SEMIGRUPOS ASSOCIADOS A GERMES DE CURVAS PLANAS IRREDUTÍVEIS[1]

LEANDRO NERY DE OLIVEIRA

Professor Assistente do Centro de Ciências Exatas e

Tecnológicas da Universidade Federal do Acre.

RESUMO

Os semigrupos numéricos são estruturas simples e que não necessitam de uma teoria muito forte para a sua compreensão. No entanto, sua aplicação dentro da própria matemática como fora dela é surpreendente, passando pelas curvas algébricas até a teoria dos códigos corretores de erros. Neste artigo de revisão, veremos uma associação entre germes de uma curva plana irredutível e semigrupos numéricos, chamado semigrupo de valores.

ABSTRACT

The numerical semigroups are simple structures that do not require a strong theory for their understanding. However, its application within and outside mathematics itself is amazing, through algebraic curves to the theory of error correcting codes. In this review, we see an association between a plane curve germs of irreducible numerical semigroups, called semigroup of values.

Palavras chaves: Semigrupos, Curvas Planas, Germes de Curvas.

[1] Como esse artigo foi fruto de pesquisa para a dissertação de mestrado [5], quero dar um agradecimento especial ao Prof. Dr. Leonardo Meireles Câmara - UFES, que me orientou nesses estudos.

1. Introdução

Iniciamos este artigo enunciando os resultados e definições iniciais na teoria de semigrupos numéricos. Veremos como a Apéry-sequência nos ajuda a calcular um conjunto de geradores de um semigrupo e como expressar um semigrupo por meio de sistema mínimos de geradores. A partir daí, faremos uma explanação geral sobre a teoria de curvas planas com o objetivo de relacionar curvas do tipo $f(X, Y) = 0$, com um elemento irredutível f em $\mathbb{C}[[X, Y]]$, com um semigrupo. Esse semigrupo é definido como semigrupo de valores.

Consideremos G um subconjunto dos naturais contendo 0 (zero). Temos as seguintes definições:

1.1 Definição

a) Dizemos que G é um semigrupo numérico de $\mathbb{N}$ se G é fechado em relação à operação usual de adição.

b) Sendo G um semigrupo, definimos o conjunto das lacunas de G como o conjunto $L_G = \mathbb{N} \backslash G$. No caso em que $L_G = \{l_1 < l_2 < \cdots < l_g\}$ for finito chamaremos a maior lacuna l_G de número de Frobenius de G.

   Além disso, existe um único elemento $c \in G$ tal que

   i) $c - 1 = l_g \notin G$;

   ii) para todo $z \in \mathbb{N}$ temos $c + z \in G$.

   Esse elemento será chamado de *condutor* do semigrupo G.

c) O número $m = mín(G \setminus \{0\})$ é chamado de *multiplicidade* do semigrupo G.

1.2 Exemplos

1. Seja $G_1 = \{0, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$. Obviamente, G_1 é semigrupo. O conjunto das lacunas de G_1 é $L_{G_1} = \mathbb{N} \setminus G^1 = \{1,2,3,4\}$ e, além disso, o condutor de G_1 é o número $c = 5$ e o número de Frobenius é $l_g = 4$. Observe que a multiplicidade de G_1 é 5.
2. Seja $G_2 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$. Temos que $L_{G_1} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\}$ é o conjunto das lacunas e não existe condutor em G_2. Além disso, G_2 tem multiplicidade 2.

Observe que se representamos um semigrupo da forma

$$G = \{0, g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\},$$

poderia restar dúvidas se os sucessores de g_n, no semigrupo, são todos os naturais maiores que g_n. Para evitar esses equívocos, expressaremos um semigrupo G por meio de seus geradores. Para isso precisamos determinar os geradores desse semigrupo.

Existe uma sequência, chamada sequência de Apéry, que nos ajudar a construir um conceito na direção de um conjunto de geradores de um semigrupo.

