ALGUMAS OBSERVAÇÕES ACERCA DA DEFINIÇÃO DE ANEL A PARTIR DAS BIBLIOGRAFIAS COMUMENTE UTILIZADAS NOS CURSOS DE MATEMÁTICA DA UFAC

Sérgio Brazil Júnior
Professor Adjunto da Universidade Federal do Acre

Resumo

A teoria de anéis estuda estruturas algébricas com duas operações binárias, adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$, que possuem propriedades (de certa forma) similares às dos números inteiros. Não é difícil notar as diversas formas com que alguns autores definem essa tão importante estrutura algébrica. Dependendo do autor, um conjunto pode ser ou não um anel. No presente texto, realiza-se um estudo comparativo da definição dessa estrutura colocada por alguns importantes autores, cujos livros são utilizados nos cursos de Matemática da Universidade Federal do Acre – UFAC.

Abstract

The ring theory study algebraic structures with two binary operations: addition $(+)$and multiplication $(\cdot)$ that they possess properties (of certain form) similar to the integers number. It is not difficult to notice the diverse forms that some authors define this so important algebraic structure. Depending on the author, a set can be or not a ring. In the present text we carry through a comparative study of the definition of this structure carried through for some important authors whose books are used in the course of mathematics of the Federal University of Acre – UFAC.

Palavras chaves: Definição de Anel, Exemplos de Anéis.

1. INTRODUÇÃO: Justificativa e Objetivos

Em Álgebra Abstrata, uma estrutura algébrica consiste num conjunto associado a uma ou mais operações sobre o mesmo que satisfazem certos axiomas (ou propriedades). A teoria de anéis estuda estruturas algébricas com duas operações binárias, adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$, que possuem propriedades (de certa forma) similares às dos inteiros. O estudo de anéis originou-se a partir do estudo de polinômios e da teoria de inteiros algébricos.

Segundo Picado (2009: 3), a teoria moderna de anéis originou-se no século XIX, a partir da introdução da noção de ideal feita por Richard Dedekind (1831-1916), em 1871, em trabalho que visava a generalizar o Teorema Fundamental da Aritmética, aplicando-o a contextos mais abstratos; bem como, em decorrência do trabalho com anéis de polinômios de David Hilbert (1862-1945), Edmund Lasker (1868-1941) e F. S. Macaulay (1862-1927). Foi Adolf Fraenkel (1891-1965) o pioneiro no tratamento abstrato da teoria dos anéis, tendo feito a primeira caracterização axiomática da noção de anel, a qual não é utilizada atualmente em decorrência da nova definição introduzida pelo matemático japonês Masazo Sono, em 1917.

Os maiores avanços nos estudos dessa teoria estão relacionados com os trabalhos de Emmy Noether (1882-1935) que, no artigo "*Ideal theory in rings*", de 1921, propõe uma teoria abstrata dos anéis, na qual o trabalho de Hilbert, Lasker e Macaulay, em anéis de polinômios, é estendido a anéis mais gerais.

É comum, em qualquer curso introdutório de álgebra abstrata, o estudo de estruturas algébricas, tais como grupos, anéis e corpos. Alguns livros comumente usados nessa área de conhecimento matemático, geralmente, realizam um estudo preliminar dessas estruturas apresentando definições, propriedades e vários exemplos (na maioria dos casos). Particularmente, quando abordam a estrutura anel, apresentam, além disso, algumas qualidades dessa estrutura.

Não é difícil notar as diversas formas que os autores desses livros definem a estrutura anel. É claro que isso pode não causar prejuízo, tendo em vista que tal abordagem depende do enfoque ou objetivo a que se propõem. No entanto, para um leitor inexperiente, isso pode ser motivo de conflito e até mesmo fazer com que ele desista de investigar esse assunto. É comum encontrar alunos que, depois de comparar algumas dessas bibliografias, tenham dúvidas sobre essas formas de definir essa tão importante estrutura.

Destarte, o estudo proposto resulta de experiências acumuladas em 21 anos de magistério de Matemática, dos quais 18 foram na Universidade Federal do Acre, predominantemente na área de Álgebra. Em tal período, foram ministradas diversas disciplinas cujos conteúdos englobam tópicos da estrutura algébrica anel, ocasiões em que se observou variação na definição de anel, a depender do enfoque do respectivo autor, por vezes exigindo-se mais axiomas para o enquadramento no conceito algébrico em estudo, e implicando na diminuição qualitativa dos exemplos.

No presente texto, realizar-se-á, na medida do possível, um estudo comparativo das definições de anel realizadas por alguns importantes autores cujos livros são utilizados nos cursos de matemática da UFAC, bem como será feita uma análise dos exemplos à luz dessas definições.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

A metodologia utilizada para a realização do estudo, que consistiu em pontuar algumas observações acerca da definição de anel, foi a comparação das definições e análise dos exemplos apresentados pelos autores cujos livros são regularmente utilizados nos cursos de Matemática da UFAC: Gonçalves (1999); Domingues e Iezzi (2003); Hefez (1993); Garcia e Lequain (2002); Monteiro (1971); e Alencar Filho (1990).

