Conjuntos Abelianos Maximais

(Dedicado para meu filho Demetrius)

por

José Ivan da Silva Ramos

(Doutor em Álgebra e membro efetivo do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Acre)

Resumo

Dado que em qualquer grupo G a família $\mathfrak{A}G = \{H \leq G / H \text{ é abeliano}\}$ é indutivamente ordenada, concluímos, através do *lema de Zorn*, que sempre existe um subgrupo abeliano maximal em *G*. Neste trabalho mostramos que a família desses subgrupos maximais tem uma forte ligação com $\Pi_{\mathfrak{A}}\ (G)$, o subgrupo preservador da comutatividade em *G* (ver definição 2.1.1 em [4]).

Abstract

As in any group G the family $\mathfrak{A}G = \{H \leq G / H \text{ is abelian}\}$ is inductively ordered, we conclude, by *Zorn's lemma*, there is always a maximal abelian subgroup in *G*. We show that the family of maximal subgroups has a strong connection to $\Pi_{\mathfrak{A}}\ (G)$, the preserver subgroup of commutativity in *G* (see definition 2.1.1 in [4]).

Palavras Chave: Família, cadeia, lema de Zorn, grupo, subgrupo, abeliano, preservador de propriedade, centralizador e maximal.

1. Introdução

Iniciamos nossas considerações dando destaque para alguns conceitos elementares e gerais da teoria dos conjuntos. Consideramos claros os significados de união, interseção, relações de pertinência entre elementos e conjuntos e relações de inclusão entre conjuntos, produtos e produtos cartesianos.

Se S é um conjunto, $P(S) = 2^S = \{X/X \subset S\}$ é o conjunto das partes de S. Todo subconjunto F de $P(S)$ é denominado uma *família* de subconjuntos de S.

Definição 1: Sejam S um conjunto não vazio e $F \subset P(S)$ uma família (de subconjuntos) de S. Dizemos que F é uma *cadeia* se, e somente se, valem as condições:
i) $F \neq \Phi$;
ii) $\forall\, X, Y \in F$, vale que $X \subset Y$ ou $Y \subset X$.

A família $\mathcal{C}(\mathbb{N}) = \{\{0\},\{0,1\},\{0,1,2\},...,\{0,1,2,...,n\},...\} \subset \mathfrak{F}\mathbb{N}$ é uma cadeia (infinita) tal que a união de seus elementos, que é exatamente o conjunto $\mathbb{N}$, não é um membro da família $\mathfrak{F}\mathbb{N}$, dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$.

Definição 2: Dizemos que uma família F de subconjuntos de um conjunto não vazio S é *indutivamente ordenada* se, e somente se, F sempre contém $\bigcup_{W \in \mathcal{C}(S)} W$, a união dos termos de qualquer cadeia $\mathcal{C}(S)$ dentro da família F.

Exemplo 1: Seja E um conjunto não vazio no qual uma operação $*$ está definida; i. e., $\forall\, x, y \in E$, vale que $x * y \in E$.

A família

$$\mathfrak{A}E = \{X \subset E / \forall\, x, y \in X, \text{ vale que } x * y = y * x\},$$

dos subconjuntos comutativos de E, é indutivamente ordenada: Para qualquer cadeia $\mathcal{C}(E)$ contida na família $\mathfrak{A}E$, consideremos a união $L = \bigcup_{A \in \mathcal{C}(E)} A$. Dados quaisquer elementos h, $k \in L$, vale que $h \in H$ e $k \in K$; onde H e K são elementos não necessariamente distintos da cadeia $\mathcal{C}(E)$. Como $H \subset K$ ou $K \subset H$, vale que $h, k \in H$ ou h, $k \in K$. Como $H, K \in \mathfrak{A}E$, vale que $h * k = k * h$. Isso nos mostra que L é comutativo. Conseqüentemente $L \in \mathfrak{A}E$ e $\mathfrak{A}E$ é indutivamente ordenada.

Especializando os conjuntos onde esses conceitos podem ser testados podemos pensar nas famílias de subgrupos de um dado grupo G.

Definição 3: Dizemos que $\mathfrak{X}$ é uma classe ou propriedade de grupos se para todo grupo *G* podemos decidir se *G* possui ou não a propriedade $\mathfrak{X}$; ou seja, se podemos decidir se $G \in \mathfrak{X}$ ou $G \notin \mathfrak{X}$.