Sejam G um semigrupo com condutor c e p qualquer elemento não nulo de G. Tomemos $a_0 := 0$, e indutivamente

$$a_j = mín\left(G \setminus \bigcup_{i=0}^{j-1} (a_i + p\mathbb{N}) \right)$$

para cada j, $1 \leq j \leq p-1$; onde $a_i + p\mathbb{N} = \{a_i + \lambda p : \lambda \in \mathbb{N}\}$. A sequência $a_0 < a_1 < \cdots < a_{p-1}$ é chamada de *Apéry-sequência* em relação a p e o conjunto $A_p = \{a_0,\ a_1,\ \ldots, a_{p-1}\}$ é o *Apéry-conjunto* de G em relação a p.

Seja $G = \{0, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$ um semigrupo com condutor 4 e seja $p = 6 \in G$. Temos pela definição que $a_0 = 0$ e que

$$0 + 6\mathbb{N} = \{0, 6, 12, 18, \ldots\} \Rightarrow a_1 = mín(G \setminus 6\mathbb{N}) = 4;$$

$$4 + 6\mathbb{N} = \{4, 10, 16, 22, \ldots\} \Rightarrow a_2 = mín[G \setminus (6\mathbb{N} \cup (4 + 6\mathbb{N}))] = 5;$$

$$5 + 6\mathbb{N} = \{5, 11, 17, 23, \ldots\} \Rightarrow a_3 = 7;$$

$$7 + 6\mathbb{N} = \{7, 13, 19, 25, \ldots\} \Rightarrow a_4 = 8;$$

$$8 + 6\mathbb{N} = \{8, 14, 20, 26, \ldots\} \Rightarrow a_5 = 9.$$

Logo $0 < 4 < 5 < 7 < 8 < 9$ é a Apéry-sequência e o Apéry-conjunto é $A_6 = \{0, 4, 5, 7, 8, 9\}$.

Observe que cada elemento da Apéry-sequência de G em relação à p é o menor elemento de G em sua classe módulo p. Diremos simplesmente Apéry-sequência de G quando $p = mín(G \setminus \{0\})$.

Desse modo, sendo G um semigrupo com $p \in G$ e $a_0 < a_1 < \cdots < a_{p-1}$ a *Apéry-sequência* de G em relação a p, podemos definir o conjunto $\{p, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}\}$ como um conjunto de geradores G.

1.3 Proposição Sejam G um semigrupo com condutor c, $p \in G \setminus \{0\}$ fixo e $a_0 < a_1 < \cdots < a_{p-1}$ a Apéry-sequência de G em relação à p. Então valem as seguintes propriedades:

$a)$ $a_i \not\equiv a_j (\text{mod}\, p)$ para $0 \leq i \neq j \leq p-1$;

$b)$ $G = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{j-1} (a_i + p\mathbb{N})$;

$c)$ $c = a_{p-1} - p + 1$.

Prova:

a) Sejam a_i e a_j termos da Apéry-sequência de G em relação a p tais que $i \neq j$, isso implica que $a_i + p\mathbb{N} \neq a_j + p\mathbb{N}$, pois $a_i \notin a_j + p\mathbb{N}$ e $a_j \notin a_i + p\mathbb{N}$. Suponha, por absurdo, que $a_i \equiv a_j\ (mod\, p)$, isto é, $a_i - a_j = kp$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Temos duas possibilidades:

Caso I: se $k \geq 0$ então $k \in \mathbb{N}$ e daí $a_i \notin a_j + p\mathbb{N}$.

Caso II: se $k < 0$, basta tomar $a_j = a_i - kp$, daí $-k \in \mathbb{N}$ o que implica que $a_j \notin a_i + p\mathbb{N}$. Em qualquer caso temos uma contradição.

b) Basta observar que para qualquer $z \in G$ existe i tal que $z \equiv a_i\ (mod\, p)$. Então $z \in (a_i + p\mathbb{N})$.

c) Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq a_{p-1} - p + 1$. Observe que n se escreve de maneira única sob a forma $n = a_i + mp$ com $i = 0, 1, \dots, p-1$ e $m \in \mathbb{Z}$. Suponha $m < 0$, então $n \leq a_i - p \leq a_{p-1} - p < n$, contradição. Portanto $m \geq 0$ o que implica que $n \in G$. Como $a_{p-1} - p \notin G$ segue que $c = a_{p-1} - p + 1$. ■