3. AÇÕES DESENVOLVIDAS

O presente relato de experiências consiste em análise das ocorrências e empregos de diversos autores nas disciplinas da área de Álgebra em cursos de graduação em Matemática da Universidade Federal do Acre, para o que foram desenvolvidas as seguintes ações: 1) seleção das referências e análise das definições; 2) estudo minucioso e comparativo dos axiomas componentes das definições de anéis; 3) identificação das principais dificuldades enfrentadas por alunos de graduação para a compreensão de uma ideia ou definição geral de anéis; e 4) discussão dos resultados e proposição de um conceito menos rígido da estrutura algébrica, de forma a contemplar a maior parte das referências bibliográficas sobre o assunto, sem prejuízo de enfoques especiais.

O que segue são transcrições dos livros desses autores, nas quais são omitidas, sem prejuízo ao estudo, partes de texto original, e, por vezes, adicionadas informações consideradas pertinentes para a melhor compreensão do propósito do presente texto.

4. DEFINIÇÃO E EXEMPLOS DE ANÉIS

As definições e os exemplos a seguir foram todos retirados dos textos originais, no entanto, os exemplos foram organizados para uma melhor visualização. Considere-se, também, que quando as operações de adição e multiplicação não estiverem explícitas, admitir-se-á que essas são as usuais.

4.1. Definição de Anel, segundo Gonçalves (1999: 34-39)

Seja A um conjunto não vazio no qual estejam definidas duas operações, as quais serão denominadas soma e produto em A, denotadas (como em $\mathbb{Z}$) $+$ e $\cdot$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} + : A \times A &\to A \\ (a,b) &\rightsquigarrow a+b \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \cdot : A \times A &\to A \\ (a,b) &\rightsquigarrow a \cdot b \end{aligned}$$

Chamar-se-á $A, +, \cdot$ um anel se as seguintes 6 propriedades são verificadas quaisquer que sejam $a, b, c \in A$:

A1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ (associatividade da soma);

A2) $\exists\, 0 \in A$, tal que $a+0 = 0+a = a$ (existência do elemento neutro para a soma);

A3) $\forall\, x \in A$ existe um único $y \in A$, denotado por $y = -x$, tal que $x+y = y+x = 0$ (existência do inverso aditivo);

A4) $a+b = b+a$ (comutatividade da soma);

A5) $(a\,.\,b)\,.\,c = a\,.\,(b\,.\,c)$ (associatividade do produto);

A6) $a\,.\,(b+c) = a\,.\,b + a\,.\,c$; $(a+b)\,.\,c = a\,.\,c + b.c$ (distributividade à esquerda e à direita);

Se um anel $A, +, \cdot$ satisfaz a propriedade:

A7) $\exists\, 1 \in A,\ 0 \neq 1,$ tal que $x\,.\,1 = 1\,.\,x = x \ \ \forall\ x \in A$, diz − se que $A, +, \cdot$ é um anel com unidade 1.

Se um anel $A, +, \cdot$ satisfaz a propriedade:

A8) $\forall\, x, y \in A,\ x.y = y.x$, diz-se que $A, +, \cdot$ é um anel comutativo.

Se um anel $A, +, \cdot$ satisfaz a propriedade:

A9) $x, y \in A,\ x.y = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $y = 0$, diz-se que $A, +, \cdot$ é um anel sem divisores de zero.

Se $A, +, \cdot$ é um anel comutativo, com unidade e sem divisores de zero, diz-se que $A, +, \cdot$ é um domínio de Integridade.

E, finalmente, se um domínio de Integridade $A, +, \cdot$ satisfaz a propriedade:

A10) $\forall\, x \in A,\ x \neq 0, \exists\, y \in A$, tal que $x.y = y.x = 1$, diz-se que $A, +, \cdot$ é um corpo.

Exemplos:

(1) Anéis Comutativos: $\mathbb{Z}$, $n.\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$,

$\mathbb{Z}[\sqrt{p}] = \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ p\ primo\}$ e $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$, p primo

(2) Anéis Comutativos que não possuem unidade são os $n.\mathbb{Z}$, em que $n \geq 2$.

(3) Anéis Comutativos que possuem divisores de zero da lista acima são os anéis $A = \mathbb{Z}_n$, nos quais $n \geq 2$ não é um número primo.

(4) Domínios de Integridade que não são corpos: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$, p primo e $\mathbb{Z}[i\,] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z},\ i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}\}$

(4) Corpos: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$, $\mathbb{Q}[i\,]$ e $\mathbb{Z}_p$, p primo.

(5) Anel comutativo com unidade e com divisores de zero**:** $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é um com relação às seguintes operações:

$$\begin{aligned} + : A \times A &\rightarrow A \\ (f, g) &\rightsquigarrow f + g \end{aligned}$$, em que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A &\rightarrow A \\ (f, g) &\rightsquigarrow f \cdot g \end{aligned}$$, em que $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

Analogamente, $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ (respectivamente $\mathcal{D}(\mathbb{R})$), o conjunto de todas as funções contínuas (respectivamente deriváveis) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, é um anel comutativo com unidade e com divisores de zero.