São exemplos de classes de grupos: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{N}$ as classes dos grupos (comutativos ou) abelianos, cíclicos, finitos e nilpotentes, respectivamente.

Comumente dizemos que *G* é um $\mathfrak{X}$-grupo se *G* possui a propriedade $\mathfrak{X}$. Por $\mathfrak{X}G = \{H \leq G/H \in \mathfrak{X}\}$ denotamos a família dos $\mathfrak{X}$-subgrupos de *G*; isto é, a família dos subgrupos de *G* que possuem a propriedade $\mathfrak{X}$.

2. Apresentação de resultados

Em um grupo *G* não finito, a investigação de resultados não pode contar com a estratégia de se usar indução sobre $|G|$, a ordem do grupo *G*. Para investigar grupos mais gerais podemos, em muitos casos, usar um importante resultado que é o

Lema de Zorn: Toda família de subconjuntos indutivamente ordenada possui um elemento maximal.

Considerando o que foi discutido em nosso exemplo 1, se *G* é qualquer grupo, a família $\mathfrak{A}G = \{H \leq G/H \in \mathfrak{A}\}$, dos subgrupos abelianos de *G*, é indutivamente ordenada.

Pelo lema de Zorn, $m(\mathfrak{A}G) = \{M/M \text{ é um elemento maximal em } \mathfrak{A}G\}$, o conjunto formado pelos subgrupos abelianos maximais de *G* é não vazio.

Exemplo 2: Se *G* é um grupo vale a igualdade $Z(G) = \bigcap_{M \in m(\mathfrak{A}G)} M$: Podemos supor que *G* não é um grupo abeliano e considerar primeiramente $x \in Z(G)$. Então, $\forall\, M \in m(\mathfrak{A}G)$, vale que $\langle x \rangle\, M \in \mathfrak{A}$. Pela maximalidade de *M*, temos $\langle x \rangle\, M = M$. Segue então que $x \in M$ e isso mostra que $x \in \bigcap_{M \in m(\mathfrak{A}G)} M$. Agora, se $x \in \bigcap_{M \in m(\mathfrak{A}G)} M$, para todo elemento *y* em *G*, vale que $\langle y \rangle \leq M$, para algum $M \in m(\mathfrak{A}G)$. Assim, $x, y \in M$ e vale que $xy = yx;\ \forall\, y \in G$. Portanto, $x \in Z(G)$ e vale a igualdade $Z(G) = \bigcap_{M \in m(\mathfrak{A}G)} M$.

O subgrupo $\bigcap_{M\in m(\mathfrak{A}G)} M$, intersecção dos elementos de $m(\mathfrak{A}G)$, tem conexão com o conjunto dos elementos de G cujos fechos normais, juntamente com qualquer subgrupo abeliano de G, formam, via produto, subgrupos abelianos.

As técnicas empregadas no entendimento das pequenas afirmações que apresentamos a seguir fazem parte de uma abordagem feita em classes de grupos mais gerais (ver [4]).

Proposição 1: Seja G um qualquer grupo G. Então:

a) O conjunto $\Pi_{\mathfrak{A}}(G) = \{x \in G \mid \langle x^G\rangle A \in \mathfrak{A};\ \forall\, A \in \mathfrak{A}G\}$ é um subgrupo característico de G.

b) Se $H \leq G$, vale que $\Pi_{\mathfrak{A}}(G) \cap H \leq \Pi_{\mathfrak{A}}(H)$.

Demonstração: a) Claro que $1 \in \Pi_{\mathfrak{A}}(G)$. Além disso, $\forall\, y \in \Pi_{\mathfrak{A}}(G)$, para todo $A \in \mathfrak{A}G$, temos que $\langle y^G\rangle A \in \mathfrak{A}$. Assim, qualquer que seja $x \in \Pi_{\mathfrak{A}}(G)$, temos que $\langle x^G\rangle\,(\langle y^G\rangle A) = \langle x^G\rangle\,\langle y^G\rangle A \in \mathfrak{A}$. Como xy^{-1}é um elemento de $\langle x^G\rangle\,\langle y^G\rangle A$, vemos que $\langle (xy^{-1})^G\rangle A \leq \langle x^G\rangle\,\langle y^G\rangle A$. Sendo $\mathfrak{A}$ fechada para subgrupos, $\langle (xy^{-1})^G\rangle A \in \mathfrak{A}$, o que mostra que $xy^{-1} \in \Pi_{\mathfrak{A}}(G)$. Segue então que $\Pi_{\mathfrak{A}}(G)$ é um subgrupo de G.