Um sistema de geradores de G pode ser dado por $S = \{x_0, x_1, \dots, x_r\}$ onde $x_0 := m$ e recursivamente $x_j = min(G \setminus < x_0, x_1, \dots, x_{j-1} >)$, para cada $1 \leq j \leq r$. S é chamado de sistema mínimo de geradores de G. Por exemplo, sendo $G = \{0, 3, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, \dots\}$, temos $x_0 = 3$ e, portanto, $x_1 = min(G \setminus < 3 >) = 8$ e $x_2 = min(G \setminus < 3{,}8 >) = \nexists$. Logo, $G =< 3{,}8 >$.

1.4 Proposição Seja $a_0 < a_1 < \cdots < a_{p-1}$ a Apéry-sequência de um semigrupo G. São equivalentes as afirmações:

$a)$ G é gerado por dois elementos;

$b)$ $a_k = ka_1$ para cada $k, 0 \leq k \leq m-1$;

$$(c)\ G = \bigcup_{k=0}^{m-1} (ka_1 + m\mathbb{N}).$$

Prova:

$(a) \Longrightarrow (b)$ Imediata.

$(b) \Longrightarrow (c)$ Sabemos que $G = \bigcup_{k=0}^{m-1}(a_k + m\mathbb{N})$, pela propriedade da Apéry-sequências. Como por (b) vale a igualdade $a_k = ka_1$ para cada k, $0 \leq k \leq m-1$ então

$$G = \bigcup_{k=0}^{m-1}(a_k + m\mathbb{N}) = \bigcup_{k=0}^{m-1}(ka_1 + m\mathbb{N}).$$

$(c) \Longrightarrow (a)$ Seja $x \in G$ qualquer, como $G = \bigcup_{i=0}^{m-1}(ka_1 + m\mathbb{N})$ então existem $0 \leq k \leq m-1$ e $\lambda \in \mathbb{N}$ tais que $x = ka_1 + \lambda m$, para todo $x \in G$. Logo G é gerado por a_1 e m. ■

A seguir definimos um tipo especial de semigrupo.

1.5 Definição Seja G um semigrupo com condutor c. Diz-se que G é simétrico se $\#L_G = \#(G \cap [0, c-1])$, isto é, se o número de elementos de L_G é igual ao número de elementos de $(G \cap [0, c-1])$.

Neste caso $\#L_G = c/2$. De fato, observe que $[0, c-1] = L_G \cup (G \cap [0, c-1])$ e ainda que $L_G \cap (G \cap [0, c-1]) = \emptyset$. Portanto, $\#[0, c-1] = \#[L_G \uplus (G \cap [0, c-1])] = \#L_G + \#(G \cap [0, c-1]) = \#L_G + \#L_G$. Logo $\#L_G = (c/2)$.

A seguir mostramos alguns resultados que nos ajudam a determinar se um semigrupo é simétrico ou não.

1.6 Proposição Um semigrupo com condutor é simétrico se, e só se, $l_g = 2g - 1$.

Prova: Suponha G um semigrupo com condutor c. Seja $L_G = \{l_1, \ldots, l_g\}$ o conjunto das lacunas de G. Se G é simétrico então $2\#L_G = c$ o que implica que $2g = c$ portanto $2g = l_g + 1$. Logo $l_g = 2g - 1$.■

1.7 Proposição Se G é um semigrupo simétrico então para todo $z \in \mathbb{Z}$ tem-se que $z \in G$ se, e somente se, $l_g - z \notin G$.

Prova: Uma prova para essa proposição pode ser encontrada em [5] (Oliveira, pág. 7).