(6) Anéis não comutativos com unidade e com divisores de zero: $Mat_2(\mathbb{R}) = A = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$.

(7) Anéis não comutativos com unidade e sem divisores de zero: $Quat = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, em que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i.j = k$, $j.i = -k, j.k = i$, $k.j = -i$, $k.i = j$, $i.k = -j$

4.2. Definição de Anel, conforme Domingues e Iezzi (2003: 210-223)

Um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio A e um par de operações sobre A, respectivamente uma adição $(x, y) \longmapsto x + y$ e uma multiplicação $(x, y) \longmapsto xy$ (ou $x.y$), é chamado anel se:

(i) $(A, +)$ é um grupo abeliano, ou seja:

(a) Se $a, b, c \in A$, então $a + (b + c) = (a + b) + c$ (associatividade);

(b) Se $a, b \in A$, então $a + b = b + a$ (comutatividade);

(c) Existe um elemento $0_A \in A$, tal que qualquer que seja $a \in A$, $a + 0_A = 0_A + a$ (existência de elemento neutro);

(d) Qualquer que seja $a \in A$, existe um elemento em A, indicado genericamente por $-a$, tal que $a + (-a) = 0_A$ (existência de opostos).

(ii) A multiplicação goza da propriedade associativa, isto é, se $a, b, c \in A$, então $a(bc) = (ab)c$;

(iii) A multiplicação é distributiva em relação à adição, vale dizer:
Se $a, b, c \in A$, então $a(b + c) = ab + ac$ e $(a + b)c = ac + bc$.

Exemplos:

(1) Anéis numéricos: $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$.

(2) Anel das classes de resto módulo m: para todo inteiro $m > 1$, é o conjunto $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$.

(3) Anéis de matrizes: para qualquer inteiro $n > 0$, são anéis:
$(M_n(\mathbb{Z}), +, \cdot), (M_n(\mathbb{Q}), +, \cdot), (M_n(\mathbb{R}), +, \cdot), (M_n(\mathbb{C}), +, \cdot)$.
Se A é um anel, o conjunto $(M_n(A), +, \cdot)$ das matrizes $n \times n$ sobre A, para todo $n \geq 1$, é o anel das matrizes sobre A de ordem n.

(4) Anéis de funções: seja $A = \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} = \{f \mid f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\}$. Se $f, g \in A$, define-se a soma $f + g$ e o produto fg dessas funções da seguinte maneira:

$f + g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ e $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x \in \mathbb{Z}$;

$fg: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ e $(fg)(x) = f(x)g(x)$, para todo $x \in \mathbb{Z}$.

Anéis comutativos

Seja A um anel. Se a multiplicação de A goza da propriedade comutativa, isto é, se $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$, então se diz que A é um anel comutativo.

Exemplos:

(5) Os anéis $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

(6) Os anéis $\mathbb{Z}_m$ das classes de resto módulo m.

(7) Os anéis de funções A^X, sempre que A é um anel comutativo.

(8) Não são comutativos os anéis $M_n(A)$, em que A é um dos anéis $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Anéis com unidade

Seja A um anel. Se A conta com elemento neutro para a multiplicação, isto é, se existe um elemento $1_A \in A$, $1_A \neq 0_A$, tal que $a \,.\, 1_A = 1_A . a = a$, qualquer que seja $a \in A$, então se diz que 1_A é a unidade de A e que A é um anel com unidade.

Exemplos:

(9) Os anéis $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ cuja unidade é o número 1.

(10) Os anéis $\mathbb{Z}_m$ das classes de resto módulo m. A unidade é a classe $\overline{1}$.

(11) Os anéis $M_n(A)$, em que A é um dos anéis $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. A unidade é a matriz $n \times n$ abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(12) Se A é um conjunto com unidade, então a aplicação constante $u: X \longrightarrow A$, $u(x) = 1_A$, é a unidade do anel A^X.

(13) Os anéis $n\mathbb{Z}$ não possuem unidade quando $n \neq \pm 1$.

Anéis comutativos com unidade

Um anel cuja multiplicação é comutativa e que possui unidade chama-se anel comutativo com unidade.

Exemplos:

(14) Os anéis numéricos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

Se A é um anel comutativo com unidade, o mesmo se pode dizer de A^X, qualquer que seja o conjunto $X \neq \emptyset$.

Anéis de integridade

Seja A um anel comutativo com unidade. Se para esse anel vale a lei do anulamento do produto, ou seja, se uma igualdade do tipo $ab = 0_A$, em que $a, b \in A$, só for possível para $a = 0_A$ ou $b = 0_A$, então se diz que A é um anel de integridade ou domínio.

(15) Todos os anéis numéricos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são anéis de integridade.