Agora, se σ é um automorfismo de G, $\sigma(x) \in \Pi_{\mathfrak{A}}(G)$; para todo elemento $x \in \Pi_{\mathfrak{A}}(G)$; ou seja, $\Pi_{\mathfrak{A}}(G)$ é um subconjunto característico de G.

b) Seja x qualquer elemento em $\Pi_{\mathfrak{A}}(G) \cap H$ e A qualquer elemento em $\mathfrak{A}H$. Como $\mathfrak{A}H \subset \mathfrak{A}G$ e $x \in \Pi_{\mathfrak{A}}(G)$, vemos que $\langle x^H\rangle A \leq \langle x^G\rangle A \in \mathfrak{A}$. Isso mostra que $x \in \Pi_{\mathfrak{A}}(H)$.∎

O próximo resultado dá uma forte indicação para a comparação que fazemos entre $\Pi_{\mathfrak{A}}(G)$ e $Z(G)$, no final desta seção.

Proposição 2: Seja $G = G_1 \times G_2$ um produto direto dos grupos G_1 e G_2. Então, vale a seguinte relação: $\Pi_{\mathfrak{A}}(G) = \Pi_{\mathfrak{A}}(G_1) \times \Pi_{\mathfrak{A}}(G_2)$.

Demonstração: Provaremos a igualdade mostrando que esses conjuntos estão contidos um no outro.

Inicialmente, consideremos qualquer subgrupo $A \in \mathfrak{A}G$. Valem as seguintes relações: $G_1 \cap AG_2 = (G_1 \cap AG_2)/1 = G_1 \cap AG_2/(G_1 \cap AG_2) \cap G_2$. Por isomorfismo temos que $G_1 \cap AG_2/(G_1 \cap AG_2) \cap G_2 \cong (G_1 \cap AG_2)\,G_2/G_2 = AG_2/G_2 \cong A/A \cap G_2$.

Como a classe $\mathfrak{A}$ é fechada para quocientes, concluímos que $G_1 \cap AG_2 \in \mathfrak{A}$. De maneira análoga concluímos que $G_2 \cap AG_1 \in \mathfrak{A}$.

Seja x um elemento em $\Pi_{\mathfrak{A}}(G_1)$. Vale que $\langle x^{G_1}\rangle = \langle x^G\rangle$. Portanto, temos que $\langle x^G\rangle (G_1 \cap AG_2) = \langle x^{G_1}\rangle (G_1 \cap AG_2) \in \mathfrak{A}$.

Do fato que $A \leq AG_1 \cap AG_2 = (G_1 \cap AG_2) \times (G_2 \cap AG_1)$, podemos observar que $\langle x^G\rangle A \leq \langle x^G\rangle (AG_1 \cap AG_2) = \langle x^G\rangle ((G_1 \cap AG_2) \times (G_2 \cap AG_1))$. Segue que $\langle x^G\rangle A \leq \langle x^{G_1}\rangle ((G_1 \cap AG_2) \times (G_2 \cap AG_1)) = (\langle x^{G_1}\rangle (G_1 \cap AG_2)) \times (G_2 \cap AG_1) \in \mathfrak{A}$, o que mostra que $x \in \Pi_{\mathfrak{A}}(G)$ e que $\Pi_{\mathfrak{A}}(G_1) \leq \Pi_{\mathfrak{A}}(G)$. Argumentos análogos mostram que $\Pi_{\mathfrak{A}}(G_2) \leq \Pi_{\mathfrak{A}}(G)$. Concluímos então que $\Pi_{\mathfrak{A}}(G_1) \times \Pi_{\mathfrak{A}}(G_2) \subset \Pi_{\mathfrak{A}}(G)$.