1.8 Proposição Sejam G um semigrupo, $0 = p \in G$ e $a_0 < a_1 < \cdots < a_{p-1}$ a Apéry-sequência de G em relação a p. Então, as afirmações que seguem são equivalentes:

a) G é um semigrupo simétrico.

b) Existe um único $A \in \mathbb{Z}$ tal que para cada par $x, y \in \mathbb{Z}$ tem-se que $x + y = A$ se, e somente se, $(x \in G\ e\ y \notin G)$ ou $(x \notin G\ e\ y \in G)$.

c) Dado $z \in \mathbb{Z}$ tem-se que $z \in G$, se e somente se, $a_{p-1} - p - z \notin G$.

d) $a_{p-1} - a_i \in A_p$ para cada $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.

e) $a_i + a_j = a_{p-1}$ para $0 \leq i, j \leq p-1$ e $i + j = p - 1$.

Prova: Uma prova para essa proposição pode ser encontrada em [5] (Oliveira, pág. 7).

1.9 Proposição Seja G um semigrupo gerado por dois elementos. Então G é simétrico.

Prova: Sejam G um semigrupo gerado por dois elementos e $a_0 < a_1 < \cdots < a_{m-1}$ a Apéry-sequência de G, segue que $a_k = ka_1$ para cada k, $0 \leq k \leq m-1$, pela Proposição 1.4. Afirmamos que $a_{m-1} - a_i \in A_m$, para cada $i = 0, 1, \dots, m-1$. De fato, como G é gerado por dois elementos temos que $a_{m-1} - a_i = (m-1)a_1 - ia_1 = (m-1-i)a_1 = a_{m-1-i} \in A_m$, para todo $i \in \{0,1, \dots, m-1\}$. Portanto, pela Proposição 1.8, G é simétrico. ■

2. Germes de Curvas Planas

Sejam X e Y indeterminadas sobre $\mathbb{C}$. Denotemos por $\mathbb{C}[[X, Y]]$ o conjunto de todas as somas formais do tipo $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i$ onde P_i é um polinômio de grau i nas indeterminadas X, Y com coeficientes em $\mathbb{C}$. Os elementos de $\mathbb{C}[[X, Y]]$ são chamados de séries de potências formais na indeterminadas X, Y com coeficientes em $\mathbb{C}$.

Sejam

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \text{ e } g = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i$$

elementos de $\mathbb{C}[[X, Y]]$. Definimos as seguintes operações:

$$f + g = \sum_{i=0}^{\infty} (P_i + Q_i) \ e \ f \cdot g = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} P_j Q_{i-j}.$$

Com essas operações é fácil verificar que $\mathbb{C}[[X, Y]]$ é um anel comutativo com unidade, chamado *anel das séries formais em duas variáveis com coeficientes em* $\mathbb{C}$.

Considere o anel das séries formais em duas variáveis com coeficientes complexos, $\mathbb{C}[[X, Y]]$. Seja f um elemento de $\mathbb{C}[[X, Y]]$ que satisfaz as seguintes propriedades:

a) f define uma série de potências convergente em uma vizinhança da origem em $\mathbb{C}^2$;

b) f é irredutível em $\mathbb{C}[[X, Y]]$.

A equação $f(X, Y) = 0$ define um *germe de uma curva analítica irredutível.*

Um elemento $u \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ é chamada de uma unidade se $u(0) \neq 0$.

Dois elementos f e g em $\mathbb{C}[[X, Y]]$ são chamados associados se existe uma unidade u em $\mathbb{C}[[X, Y]]$ tal que $f = u \cdot g$.

2.1 Definição Uma curva algebroide plana ou germe de uma curva (f) é a classe de equivalência de um elemento não invertível f de $\mathbb{C}[[X, Y]]\backslash\{0\}$ módulo a relação de associados. Isto é,

$$(f) = \{u \cdot f;\ u \text{ é uma unidade em } \mathbb{C}[[X, Y]]\}.$$

Portanto, por definição, temos $(f) = (g)$ se, e somente se, existe uma unidade $u \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ tal que $g = u \cdot f$.

Um germe de uma curva plana (f) é irredutível se a série de potências formal f é irredutível em $\mathbb{C}[[X, Y]]$.

Representamos por $\langle f \rangle$ o ideal gerado por $f \in \mathbb{C}[[X, Y]]$.