(16) Considere-se o anel de integridade $\mathbb{Z}$ e um conjunto unitário $X = \{a\}$. Então $A = \mathbb{Z}^X$ é um anel de integridade.

No entanto, se X possuir mais do que um elemento, então $A = \mathbb{Z}^X$ não é um anel de integridade.

(17) Se $m > 1$ é um inteiro composto, então sempre há divisores próprios do zero no anel $\mathbb{Z}_m$.

4.3. Definição de Anel, segundo Hefez (1993: 23-25)

Sejam A um conjunto e $(+)$ e $(\cdot)$ duas operações em A, chamadas de adição e multiplicação. A terna $(A, +, \cdot)$ será chamada de anel se as operações gozarem das seguintes propriedades:

A1) **(A adição é associativa)** Quaisquer que sejam $a, b, c \in$ A, tem-se que: $(a + b) + c = a + (b + c)$;

A2) **(A adição é comutativa)** Quaisquer que sejam $a, b \in A$, tem-se que: $a + b = b + a$;

A3) **(Existe um elemento neutro para a adição)** Existe α ∈ A, tal que $\alpha + x = x$, para todo $x \in A$;

A4) **(Todo elemento de A possui um simétrico)** Para todo $a \in A$ existe $a' \in A$, tal que $a + a' = \alpha$;

M1) **(A multiplicação é associativa)** Quaisquer que sejam $a, b, c \in$ A, tem-se que $(a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c)$;

M2) **(A multiplicação é comutativa)** Quaisquer que sejam $a, b \in A$, tem-se que $a \,.\, b = b \,.\, a$;

M3) **(Existe um elemento neutro para a multiplicação)** Existe $e \in$ A, com $e \neq 0$, tal que $x \,.\, e = x$, para todo $x \in A$;

AM) **(A multiplicação é distributiva com relação à adição)** Quaisquer que sejam $a, b, c \in$ A, tem-se que $a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c$.

Um anel A será chamado de domínio de integridade ou simplesmente de domínio se for verificada a seguinte propriedade:

M4) **(Integridade)** Dados $a, b \in A$, se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $a \,.\, b \neq 0$.

Exemplo: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é um domínio de integridade.

Um anel A em que todo elemento não nulo (i.e., diferente de zero) é invertível é chamado de corpo.

4.4. Definição de Anel, segundo Garcia e Lequain (2002: 7-12)

Um anel ou anel comutativo $(A, +, \cdot)$ é um conjunto A com pelo menos dois elementos, munido de uma operação denotada por $+$ (chamada de adição) e de uma operação denotada por $\cdot$ (chamada multiplicação) que satisfazem as condições seguintes:

A.1) A adição é associativa, isto é, $\forall\, x, y, z \in A,\ (x + y) + z = x + (y + z)$;

A.2) Existe um elemento neutro com respeito à adição, isto é, $\exists\, 0 \in A$, tal que, $\forall\, x \in A,\ 0 + x = x$ e $x + 0 = x$;

A.3) Todo elemento de A possui um inverso com respeito à adição, isto é $\forall\, x \in A$, $\exists\, z \in A$, tal que $x + z = 0$ e $z + x = 0$;

A.4) A adição é comutativa, isto é, $\forall\, x, y \in A,\ x + y = y + x$;

M.1) A multiplicação é associativa, isto é, $\forall\, x, y, z \in A,\ (x \,.\, y) \,.\, z = x \,.\, (y \,.\, z)$;

M.2) Existe um elemento neutro com respeito à multiplicação, isto é, $\exists\ 1 \in A$, tal que $\forall\ x \in A,\ 1\,.\,x = x$ e $x.1 = x$;

M.3) A multiplicação é comutativa, isto é, $\forall\ x, y \in A,\ \ x\ .\ y = y\ .\ x$;

AM) A adição é distributiva relativamente à multiplicação, isto é, $\forall\ x, y, z \in A, \quad x\,.\,(y + z) = x\,.\,y + x\,.\,z$).

Se todas as condições são satisfeitas, com exceção de M.3), então $(A, +, \cdot)$ é chamado de anel não-comutativo.

Um anel $(D, +, \cdot)$ é chamado domínio ou domínio de integridade se ele satisfaz a seguinte condição:

M.4) O produto de quaisquer dois elementos não nulos de D é um elemento não nulo, isto é, $\forall\ x, y \in D \setminus \{0\},\ \ x\ .\ y \neq 0$.

Um anel $(K, +, \cdot)$ é chamado corpo se ele satisfaz a seguinte condição:

M.4') Todo elemento diferente de zero de K possui um inverso com respeito à multiplicação, isto é, $\forall\ x \in K \setminus \{0\},\ \ \exists\ y \in K$, tal que $x\ .\ y = 1$.

Exemplos:

(1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é um domínio.

(2) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são corpos.

(3) Seja $\mathbb{Z}[i\,] = \{a + bi \mid a, b \in\ \mathbb{Z}\}$. Então $(\mathbb{Z}[i\,], +, \cdot)$ é um domínio chamado anel dos inteiros de Gauss.

