1, v_i\rangle + a_2 \langle v_2, v_i\rangle + ... + a_n \langle v_n, v_i\rangle = 0$$

Como $\langle v_j, v_i\rangle = 0$ para $i \neq j$ e $\langle v_i, v_i\rangle = 1$ para $i = j$, temos $a_i \langle v_i, v_i\rangle = 0$ e, assim $a_i = 0$ para todo i.
Portanto, $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, ou seja, S é linearmente independente.

Questão 13 (1,0 ponto). Faça o que se pede:

$a)$ Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função complexa analítica e suponha que $f'(z) = 0$ para todo $z \in Q = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, x \in \mathbb{Q} \text{ e } y \in \mathbb{Q}\}$. Prove que f é constante.

$b)$ Se p é um polinômio de grau n, prove que

$$\int_\gamma \frac{e^{p(z)}}{(z-1)^3} dz = \pi i \left((p'(1))^2 + p''(1)\right) e^{p(1)},$$

onde $\gamma(t) = 2e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Uma solução: *Solução do item (a):* Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, para todo $z \in \mathbb{C}$ existe uma sequência $(z_n) \subset Q$ tal que $z_n \to z$. Como f é analítica, f' é contínua, e portanto

$$0 = \lim_{z_n \to z} f'(z_n) = f'(z),$$

isto é, $f'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Isso implica que f é constante.
Solução do item (b): Desde que $e^{p(z)}$ é uma função inteira, podemos aplicar a fórmula integral de de Cauchy para obter

$$\int_\gamma \frac{e^{p(z)}}{(z-1)^3} dz = \int_\gamma \frac{e^{p(z)}}{(z-1)^{2+1}} dz = \frac{2\pi i}{2!} (e^{p(1)})'' = \pi i \left((p'(1))^2 + p''(1)\right) e^{p(1)}.$$

Questão 14 (1,0 ponto). Determine a solução da seguinte equação:

$$(2x^2y + 2x)y' + (2xy^2 + 2y) = 0.$$

Uma solução: *Solução 1:* Dividindo por 2 e fazendo fatoração na equação diferencial, temos

$$\begin{aligned}2x(xy+1)y'+2y(xy+1)&=0\\(xy+1)(xy'+y)&=0\end{aligned}$$

Podemos observar que $y=-1/x$ é uma solução da equação diferencial; caso contrário,

$$\begin{aligned}xy'+y=0&\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(xy)=0\\&\Leftrightarrow xy=C,\end{aligned}$$

onde C é uma constante. Logo, a solução da equação diferencial é da forma $y(x)=C/x$, onde C é uma constante.

Solução 2: Se denotarmos $N(x,y)=2x^2y+2x$ e $M(x,y)=2xy^2+2y$, temos que a equação diferencial é exata, pois

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=4xy+2.$$

Logo, existe uma função $\varphi(x,y)$ tal que a solução $y=y(x)$ da equação diferencial verifica $\varphi(x,y(x))=C$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=N(x,y), \tag{4}$$

onde C é uma constante. Vamos encontrar a função $\varphi(x,y)$. Integrando na primeira equação de (4) em relação a x, obtemos

$$\varphi(x,y)=\int M(x,y)dx+h(y)=x^2y^2+2xy+h(y),$$

onde $h(y)$ é uma função dependendo de y. Substituindo a função $\varphi(x,y)$ encontrada na segunda equação de (4), temos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=2x^2y+2x \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2y+2x+\frac{dh}{dy}=2x^2y+2x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dh}{dy}=0.$$

Segue que $h(y)=C_1$, onde C_1 é constante. Assim,

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)=C&\Leftrightarrow x^2y^2+2xy+C_1=C\\&\Leftrightarrow x^2y^2+2xy+1=C-C_1+1\\&\Leftrightarrow (xy+1)^2=C-C_1+1\\&\Leftrightarrow xy=C_0,\end{aligned}$$

onde C_0 é uma constante. Portanto, a solução é da forma $y=C_0/x$.

Questão 15 (1,0 ponto). Sejam M_1 e M_2 subanéis de um anel A.

a) Prove que $M_1 \cap M_2$ é subanel de A.

b) Prove que $M_1 \cup M_2$ é subanel de A se, e somente se, $M_1 \subset M_2$ ou $M_2 \subset M_1$.