Agora, $\forall\, x \in \Pi_{\mathfrak{A}}(G)$, pelo fato de $G = G_1 \times G_2$ ser um produto direto, vale que $x = ab$; com $a \in G_1$ e $b \in G_2$. Pela escolha de x, sendo $\langle b\rangle$ um subgrupo (cíclico) abeliano de G, temos $\langle a^{G_1}\rangle = \langle (xb^{-1})^{G_1}\rangle \leq \langle x^A\rangle\langle b\rangle \leq \langle x^G\rangle\langle b\rangle \in \mathfrak{A}$. Segue que $\langle a^{G_1}\rangle A_1 \leq \langle x^G\rangle\langle b\rangle A_1 \leq \langle x^G\rangle (\langle b\rangle \times A_1) \in \mathfrak{A}$; $\forall A_1 \in \mathfrak{A}G_1$. Isso mostra que $a \in \Pi_{\mathfrak{A}}(G_1)$. Argumentando da mesma forma, obtemos que $\langle b^{G_2}\rangle A_2 \in \mathfrak{A}$; $\forall A_2 \in \mathfrak{A}G_2$ e assim $b \in \Pi_{\mathfrak{A}}(G_2)$. Portanto, temos $x = ab \in \Pi_{\mathfrak{A}}(G_1) \times \Pi_{\mathfrak{A}}(G_2)$. De onde segue que $\Pi_{\mathfrak{A}}(G) \subset \Pi_{\mathfrak{A}}(G_1) \times \Pi_{\mathfrak{A}}(G_2)$. Com isso temos que $\Pi_{\mathfrak{A}}(G) = \Pi_{\mathfrak{A}}(G_1) \times \Pi_{\mathfrak{A}}(G_2)$.■

Conforme definição 2.1.1 em [5; pág. 30], $\Pi_{\mathfrak{A}}(G)$ pode ser entendido como um subgrupo *preservador da propriedade* $\mathfrak{A}$ em *G*. A coincidência da interseção dos elementos da família $m(\mathfrak{A}G)$, dos subgrupos abelianos maximais de *G*, com $\Pi_{\mathfrak{A}}(G)$ é um particular resultado da proposição 3.1 em [6], pág. 251, dado que a classe $L\mathfrak{A}$, dos grupos localmente abelianos, coincide com a classe $\mathfrak{A}$ dos grupos abelianos. Vale a seguinte

Proposição 3: Se *G* é um grupo; então vale a igualdade $\Pi_{\mathfrak{A}}(G) = \bigcap_{M \in m(\mathfrak{A}G)} M$.

Demonstração: Seja $x \in \Pi_{\mathfrak{A}}(G)$. Então, $\forall\, M \in m(\mathfrak{A}G)$, vale que $\langle x^G\rangle M \in \mathfrak{A}$. Sendo *M* abeliano maximal, temos $\langle x^G\rangle M = M$, conseqüentemente, $x \in \langle x^G\rangle \leq M$, o que mostra que $x \in \bigcap_{M \in m(\mathfrak{A}G)} M$.

Reciprocamente, considere $x \in \bigcap_{M \in m(\mathfrak{A}G)} M$. Para qualquer $A \in \mathfrak{A}G$, existe em *G* um subgrupo abeliano maximal L tal que $A \leq L$ e por isso, temos que $\langle x^G\rangle A \leq L$. Segue que $\langle x^G\rangle A \in \mathfrak{A}$. Portanto, vale que $x \in \Pi_{\mathfrak{A}}(G)$.■

É possível obtermos $\Pi_{\mathfrak{A}}(G)$ interceptando os centralizadores dos subgrupos abelianos maximais de *G*. Isso é uma conseqüência da seguinte

Observação 1: Se G é um grupo e $A \in \mathfrak{A}G$, para todo *x* em $\mathcal{C}_G(A)$, vale que $\langle x, A \rangle \in \mathfrak{A}G$. Em particular, se *G* não é abeliano e $A \in m(\mathfrak{A}G)$, vale que $A = \mathcal{C}_G(A)$ é auto centralizante.

Demonstração: Primeiramente observemos que se $h \in \langle x, A \rangle$, vale que $h = u_1 u_2 u_3 \cdots u_k$; onde $1 \leq k \in \mathbb{N}$ e $u_i \in A$, $u_i = x$ ou $u_i = x^{-1}$, para cada *i*. Como *A* é abeliano e é centralizado por *x*, podemos juntar os fatores de *h*, que estão em *A*, colocando todos à esquerda desse produto. Assim temos $h = lx^m$, onde $m \in \mathbb{Z}$ e l é o produto dos fatores em *A*.