(4) $(\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in\ \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ e $(\{a + bi\sqrt{3} \mid a, b \in\ \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ são domínios.

(5) Mais geralmente, se n é um inteiro positivo, tem-se que $(\{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in\ \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ e $(\{a + bi\sqrt{n} \mid a, b \in\ \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ são domínios.

(6) $\{a + bi \mid a, b \in\ \mathbb{Q}\}$ é um corpo. Esse corpo será denotado por $\mathbb{Q}[i\,]$.

(7) Dados dois anéis $(A_1, +_1, \cdot_1)$ e $(A_2, +_2, \cdot_2)$, pode-se construir um novo anel da maneira seguinte: no conjunto $A_1 \times A_2 := \{(a_1,\ a_2) :\ a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2\}$, definem-se as operações:

$$(a_1, a_2) + (a'_1, a'_2) =\ (a_1\ +_1\ a'_1, a_2 +_2\ a'_2)$$
$$(a_1, a_2)\,.\,(a'_1, a'_2) =\ (a_1\ \cdot_1\ \ a'_1, a_2 \cdot_2\ \ a'_2)$$

$(A_1 \times A_2, +, \cdot)$ é um anel, chamado produto direto de A_1 com A_2.

(8) Mais geralmente, dados r anéis $(A_1, +_1, \cdot_1), \ldots, (A_r, +_r, \cdot_r)$, define-se a noção de produto direto $A_1 \times \ldots \times\ A_r$.

(9) Se $f :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são duas funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, define-se:

$$
\begin{array}{rcl}
f \oplus g\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
x & \longmapsto & f(x) + g(x)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
f \odot g\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
x & \longmapsto & f(x).g(x)
\end{array}
$$

Então, ({funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$}, $\oplus$,$\odot$) é um anel comutativo com unidade, mas não é domínio.

(10) $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), +,\cdot)$ é um anel não-comutativo se $n \geq 2$.

(11) No exemplo 5) acima, substituindo o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$ pelo corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$, obtêm-se corpos.

(12) (Anel dos inteiros módulo n): Seja n um número inteiro positivo. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus_n, \odot_n)$ é um anel.

4.5. Definição de Anel, conforme Monteiro (1971: 166-178)

Seja A um conjunto, e supondo-se que estejam definidas sobre A duas operações $A \times A \overset{+}{\rightarrow} A$ e $A \times A \overset{\cdot}{\rightarrow} A$ denominadas, respectivamente, adição e multiplicação, diz-se que estas operações definem uma estrutura de anel sobre o conjunto A ou que o conjunto A é um anel em relação a estas operações se, e somente se, são válidos os seguintes axiomas:

A: a operação de adição define uma estrutura de grupo comutativo sobre o conjunto A, isto é:

Sejam a, b e c elementos quaisquer de A:

A1: $a + (b + c) = (a + b) + c$;

A2: $a + b = b + a$;

A3: $a + 0 = a$;

A4: $a + (-a) = 0$.

M1: a operação de multiplicação define uma estrutura de semi-grupo sobre o conjunto A, isto é: $(ab)c = a(bc)$.

D: quaisquer que sejam a, b e c em A, tem-se (propriedades distributivas da multiplicação em relação à adição):

$a(b + c) = (ab) + (ac)$ e $(b + c)a = (ba) + (ca)$

Diz-se que um anel A é comutativo se, e somente se, estiver verificado o seguinte axioma:

M2: quaisquer que sejam a e b em A, tem-se $ab = ba$ (propriedade comutativa da multiplicação).

Diz-se que um anel A tem elemento unidade se, e somente se, estiver verificada a seguinte propriedade:

M3: existe um elemento 1 em A, tal que $a.1 = a = 1.a$ para todo a em A (existência do elemento unidade da multiplicação).

Se um anel A satisfaz os axiomas M2 e M3, dir-se-á que A é um anel comutativo com unidade.

Exemplos:

(1) O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é um anel comutativo com elemento unidade.

(2) O conjunto $2\mathbb{Z}$ dos números inteiros pares é um anel comutativo. Este anel não tem elemento unidade.

(3) O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é um anel comutativo com elemento unidade.

(4) O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é um anel comutativo com elemento unidade.

(5) Seja A um conjunto unitário, e indicando-se por 0 (zero) seu único elemento; é evidente que só existe uma única operação f sobre A, definida por $0f0 = 0$. Tomando-se $f = + = \cdot$, obtém-se uma estrutura de anel comutativo com elemento unidade $A = \{0\}$. Diz-se, neste caso, que $A = \{0\}$, com estas operações, é um anel nulo.

(6) Seja $(A, +)$ um grupo comutativo, e colocando-se, por definição, $x\,.\,y = 0$ quaisquer que sejam x e y em A, $(A, +, \ \cdot)$ é um anel comutativo, que é chamado anel trivial.

(7) Seja $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ o conjunto de todos os números reais da forma $a + b\sqrt{2}$, com a e b inteiros. Este conjunto é um anel comutativo com elemento unidade.