Uma solução: *Solução do item (a):* Sejam M_1 e M_2 subanéis de um anel A. Note que, $0 \in M_1 \cap M_2$, pois $0 \in M_1$ e $0 \in M_2$. Agora, para $x, y \in M_1 \cap M_2$ tem-se $x, y \in M_1$ e $x, y \in M_2$. Como $x - y \in M_1$ e $x - y \in M_2$ e, ainda $xy \in M_1$ e $xy \in M_2$ concluímos que $x - y \in M_1 \cap M_2$ e $xy \in M_1 \cap M_2$, como queríamos provar.
Solução do item (b): ($\Longleftarrow$) De fato, se $M_1 \subset M_2$, então $M_1 \cap M_2 = M_2$ é subanel de A. Por outro lado, se $M_2 \subset M_1$, então $M_2 \cap M_1 = M_1$ é subanel de A.
($\Longrightarrow$) Vamos admitir que $M_1 \cup M_2$ é subanel de A e $M_1 \not\subset M_2$. Note que, para todo $m_2 \in M_2$, podemos considerar $m_1 \in M_1 \backslash M_2$, de tal forma que $m_1 - m_2 \in M_1 \cap M_2$. Porém, $m_1 - m_2 \notin M_2$, pois caso contrário,

$$m_1 = (m_1 - m_2) + m_2 \in M_2,$$

uma contradição. Logo, $m_1 - m_2 \in M_1$ e, assim

$$m_2 = m_1 - (m_1 - m_2) \in M_1.$$

Portanto, $M_2 \subset M_1$.
Analogamente, se $M_1 \cup M_2$ é subanel de A e $M_2 \not\subset M_1$, então $M_1 \subset M_2$.

Questão 16 (1,0 ponto). Faça o que se pede:

a) Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que, dados $x_1, ..., x_n$ em (a, b), existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f(x_0) = \frac{1}{n}\left(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\right).$$

b) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em a e $k \in \mathbb{N}$. Encontre, justificando sua resposta, o seguinte limite:

$$\lim_{n \to +\infty} n\left(f(a + \frac{1}{n}) + f(a + \frac{2}{n}) + \cdots + f(a + \frac{k}{n}) - kf(a)\right).$$

Uma solução: *Solução do item (a):* Sejam $\alpha = \min\{x_1, ..., x_n\}$, $\beta = \max\{x_1, ..., x_n\}$, $f(p) = \min\{f(x_1), ..., f(x_n)\}$ e $f(q) = \max\{f(x_1), ..., f(x_n)\}$. A função $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{n}\left(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\right)$$

é contínua em $[\alpha, \beta]$. Além disso, $g(p) \leq 0$ e $g(q) \geq 0$. Se $g(p) = 0$ ou $g(q) = 0$ tomamos $x_0 = p$ ou $x_0 = q$, respectivamente. Caso contrário, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe x_0 entre p e q (e portanto em $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$) tal que

$$g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = \frac{1}{n}\left(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\right).$$

Solução do item (b): Temos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\left(f(a+\frac{1}{n}) + f(a+\frac{2}{n}) + \cdots + f(a+\frac{k}{n}) - kf(a)\right) &= \sum_{i=1}^{k} \lim_{n\to+\infty} \frac{i\left(f(a+\frac{i}{n}) - f(a)\right)}{\frac{i}{n}} \\ &= \sum_{i=1}^{k} i f'(a) = \frac{k(k+1)}{2} f'(a).\end{aligned}$$

Questão 17 (1,0 ponto). Seja G um grupo, tal que $|G| = p^2 q$, onde p e q são primos distintos. Prove que G possui um subgrupo normal não trivial, ou seja, G não é simples.

Uma solução: Pelo Teorema de Sylow, temos que:

$$n_p | q \text{ e } n_p \equiv 1 \ mod\ p$$

assim, $n_p = 1$ ou q. Analogamente,

$$n_q | p^2 \text{ e } n_q \equiv 1 \ mod\ q$$

daí, $n_q = 1$ ou p ou p^2.
Note que diante das possibilidade apresentadas acima, teremos que analisar dois casos:
Caso 1: Seja $p > q$. De fato não poderíamos concluir que $n_p = q$, pois caso contrário $p | q - 1$. Logo, $n_p = 1$ e, portanto existe um único p-subgrupo de Sylow de G, isto é, G é não simples.
Caso 2: Seja $p < q$. Se $n_q = p$, então q divide $p - 1$, isso não é possível, pois $p < q$. Por outro lado, se $n_q = p^2$, então teremos $(q-1)p^2$ elementos não-trivial de ordem q, uma vez que existem p^2 subgrupos de Sylow de ordem q e que a intersecção entre tais subgrupos é trivial. Deste modo, sobraram apenas p^2 elementos para formar um p-subgrupo de Sylow de G. Logo, $n_p = 1$ ou $n_q = 1$ e, portanto G não é simples.