Agora, $\forall\, l_1 x^{m_1}, l_2 x^{m_2} \in \langle x, A \rangle$, temos $(l_1 x^{m_1})\,(l_2 x^{m_2}) = ((l_1 x^{m_1})\, l_2) x^{m_2}$. Como *x* centraliza *A* e *A* é abeliano temos $((l_1 x^{m_1})\, l_2) x^{m_2} = (l_2\,(l_1 x^{m_1})\,) x^{m_2} = l_2(l_1(x^{m_1}\, x^{m_2})) = l_2(l_1(x^{m_2}\, x^{m_1})) = l_2((l_1 x^{m_2})\, x^{m_1}) = l_2((x^{m_2} l_1)\, x^{m_1}) = (l_2 x^{m_2})(l_1\, x^{m_1})$. Isso mostra que $\langle x, A \rangle$ é abeliano.

Se *A* é maximal, vale que $\langle x, A \rangle = A$ e assim, $x \in A, \forall x \in \mathcal{C}_G(A)$. Isso mostra que $\mathcal{C}_G(A) \leq A$. Que $A \leq \mathcal{C}_G(A)$ é claro.∎

Corolário: Em qualquer grupo *G* vale que $\Pi_{\mathfrak{A}}(G) = \bigcap_{M \in m(\mathfrak{A}G)} \mathcal{C}_G(M)$.

Demonstração: Pela proposição 3 vale que $\Pi_{\mathfrak{A}}(G) = \bigcap_{M \in m(\mathfrak{A}G)} M$. Pela observação anterior vale que $M = \mathcal{C}_G(M), \forall\, M \in m(\mathfrak{A}G)$.∎

Uma natural pergunta que surge é: Sempre temos a coincidência de $\Pi_{\mathfrak{A}}(G)$ com a interseção $\bigcap_{M \in m(\mathfrak{A}G)} \mathcal{N}_G(M)$, dos subgrupos normalizadores em *G* dos elementos de $m(\mathfrak{A}G)$?

Claro que sempre temos $\Pi_{\mathfrak{A}}(G) \left(= \bigcap_{M \in m(\mathfrak{A}G)} \mathcal{C}_G(M) \right) \leq \bigcap_{M \in m(\mathfrak{A}G)} \mathcal{N}_G(M)$, em qualquer grupo *G*. Porém, se *G* não é um grupo abeliano, essa inclusão pode ser própria como mostra o

Exemplo 3: Consideremos "·", a multiplicação usual de matrizes no conjunto $Q_3 = \left\{\pm\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}_{2x2}, \pm\begin{bmatrix}i & 0\\0 & -i\end{bmatrix}_{2x2}, \pm\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}_{2x2}, \pm\begin{bmatrix}0 & i\\i & 0\end{bmatrix}_{2x2}\right\}$. Temos que $(Q_3, \cdot)$ é um grupo não abeliano e todos os seus subgrupos são normais. Nesse grupo denominado *grupo dos quatérnios*, temos que

$$\Pi_{\mathfrak{A}}(Q_3)\left(= \bigcap_{M\in m(\mathfrak{A}Q_3)} \mathcal{C}_{Q_3}(M)\right) \neq \bigcap_{M\in m(\mathfrak{A}Q_3)} \mathcal{N}_{Q_3}(M) = Q_3$$

De forma direta ou usando o fato de que $\Pi_{\mathfrak{A}}(G) = \bigcap_{M\in m(\mathfrak{A}G)} M$, podemos ver facilmente que $Z(G) = \Pi_{\mathfrak{A}}(G) = \bigcap_{M\in m(\mathfrak{A}G)} M = \bigcap_{M\in m(\mathfrak{A}G)} \mathcal{C}_G(M)$. Essa comparação entre o preservador da propriedade $\mathfrak{A}$ e o centro de um grupo evidencia a comparação que fizemos no exemplo 2.

3. Elementos $\mathfrak{A}$-preservadores e o $\mathfrak{A}$C- centro de um grupo *G*

Nesta seção introduzimos o conceito de $Z_{\mathfrak{A}}(G)$, o $\mathfrak{A}C$- *centro* do grupo *G*. Mostramos que sempre $\Pi_{\mathfrak{A}}(G)$ é parte de $Z_{\mathfrak{A}}(G)$ e que, mesmo que esses conjuntos não coincidam, cada elemento do $\mathfrak{A}C$- *centro* de *G* ainda é centralizado por algum membro da família $m(\mathfrak{A}G)$.