(8) Considere-se o conjunto A de todas as funções reais e contínuas definidas sobre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Se f e g são dois elementos quaisquer de A, definir-se-á $f + g$ e $f \cdot g$ por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(f.g)(x) = f(x)\,.\,g(x)$, para todo x em $\mathbb{R}$. Essas operações definem uma estrutura de anel comutativo com elemento unidade sobre o conjunto A.

(9) Considere-se o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ com quatro elementos e definam-se as operações de adição e de multiplicação pelas seguintes tábuas:

$+$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

$\cdot$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	b	c
b	0	0	0	0
c	0	a	b	c

Essas operações definem uma estrutura de anel sobre o conjunto A. Note-se que este anel não é comutativo e nem tem elemento unidade.

(10) Seja X um conjunto não vazio e seja A um anel, indique-se por $E = A^X$ o conjunto de todas as aplicações de X em A. Se f e g são dois elementos quaisquer de E, definir-se-á $f + g$ e fg por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Para todo x em X, E é um anel em relação a essas operações. E é comutativo (resp., tem elemento unidade) se, e somente se, A é comutativo (resp., tem elemento unidade).

Diz-se que um elemento a, de um anel comutativo não nulo A, é um divisor de zero se, e somente se, existe $b \in A,\ b \neq 0$, tal que $ab = 0$. Se a é divisor do zero e se $a \neq 0$, dir-se-á que a é um divisor próprio de zero.

Chama-se anel de integridade a todo anel comutativo com elemento unidade $1 \neq 0$ que não possui divisores próprios do zero.

Exemplos:

(11) Os anéis considerados nos exemplos 1, 3, 4 e 7 são anéis de integridade.

(12) $2\mathbb{Z}$ não é um anel de integridade, pois este anel não tem elemento unidade.

(13) Sejam A e B dois anéis comutativos com elementos unidades 1_A e 1_B, considerando-se o anel produto $A \times B$ de A por B, tem-se que $A \times B$ é um anel comutativo e tem unidade $(1_A, 1_B)$, bem como $A \times B$ não é um anel de integridade, pois, por exemplo, $(1_A, 0).(0,\ 1_B) = (1_A.0,\ 0.1_B) = (0, 0)$.

(14) Considerando-se o anel A das funções reais e contínuas definido no exemplo 8, e sendo f e g as funções definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x & se \ x \geq 0 \\ 0 & se \ x < 0 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} 0 & se \ x \geq 0 \\ -x & se \ x < 0 \end{cases}$$

$f \neq 0, g \neq 0$, tem-se que $fg \neq 0$.

(15) Considerando-se o anel $A = \{a, b, c, d\}$ definido no exemplo 9. Conforme tábua de multiplicação desse anel, tem-se, por exemplo, $ba = 0$ com $b \neq 0$.

(16) Considerando-se o anel E definido no exemplo 10, em que se supõe que A seja um anel não nulo e que o conjunto X tenha pelo menos dois elementos x_1 e x_2. Seja a um elemento não nulo de A e sejam f e g as aplicações de X em A definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} a & se \ x = x_1 \\ 0 & se \ x \neq x_1 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} a & se \ x = x_2 \\ 0 & se \ x \neq x_2 \end{cases}$$

$f \neq 0, g \neq 0$ e $fg \neq 0$.

Diz-se que um anel comutativo K, com elemento unidade $1 \neq 0$, é um corpo se, e somente se, todo elemento não nulo de K é inversível para a multiplicação.

4.6. Definição de Anel, segundo Alencar Filho (1990: 209-229)

Seja $(A, *, \top)$ um conjunto não vazio A $(A \neq \emptyset)$ munido de duas operações * e ⊤.

Diz-se que (A, *, ⊤) é um anel se, e somente se, as operações * e ⊤ possuem as seguintes propriedades:

(A1) A operação * é associativa: $(a * b) * c = a * (b * c), \quad \forall \ a, b, c \in A$;

(A2) A operação * admite elemento neutro $e \in A$: $a * e = e * a = a, \ \forall \ a \in A$;

(A3) Todo elemento de A é simetrizável para operação * :

$\forall \ a \in A, \ \exists \ a' \in A \mid a * a' = a' * a = e$

(A4) A operação * é comutativa: $a * b = b * a, \ \forall \ a, b \in A$;

(A5) A operação ⊤ é associativa: $(a \top b) \top c = a \top (b \top c), \quad \forall \ a, b, c \in A$;

(A6) A operação $\top$ é distributiva em relação à operação *:

$$\begin{cases} a \top (b * c) = (a \top b) * (a \top c) \\ (b * c) \top a = (b \top a) * (c \top a) \end{cases}, \quad \forall a, b, c \in A$$

Seja $(A,\ *,\ \top)$ um anel. Se a operação $\top$ é comutativa:

(A7) $$a \top b = b \top a,\ \forall\, a, b \in A$$

Diz-se que $(A,\ *,\ \top)$ é um anel comutativo.