Questão 18 (1,0 ponto). Seja $f = u + iv$ uma função analítica no domínio D, com $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in D$. Prove que as curvas de níveis diferenciáveis de u e v, que se interceptam em z_0, o fazem ortogonalmente (ângulo reto).

Uma solução: Observe inicialmente que (pelas Equações de Cauchy-Riemann)

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = u_x(z_0) - iu_y(z_0) = v_y(z_0) + iv_x(z_0) \neq 0.$$

Consequentemente $\nabla u(z_0) \neq (0,0)$ e $\nabla v(z_0) \neq (0,0)$.

Sejam $\gamma_1(t) = (x_1(t), y_1(t)), t \in I$ e $\gamma_2(s) = (x_2(s), y_2(s)), s \in I$ curvas diferenciáveis, com $\gamma_1(t_0) = z_0, \gamma_2(s_0) = z_0$, tais que $u(x_1(t), y_1(t)) = c_1$ e $v(x_2(s), y_2(s)) = c_2$. Derivando obtemos o sistema

$$\begin{cases} u_x(z_0)x_1'(t_0) + u_y(z_0)y_1'(t_0) = 0 \\ v_x(z_0)x_2'(s_0) + v_y(z_0)y_2'(s_0) = 0, \end{cases}$$

ao qual pelas equações de Cauchy-Riemann é equivalente a

$$\begin{cases} u_x(z_0)x_1'(t_0) + u_y(z_0)y_1'(t_0) = 0 \\ u_x(z_0)y_2'(s_0) - u_y(z_0)x_2'(s_0) = 0. \end{cases}$$

Se γ_1 e γ_2 não fossem ortogonais em z_0, então o produto interno $x_1'(t_0)x_2'(s_0)+y_1'(t_0)y_2'(s_0) \neq 0$, e como uma consequência o sistema acima possui somente a solução trivial $(0, 0)$. Disso deduzimos que $\nabla u(z_0) = (0, 0)$, o que é uma contradição. Isso termina a demonstração.

Questão 19 (1,0 ponto). Mostre que uma superfície compacta de curvatura positiva é homeomorfa a uma esfera.

Uma solução: Seja S uma superfície compacta de curvatura K positiva. Pelo Teorema de Gauss-Bonnet para superfícies compactas, temos

$$\int\int_S K \, d\sigma = 2\pi\chi(S), \tag{5}$$

onde $\chi(S)$ é a característica de Euler-Poincaré da superfície S. Resulta que, se S' é uma superfície compacta, então $\chi(S')$ assume uns dos seguintes valores $2, 0, -2, -4, -6, ..., -2n, ...$ Além disso, se $\chi(S') = \chi(S)$, então as superfícies S' e S são homeomorfas. Logo, pela igualdade (5), resulta que $\chi(S) = 2$, pois K é positiva.

Por outra lado, se $\mathbb{S}^2$ denota uma esfera em $\mathbb{R}^3$, então $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$. Portanto, S é homeomorfa à esfera $\mathbb{S}^2$.

Questão 20 (1,0 ponto). Prove o Teorema dos Resíduos de Cauchy: Seja f uma função analítica num domínio $U \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$. Suponha que $\gamma \subset U \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ é uma curva de Jordan suave por partes, orientada no sentido anti-horário, tal que a região fechada e limitada por ela determinada está contida em U e contém todos os pontos $a_1, a_2, \cdots, a_m$. Então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz = res(f, a_1) + res(f, a_2) + \cdots + res(f, a_m),$$

onde $res(f, b)$ é o resíduo de f em b.

Uma solução: Para cada singularidade isolada a_j de f, escolha um círculo γ_j centrado em a_j satisfazendo as seguintes condições: γ_k não tem ponto comum com γ_n se $k \neq n$ e γ_j não tem ponto comum com γ, para $1 \leq j \leq m$.

Oriente os γ_j, $1 \leq j \leq m$, no sentido anti-horário. Pelo Teorema de Cauchy temos

$$\int_{\gamma \cup \gamma_1^- \cup \cdots \cup \gamma_m^-} f(z)dz = 0,$$

onde γ_j^-, $1 \leq j \leq m$, é o caminho reverso de γ_j. Mas isso é equivalente a

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_m} f(z)dz.$$

Agora, lembrando que

$$res(f, a_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(z)dz,$$

deduzimos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)dz = res(f, a_1) + res(f, a_2) + \cdots + res(f, a_m).$$