2.2 Definição Seja f um elemento irredutível em $\mathbb{C}[[X, Y]]$. O anel $\mathcal{O} = \mathbb{C}\big[[X, Y]\big]/\langle f \rangle = \mathbb{C}[[x, y]]$ onde x, y são as classes de X, Y em $\mathcal{O}$ é chamado anel local do germe (f).

Seja $\mathcal{O}$ $(= \mathbb{C}[[x, y]])$ o anel local do germe (f). Dizemos que um elemento $q \in \mathbb{C}((x, y))$ é inteiro sobre $\mathcal{O}$ se existe um elemento $g \in \mathcal{O}[Z]$ tal que $g(q) = 0$. O conjunto de todos os elementos do corpo de frações $\mathbb{C}((x, y))$ que são inteiros sobre $\mathcal{O}$ será denotado por $\bar{\mathcal{O}}$, i.e.,

$$\bar{\mathcal{O}} = \{q \in \mathbb{C}((x, y)) : g(q) = 0, \text{para algum } g \in O[Z]\}.$$

Seja $p(Z) \in \mathcal{O}[Z]$ dado como $p(Z) = Z^{\mathrm{n}} + a_1 Z^{\mathrm{n}-1} + \cdots + a_k Z^{n-k} + \cdots + a_{n-1} Z + a_n$ e considere $\frac{g}{h} \in \mathbb{C}((x, y))$. Por definição, temos que $\frac{g}{h} \in \mathcal{O}$ se, e somente se, $p(\frac{g}{h}) = 0$ em $\mathcal{O}$. Ou seja

$$\left(\frac{g}{h}\right)^n + a_1 \left(\frac{g}{h}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \left(\frac{g}{h}\right) + a_n = 0 \Rightarrow$$
$$g^{\mathrm{n}} + a_1 g^{\mathrm{n}-1} h + \cdots + a_{n-1} g h^{\mathrm{n}-1} + a_n h^{\mathrm{n}} = 0.$$

Nesse caso, $\bar{\mathcal{O}}$ é chamado de *fecho inteiro* de $\mathcal{O}$.

Dizemos que dois germes (f) e (g) são equisingulares, denotando por $(f) \equiv (g)$, se e somente se, (f) e (g) são topologicamente equivalentes como germes complexos imersos em $(\mathbb{C}^2, 0)$, isto é, quando existe um homeomorfismo $\varphi: U_f \to U_g$, onde U_f e U_g são vizinhanças da origem em $\mathbb{C}^2$ tal que (f) e (g) são convergentes em U_f e U_g, respectivamente e $\varphi((f) \cap C_f) = (g) \cap U_g$.

O conjunto de todos os germes que são equisingulares um ao outro é chamado de classe equisingular.

Se a transformação φ é um isomorfismo analítico, dizemos que (f) e (g) são analiticamente equivalentes, ou simplesmente equivalentes, denotando por $(f) \sim (g)$. Assim dois germes (f) e (g) são equivalentes se, e somente se, existe um automorfismo φ^* e uma unidade u de $\mathbb{C}[[x, y]]$ tais que $\varphi^*(f) = ug$.

3. Parametrização de Puiseux

Considere uma série formal $f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{ij} x^i y^j \in \mathbb{C}[[x, y]]$ e seja $f(x, y) = 0$ uma equação local para o germe de uma curva plana C.

3.1 Definição Seja C uma curva plana irredutível. Por parametrização de C denotamos um mapa holomorfo

$$\varphi: (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$$

definido por $t \to (x(t), y(t))$ com $\varphi(\mathbb{C}, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ e satisfazendo a seguinte propriedade universal de fatorização: cada mapa holomorfo $\psi: (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$, $\psi(\mathbb{C}, 0) \subset (C, 0)$, é fatorado de maneira única através de φ, isto é, existe um mapa holomorfo $\psi': (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ tal que $\psi = \varphi \circ \psi'$. Se $(C, 0) = (f)$ então chamamos uma parametrização de $(C, 0)$ também de uma parametrização de f.