Se a operação $\top$ admite elemento neutro $f \in A$:

(A8) $$a \top f = f \top a = a,\ \forall\ a \in A$$

Diz-se que $(A,\ *,\ \top)$ é um anel unitário.

As operações * e $\top$ de um anel $(A,\ *,\ \top)$ podem ser indicadas pelas notações aditiva e multiplicativa, respectivamente (* = +, $\top$= $\cdot$).

Exemplos:

(1) As ternas $(\mathbb{Z}, +,\ \cdot), (\mathbb{Q}, +,\ \cdot), (\mathbb{R}, +,\ \cdot)$ são anéis comutativos com elemento unidade.

(2) A terna $(2\mathbb{Z}, +,\ \cdot)$, em que $2\mathbb{Z}$ denota o conjunto dos números inteiros pares, é um anel comutativo sem elemento unidade.

(3) A terna $(P(E),\ \triangle,\ \cap)$ (na qual $P(E),\ \triangle,\ \cap$ são, respectivamente, o conjunto das partes do conjunto E, a diferença simétrica e interseção) é um anel comutativo unitário.

(4) A terna $(\mathbb{Z}/(n)\ , +,\ \cdot\ )$, em que $m > 1$, é um anel comutativo com elemento unidade.

(5) Seja o conjunto $A = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b\ \in \mathbb{Z}\}$. A terna $(A, +,\ \cdot)$ é um anel comutativo com unidade.

(6) Seja $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ o conjunto de todas as funções reais de variável real:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

A terna $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +,\ \cdot)$ é um anel comutativo com elemento unidade.

(7) Seja $M_2(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes reais quadradas de ordem 2. A terna $(M_2(\mathbb{R}), +,\ \cdot\ )$ é um anel não comutativo com elemento unidade.

(8) A terna $(\{0\}, +,\ \cdot\ )$ é um anel comutativo com unidade, denominado anel nulo.

(9) Seja $(A, +)$ um grupo abeliano. Munindo o conjunto A de uma operação de multiplicação ($\cdot$) definida por $a.b = 0,\ \forall a, b \in A$, a terna $(A, +,\ \cdot)$ é um anel comutativo sem elemento unidade, denominado anel trivial.

Chama-se anel de integridade todo anel comutativo $(A, +,\ \cdot)$ com elemento unidade e sem divisores de zero.

Anel de integridade é todo anel comutativo $(A, +,\ \cdot)$ com elemento unidade no qual é verdadeira a proposição: $a \neq 0\ e\ b \neq 0\ \Rightarrow a.b \neq 0,\ \forall\ a, b \in A$, ou seja: $a\,.\,b = 0 \Rightarrow a = 0\ ou\ b = 0, \forall\ a, b \in A$.

Exemplos:

(1) As ternas $(\mathbb{Z}, +,\ \cdot), (\mathbb{Q}, +,\ \cdot), (\mathbb{R}, +,\ \cdot)$ são anéis de integridade.

(2) A terna $(6\mathbb{Z}, +,\ \cdot)$ não é um anel de integridade, pois não possui elemento unidade.

(3) A terna $(\mathbb{Z}/(n)\ , +,\ \cdot\ )$ é um anel de integridade quando o módulo n é um número primo.

5. ANÁLISE DO MATERIAL OBSERVADO: Discussão dos Resultados

Realizando uma leitura nesses transcritos, podem ser feitas algumas observações.

A primeira observação diz respeito às várias formas de apresentação dessa estrutura algébrica. Gonçalves (1999), Domingues e Iezzi (2003), Monteiro (1971) e Alencar Filho (1990) definem a estrutura anel como um conjunto não vazio munido de duas operações, satisfazendo 6 (seis) propriedades e apresentando três qualidades, a saber: 1) comutatividade da multiplicação; 2) existência do elemento unidade; e 3) integridade (sem divisores de zero). Já Hefez (1993), define como um conjunto não vazio (com, no mínimo, dois elementos: veja na definição, as propriedades A3 e M3 com duas operações, satisfazendo 8 (oito) propriedades, isto é, a comutatividade e a existência de unidade, que ao contrário do que preconizam os autores acima citados, são exigências necessárias para uma estrutura algébrica ser um anel. Hefez (1993) apresenta apenas uma qualidade, que é a integridade. Por fim, Garcia (2002) define anel (comutativo) como um conjunto com, no mínimo, dois elementos, munido de duas operações, satisfazendo 8 (oito) propriedades. Esse autor define de modo análogo anel não comutativo com 7 (sete) propriedades. Em ambas as definições existe a necessidade de o conjunto possuir elemento unidade.