Definição 4: (Ver [1]) Seja *G* um grupo e *x* um elemento em *G*. Dizemos que *x* é um $\mathfrak{A}C$-elemento de *G* se, e somente se, ${}^{G}\!/_{\mathcal{C}_G(\langle x^G\rangle)} \in \mathfrak{A}$, ou seja, *G* induz sobre $\langle x^G\rangle$ um $\mathfrak{A}$-grupo de automorfismos.

O conjunto dos $\mathfrak{A}C$-elementos de *G*, denotado por

$$Z_{\mathfrak{A}}(G) = \left\{x \in G \;/\; {}^{G}\!/_{\mathcal{C}_G(\langle x^G\rangle)} \in \mathfrak{A}\right\},$$

é denominado o $\mathfrak{A}C$- *centro* de *G*. Se $Z_{\mathfrak{A}}(G) = G$, dizemos que *G* é um o $\mathfrak{A}C$- *grupo*.

O fechamento da classe $\mathfrak{A}$ para subgrupos, quocientes e para produto direto de dois fatores, permite concluir que sempre $Z_{\mathfrak{A}}(G)$ é um subgrupo de *G* que goza de algumas propriedades. Temos a seguinte

Observação 2: Seja G um grupo. Então valem as seguintes proposições:

a) Se $G/\Pi_{\mathfrak{A}}(G)$ é abeliano, então $Z_{\mathfrak{A}}(G) = G$ é um $\mathfrak{A}C$-grupo.

b) $Z_{\mathfrak{A}}(G)$ é um $\mathfrak{A}C$-subgrupo de G.

c) Para todo subgrupo H de G, temos que $Z_{\mathfrak{A}}(G) \cap H \leq Z_{\mathfrak{A}}(H)$.

Demonstração: a) Segue imediatamente usando isomorfismo e o fato de que $\mathfrak{A}$ é fechada a quocientes: Temos $G/C_G(\langle x^G \rangle) \cong \dfrac{G/\Pi_{\mathfrak{A}}(G)}{C_G(\langle x^G \rangle)/\Pi_{\mathfrak{A}}(G)}$; $\forall x \in G$.

Que todo elemento em $\Pi_{\mathfrak{A}}(G) \leq C_G(\langle x^G \rangle)$ é claro (ver o exemplo 2, na seção 2).

b) Provaremos primeiro que $Z_{\mathfrak{A}}(G)$ é um subgrupo de G: Sejam x, y quaisquer elementos em $Z_{\mathfrak{A}}(G)$. Pondo $z = xy^{-1}$, temos $\langle z^G \rangle \leq \langle x^G \rangle \langle y^G \rangle$ e assim, vale que $E = C_G(\langle x^G \rangle) \cap C_G(\langle y^G \rangle) \leq C_G(\langle z^G \rangle)$. Sendo a classe $\mathfrak{A}$ fechada para subgrupos e produto direto de dois fatores, vemos que G/E é um grupo abeliano. Pelo fechamento da classe $\mathfrak{A}$ a quocientes, temos que $G/C_G(\langle z^G \rangle) \cong \dfrac{G/E}{C_G(\langle z^G \rangle)/E} \in \mathfrak{A}$. Isso mostra que $Z_{\mathfrak{A}}(G)$ é um subgrupo de G.

Consideremos agora qualquer elemento x em $Z_{\mathfrak{A}}(G)$. Vale que $Z_{\mathfrak{A}}(G)C_G(\langle x^G \rangle)/C_G(\langle x^G \rangle) \cong Z_{\mathfrak{A}}(G)/Z_{\mathfrak{A}}(G) \cap C_G(\langle x^G \rangle) \leq G/C_G(\langle x^G \rangle)$ é um grupo abeliano. Como $Z_{\mathfrak{A}}(G) \cap C_G(\langle x^G \rangle) \leq C_{Z_{\mathfrak{A}}(G)}(\langle x^{Z_{\mathfrak{A}}(G)} \rangle)$ e a classe $\mathfrak{A}$ também é fechada para quocientes, vemos que $Z_{\mathfrak{A}}(G)/C_{Z_{\mathfrak{A}}(G)}(\langle x^{Z_{\mathfrak{A}}(G)} \rangle) \in \mathfrak{A}$ e assim, $Z_{\mathfrak{A}}(G)$ é um $\mathfrak{A}C$-subgrupo de G.

