CONCURSO PÚBLICO DE PROVAS E TÍTULOS PARA O CARGO EFETIVO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR – EDITAL Nº 45/2019 – PROGRAD

FOLHA DE QUESTÕES

Área: **Número de C.P.F**________________________

Para prova

SEGUEM ABAIXO 20 (VINTE) QUESTÕES DISCURSIVAS, DENTRE ESSAS, O CANDIDATO DEVE ESCOLHER NO MÁXIMO 10 (DEZ) PARA RESOLVER.
CADA QUESTÃO TERÁ PONTUAÇÃO MÁXIMA DE 1 (UM) PONTO.
SOMENTE SERÃO CORRIGIDAS AS 10 (DEZ) PRIMEIRAS QUESTÕES QUE POSSUÍREM DESENVOLVIMENTO NA FOLHA DE RESPOSTAS, AS DEMAIS SERÃO DESCONSIDERADAS.

QUESTÃO 01: (1,0 ponto) Demonstre o teorema da função implícita:
Dada $f: U \to R$, $U \subset R^2$ aberto e f de classe C^1, $(x_0, y_0) \in U$, $\frac{df}{dy}(x_0, y_0) \neq 0$. Existem $V = (a,b) \times (c,d)$ e uma única função contínua $y: (a,b) \to (c,d)$ tal que $f(x,y) = k$.

QUESTÃO 02: (1,0 ponto) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Mostre que:

a) Se A e B são matrizes semelhantes, então elas têm o mesmo determinante e o mesmo traço, isto é, $det(A) = det(B)$ e $tr(A) = tr(B)$.
b) O determinante do produto é o produto dos determinantes, ou seja, $det(BA) = det(B)\, det(A)$.

QUESTÃO 03: (1,0 ponto) Faça o que se pede abaixo:

a) Defina função complexa inteira e verifique se a função $f(z) = e^z$ é inteira.
b) Defina função complexa conforme e encontre os pontos onde a função $f(z) = \cos(z)$ não é conforme.

QUESTÃO 04: (1,0 ponto) Demonstre o teorema: Seja $f: I \subset R \to R$ de classe C^1e $x_0 \in I$ com $f'(x_0) \neq 0$. Então existe V uma vizinhança de x_0, tal que:

a) $f(I) = J \subset R$ é um intervalo aberto;
b) $f: V \to J$ é uma bijeção;
c) f é um difeomorfismo e $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ com $y = f(x) \in J$.

QUESTÃO 05: (1,0 ponto) Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo K e $T: V \longrightarrow V$ um operador linear. Se v_i for um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_i \in K$, e se $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$, então mostre que o conjunto $\{v_1, v_2 \dots, v_n\}$ é linearmente independente.

QUESTÃO 06: (1,0 ponto) Defina função complexa harmônica e prove que em regiões simplesmente conexas, toda função harmônica é a parte real de alguma função analítica.

CONCURSO PÚBLICO DE PROVAS E TÍTULOS PARA O CARGO EFETIVO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR – EDITAL Nº 45/2019 – PROGRAD

FOLHA DE QUESTÕES

Área: **Número de C.P.F**____________________________

QUESTÃO 07: (1,0 ponto) Uanteriortilize a integral de Riemann para funções de uma variável real para calcular o volume de sólido de revolução determinado pela rotação do círculo $(x-a)^2+(y-a)^2=b^2$ com $b<a$ em torno do eixo dos y.

QUESTÃO 08: (1,0 ponto.) Sejam V e U espaços vetoriais sobre um corpo K. Sejam $\{v_1, v_2, \ldots. v_n\}$ uma base de V e $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vetores quaisquer de U. Mostre que existe uma única transformação linear $T: V \longrightarrow U$ tal que $T(v_i)=u_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

QUESTÃO 09: (1,0 ponto.) Seja $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ uma série de números complexos, com $z_n = x_n + iy_n$. Mostre que, se $lim\sqrt[n]{|y_n|} = a > 1$, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é divergente.

QUESTÃO 10: (1,0 ponto) Demonstre, justificando e enunciando todos os teoremas utilizados, que se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ são séries de números reais positivos com $0 < a_n < b_n$para todo $n > n_0$, temos:

a) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge então $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$diverge;
b) Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$converge então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$converge;
c) Mostre que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge.

QUESTÃO 11: (1,0 ponto) Seja G um grupo. Mostre que:

a) O subgrupo $G' = \langle\{xyx^{-1}y^{-1}/x, y \in G\}\rangle$ dos comutadores de G é um subgrupo normal de G.
b) Se G é abeliano, então todo subgrupo de G é normal em G. Mostre também que a recíproca é falsa.

QUESTÃO 12: (1,0 ponto.) Prove que, em cada ponto p de uma superfície regular S, o plano tangente T_pS é um espaço vetorial.

QUESTÃO 13: (1,0 ponto.) Resolva a equação de Cauchy-Euler de 2ª ordem homogênea dada por:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y=0$$

QUESTÃO 14: (1,0 ponto) Seja $K[x]$ o anel dos polinômios sobre K na variável x. Seja $p(x) \in K[x]$ um polinômio de grau $m > 0$ e coeficiente líder igual a a. Mostre que, se os elementos distintos $b_1, b_2, \ldots, b_m$ de K são raízes de $p(x)$, então

$$p(x) = a(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_m).$$

CONCURSO PÚBLICO DE PROVAS E TÍTULOS PARA O CARGO EFETIVO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR – EDITAL Nº 45/2019 – PROGRAD

FOLHA DE QUESTÕES

Área: **Número de C.P.F**__________________________

QUESTÃO 15: (1,0 ponto.) Considere a superfície regular S parametrizada por:

$$X(u,v) = (vcos(u), vsen(u),\ v^2 + 1), \text{ com } 0 < u < 2\pi \text{ e } v > 0.$$

Mostre que S é orientável e classifique seus pontos em elípticos, hiperbólicos, parabólicos ou planares.

QUESTÃO 16: (1,0 ponto) Usando os símbolos de Christoffel, deduza as equações diferenciais das geodésicas da superfície definida na Questão 15.

QUESTÃO 17: (1,0 ponto) Sejam A um anel comutativo com unidade $1 \in A$ e J um ideal de A. Mostre que, J é um ideal maximal de A se, e somente se, A/J é um corpo.

QUESTÃO 18: (1,0 ponto) Enuncie o teorema da existência e unicidade de soluções para o Problema de Valor Inicial (PVI) dado por:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \ f: \mathrm{U} \subset \mathrm{R}^2 \ \rightarrow \ \mathrm{R}$$

Verifique em que condições o teorema supracitado é válido para o PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y}.x^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

QUESTÃO 19: (1,0 ponto) Encontre a solução geral da Equação Diferencial Ordinária de 1ª ordem dada por:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$$

Utilize a solução para resolver o seguinte problema: Uma bateria de 24 Volts é conectada a um circuito elétrico LR em série com resistor que possui resistência de 40 Ω e um indutor com indutância de $\frac{1}{2}H$. Determine $\mathrm{i(t)}$ se $\mathbf{i(0) = 0.}$

QUESTÃO 20: (1,0 ponto) Seja $\alpha(t)$ uma geodésica em uma superfície regular S. Prove que uma reparametrização $\beta = \alpha \circ h$ de α é geodésica se, e somente se, $h = at + b$, para constantes $a \neq 0, b \in R$.