Outra observação diz respeito aos exemplos dados por esses autores à luz das respectivas definições. Gonçalves (1999), Domingues e Iezzi (2003) e Alencar Filho (1990) não apresentam, de forma explícita, exemplo de um anel que satisfaça apenas a definição "nua e crua", isto é, não mostram um exemplo de um anel que satisfaça apenas as seis propriedades requeridas pela definição constantes em seus livros. Todos os exemplos dados possuem alguma qualidade. Não obstante, realizando uma leitura mais aprofundada, verifica-se que, implicitamente, os dois últimos autores trazem em listas de exercícios exemplos que poderiam ser explorados nesse sentido (exercício 22 (L_1), página 228, e exercício 9, página 218, respectivamente). Monteiro (1971) exibe um exemplo de uma estrutura que se pode classificar como "pura", isto é, um exemplo de um anel que satisfaz somente as condições da definição, ou seja, não possui qualidade alguma, no entanto, a exemplo das referências citadas no início do parágrafo, o autor não faz essa observação, o que se entende ser muito importante para a compreensão do conceito dessa estrutura.

Ainda na linha das diversas formas de apresentação dessa estrutura, verifica-se que, dependendo do autor, um conjunto pode ter ou não uma estrutura de anel. A forma de definir anel de Hefez (1993) exclui, por exemplo, o anel nulo $\{0\}$ (definição exige no mínimo dois elementos); os múltiplos de um número inteiro maiores que 1(um), $n\mathbb{Z}, n > 1$ (definição exige elemento neutro para multiplicação); as matrizes $M_n(A)$, em que A é um anel (definição exige comutatividade da multiplicação); e os Quatérnios $Quat$ (definição exige comutatividade da multiplicação). Já a definição de Garcia, (2002) exclui, por exemplo, o anel nulo $\{0\}$ (definição exige no mínimo dois elementos) e os múltiplos de um número inteiro maiores que 1 (um), $n\mathbb{Z}, n > 1$ (definição exige elemento neutro para multiplicação). Veja o resumo do exposto no quadro abaixo:

Autor	$\{0\}$	$n\mathbb{Z}, n > 1$	$M_n(A), A$ anel	$Quat$
Gonçalves (1999)	Anel	anel	anel	anel
Domingues e Iezzi (2003)	Anel	anel	anel	anel
Hefez (1993)	não é anel	não é anel	não é anel	não é anel
Garcia (2002)	não é anel	não é anel	anel	anel
Monteiro (1971)	Anel	anel	anel	anel
Alencar Filho (1990)	Anel	anel	anel	anel

6. CONCLUSÃO

Observa-se que as várias formas de abordar a estrutura algébrica anel que os autores mencionados apresentam depende do enfoque, no entanto, se o estudante não for orientado corretamente, a diversidade na conceituação/definição pode confundi-lo e até mesmo fazê-lo pensar que esse estudo não apresenta muita coerência. Dessa forma, alerta-se os docentes sobre a importância da escolha da definição a ser abordada e, consequentemente, dos exemplos escolhidos, ou seja, deve-se fazer um planejamento adequado para o magistério de uma disciplina que tem a estrutura anel como um tópico a ser estudado.

A título de orientação, partindo-se de experiências nos cursos de matemática, entende-se ser mais estimulante apresentar uma definição que abranja a maior quantidade possível de exemplos, isto é, uma definição que exija somente 6 (seis) propriedades, como ocorre em Gonçalves (1999), Domingues e Iezzi (2003), Monteiro (1971) e Alencar Filho (1990).

6.1. Um Exemplo de um anel, digamos, puro, à luz das definições de Gonçalves (1999), Domingues e Iezzi (2003), Monteiro (1971) e Alencar Filho (1990)

Um exemplo de anel que satisfaz somente as seis propriedades requeridas nas definições das referências acima, que poderia ser apresentado de maneira natural, seria o seguinte:

$M_m(n\mathbb{Z}) = \{[a_{ij}] \mid a_{ij} \in n\mathbb{Z}, n > 1\}$, o conjunto das matrizes de ordem m $(m > 1)$, com entradas no conjunto $n\mathbb{Z}$.

Esse conjunto é um anel, no entanto, não é comutativo, pois o anel das matrizes não é; não possui unidade, pois o conjunto $n\mathbb{Z}, n > 1$ não tem unidade; e possui divisores de zero. Com isso, acaba-se de construir um exemplo de um anel que não possui qualidade alguma, ou seja, tem-se um exemplo de um anel, pode-se dizer puro, à luz das definições de Gonçalves (1999), Domingues e Iezzi (2003), Monteiro (1971) e Alencar Filho (1990).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Elementos de Álgebra**. São Paulo: Nobel, 1990.

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra moderna**. 4. ed. São Paulo: Editora Atual, 2003.

GARCIA, Arnaldo. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2002.

GONÇALVES, Adilson. **Introdução à Álgebra**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1999.

HEFEZ, Abramo. **Curso de Álgebra**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada/CNPq, 1993. 1 v.

MONTEIRO, L. H. Jacy. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: Editora Ao Livro Técnico S.A., 1971.

PICADO, Jorge. **Corpos e Equações Algébricas**. Disponível em: < http://arquivoescolar.org/bitstream/arquivo-e/51/1/CeEA.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2011.

Sérgio Brazil Júnior
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Universidade Federal do Acre
sbrazil@ufac.br
(68)9984-1922