c) Seja x um elemento em $Z_{\mathfrak{A}}(G) \cap H$. Pelo teorema do isomorfismo, temos que $H/H \cap C_G(\langle x^G \rangle) \cong HC_G(\langle x^G \rangle)/C_G(\langle x^G \rangle) \leq G/C_G(\langle x^G \rangle)$ é um grupo abeliano. Como, $H \cap C_G(\langle x^G \rangle) \leq C_H(\langle x^H \rangle)$, novamente por isomorfismo temos que o grupo

$$\left.{}^{H}\!\Big/_{H \cap \mathcal{C}_G(\langle x^G \rangle)} \middle/ {}^{\mathcal{C}_H(\langle x^H \rangle)}\!\Big/_{H \cap \mathcal{C}_G(\langle x^G \rangle)} \right. \cong {}^{H}\!\Big/_{\mathcal{C}_H(\langle x^H \rangle)}$$ é abeliano. Isso mostra que x é um elemento em $Z_{\mathfrak{A}}(H)$.■

Observação 3: Se G é um grupo e $x \in Z_{\mathfrak{A}}(G)$, vale que $\langle x^G \rangle \leq M$, para algum M na família $m(\mathfrak{A}G)$.

Demonstração: É suficiente provarmos que o fecho normal de x é abeliano. De fato: Seja x um $\mathfrak{A}C$-elemento de G. Então, vale que ${}^{G}/_{\mathcal{C}_G(\langle x^G \rangle)} \in \mathfrak{A}$. Desde que $\mathcal{C}_G(\langle x^G \rangle) \leq \mathcal{C}_G(x)$, por isomorfismo e pelo fechamento da classe $\mathfrak{A}$ para quocientes,

$$\left.{}^{G}\!\Big/_{\mathcal{C}_G(\langle x^G \rangle)} \middle/ {}^{\mathcal{C}_G(x)}\!\Big/_{\mathcal{C}_G(\langle x^G \rangle)} \right. \cong {}^{G}\!\Big/_{\mathcal{C}_G(x)}$$ é abeliano e $\mathcal{C}_G(x) \trianglelefteq G$. Isso significa que $\forall\ g_1, g_2 \in G$, vale que $x^{g_1} \in \mathcal{C}_G(x^{g_2})$, ou seja, $\langle x^G \rangle$ é abeliano.

Observação 4: Em qualquer grupo G vale que:

a) $\Pi_{\mathfrak{A}}(G) \leq Z_{\mathfrak{A}}(G)$;

b) Se $x \in Z_{\mathfrak{A}}(G)$, $\langle x^G \rangle$ é centralizado por algum elemento M de $m(\mathfrak{A}G)$.

Demonstração: a) Para todo x em $\Pi_{\mathfrak{A}}(G)$, usando a caracterização de $\Pi_{\mathfrak{A}}(G)$ na proposição 3 e o fato de que para todo g em G, temos $\langle g \rangle \leq M$, onde $M \in m(\mathfrak{A}G)$, vemos que $x,\ g \in M$ e assim, $xg = gx$. Isso mostra que $\mathcal{C}_G(\langle x^G \rangle) = \mathcal{C}_G(x) = G$ e assim temos que ${}^{G}/_{\mathcal{C}_G(\langle x^G \rangle)} = 1$ é um grupo abeliano. Portanto vale que $x \in Z_{\mathfrak{A}}(G)$.

b) Pela observação 3, vale que $\langle x^G \rangle$ é um subgrupo (normal) abeliano de G. Assim, temos que $\langle x^G \rangle \leq M$. Segue que $\mathcal{C}_G(M) \leq \mathcal{C}_G(\langle x^G \rangle)$. Pela observação 1, vale que $M = \mathcal{C}_G(M)$ o que mostra que M centraliza $\langle x^G \rangle$.■

Exemplo 4: Em muitos casos temos $\Pi_{\mathfrak{A}}(G) \neq Z_{\mathfrak{A}}(G)$. Por exemplo, em S_3, temos $\Pi_{\mathfrak{A}}(S_3) = 1$, enquanto que $1 \neq A_3 \leq Z_{\mathfrak{A}}(S_3)$.

4. Considerações finais

A existência de subgrupos abelianos maximais em um grupo G, garantida pelo lema de Zorn, permite que o conjunto $\Pi_{\mathfrak{A}}(G)$, preservador da propriedade $\mathfrak{A}$ em *G*, seja obtido como a interseção desses subgrupos. O exemplo 2 e as proposições 1 e 2, ***motivam uma "nova" definição do centro de um grupo***.

O fato de que o produto de dois subgrupos normais abelianos de um grupo *G*, em geral não é um subgrupo (normal) abeliano de *G*, de certa forma, "diminui" as possibilidades de obtermos mais resultados utilizando esses subgrupos maximais dentro do grupo *G*.

Conforme o exemplo 3, o $\mathfrak{A}C$-centro de um grupo *G* pode conter propriamente $\Pi_{\mathfrak{A}}(G)$. Nesse caso, podemos comparar os elementos desses subgrupos: Para um elemento $1 \neq x \in \Pi_{\mathfrak{A}}(G)$ vale que ***todo subgrupo abeliano maximal de G centraliza*** $\langle \boldsymbol{x^G} \rangle$, o fecho normal de *x* em *G*. Enquanto que se $1 \neq x \in Z_{\mathfrak{A}}(G)$, com $x \notin \Pi_{\mathfrak{A}}(G)$, o item b) da observação 3 garante que $\langle x^G \rangle$ é abeliano e por isso está contido em ***um subgrupo abeliano maximal de G***. Esse subgrupo certamente ***centraliza*** $\langle \boldsymbol{x^G} \rangle$.

O conceito mais geral de preservador de uma propriedade $\mathfrak{X}$ de grupos, formulada por Maier e Ramos (ver [5]), foi investigado a partir da classe $L\mathfrak{N}$ dos grupos *localmente nilpotentes*, grupos nos quais todo subgrupo finitamente gerado é nilpotente.

A existência de subgrupos localmente nilpotentes maximais e do maior subgrupo normal localmente nilpotente de um grupo *G* são garantidas, respectivamente, pelo lema de Zorn e por um teorema Hirsch e Plotkin (ver [2], § 12.1) que mostra que o produto de dois subgrupos normais localmente nilpotentes de um grupo *G* é um subgrupo (normal) localmente nilpotente de *G*. Utilizando esses fatos foi possível definir o conjunto $\Pi_{L\mathfrak{N}}(G) = \{x \in G \;/\; \langle x^G \rangle H \in L\mathfrak{N};\; \forall\, H \in L\mathfrak{N}\}$, preservador da propriedade de um grupo ser localmente nilpotente, mostrar que $\Pi_{L\mathfrak{N}}(G) = \bigcap_{M \in m(L\mathfrak{N}G)} M$ e estudar as propriedades desse conjunto.

Investigações mais cuidadosas mostraram que, sempre que uma classe $\mathfrak{X}$ de grupos é fechada para subgrupos, quocientes e produto direto de dois fatores, o conjunto $\Pi_{\mathfrak{X}}(G) = \{x \in G / \langle x^G \rangle U \in \mathfrak{X}; \forall U \in \mathfrak{X}G\}$ merece uma atenção especial.

5. Bibliografia

[1] Maier, R. and Rogério, J. R.; *$\mathfrak{X}$C-elements in groups and Dietzmann classes*; Contribuitions to algebra and geometry **40**; 243-260 (1999);

[2] Robinson, D. J. S.; *A course in the theory of groups*; Springer Verlag; New York-Berlim-Heidelberg (1996);

[3] Robinson, D. J. S.; *Finiteness conditions and generalized soluble groups*; Part 1; Springer Verlag; New York-Berlim-Heidelberg (1972);

[4] Robinson, D. J. S.; *Finiteness conditions and generalized soluble groups*; Part 2; Springer Verlag; New York-Berlim-Heidelberg (1972);

[5] Ramos, J. I. S.; *Subgrupos preservadores de propriedades em grupos*; Tese de doutorado; Brasília (1993);

[6] Ramos, J. I. S. and Maier, R.; *Propert preserving subgroups of a group*; JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications **6**; Issue **2**; PP. 237-264 (2006).

José Ivan da Silva Ramos

Rua Maranhão, nº 133 – Bairro Bosque – Rio Branco – Acre

CEP: 69908-240

ivanr@ufac.br

Tels.: 0xx68-3224-5054 e 0xx68-84132219.