3.2 Exemplo Seja $f(x,y) = y^2 - x^3$ com $f(x,y) = 0$. Uma parametrização para f pode ser dada por $\phi: (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ definido como $\phi(t) = (t^2, t^3)$. Note que $f(\phi(t)) = f(t^2, t^3) = (t^3)^2 - (t^2)^3 = 0$.

Podemos definir a expansão de Puiseux da seguinte forma:

3.3 Definição Seja $f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{ij} x^i y^j \in \mathbb{C}[[x,y]]$ uma série formal y-geral de ordem n (isto é, $a_{0n} \neq 0$ e $a_{0j} = 0$ para $j < n$). A série $y(x^{\frac{1}{n}}) = \sum a_i x^{\frac{i}{n}}$ é uma expansão de Puiseux para a curva com equação $f(x,y) = 0$.

3.4 Exemplo Seja $f(x,y) = y^3 - x^5 - 3x^4y - x^7 \in \mathbb{C}[[x,y]]$ uma série formal y-geral de ordem 3. A expansão de Puiseux para a curva com equação $f(x,y) = 0$ é $y(x^{1/3}) = x^{5/3} + x^{7/3}$.

O resultado a seguir é um importante e bem conhecido teorema.

3.5 Teorema (*Teorema da Expansão de Puiseux*) Seja $f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{ij} x^i y^j \in \mathbb{C}[[x,y]]$ uma série formal y-geral de ordem n. Então existe $y(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ tal que $f\big(t^n y(t)\big) = 0$. Mais ainda, $t \to (t^n, y(t))$ é uma parametrização de f.

Uma demonstração deste teorema, que segue o método construtivo de Newton, é apresentada em [4] (Greuel, pg. 165).

3.6 Definição A forma paramétrica de $f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{ij} x^i y^j \in \mathbb{C}[[x,y]]$ dada por $x = t^n$ e $y = \sum_{i \geq m} a_i t^i$ é chamada parametrização de Puiseux da curva com equação $f(x,y) = 0$.

A parametrização dada no exemplo 3.2 é de Puiseux, pois f é y-geral de ordem 2. A parametrização de Puiseux da curva dada no exemplo 3.4 é dada por $x = t^3$ e $y = t^5 + t^7$. De fato, observe que

$$\begin{aligned} f(t^3, t^5 + t^7) &= (t^5 + t^7)^3 - (t^3)^5 - 3(t^3)^4(t^5 + t^7) - (t^3)^7 \\ &= (t^5 + t^7)(t^{10} + 2t^{12} + t^{14}) - t^{15} - 3t^{12}(t^5 + t^7) - t^{21} \\ &= t^{15} + 3t^{17} + 3t^{19} + t^{21} - t^{15} - 3t^{17} - 3t^{19} - t^{21} = 0. \end{aligned}$$

4. Semigrupos de Valores

Iniciamos essa seção definindo uma aplicação especial.

4.1 Definição Seja K um corpo. Uma valorização discreta em K, ou simplesmente uma valorização, é uma função $\nu : K \backslash\{0\} \to \mathbb{Z}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $\nu(x \cdot y) = \nu(x) + \nu(y)$;

(2) $\nu(x + y) \geq min\{\nu(x), \nu(y)\}$;

(3) Existe $z \in K$ tal que $\nu(z) = 1$.

Pelas condições (1) e (3), segue imediatamente que $\nu : K\backslash\{0\} \to \mathbb{Z}$ é sobrejetiva. Decorre de (1) que $\nu(1) = 0$.

Pode-se definir a valorização também como $\nu : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Nesse caso, por definição teremos que $\nu(0) = \infty$.

O conjunto de elementos $x \in K$ tal que $\nu(x) \geq 0$ é um anel chamado anel de valorização ν (cf. , pg. 33). Para cada $x \in K$ temos $\nu(x) \geq 0$ ou $\nu(x) \leq 0$, i.e., $\nu(x^{-1}) \geq 0$, portanto x ou x^{-1} pertence a um anel de valorização.

Sabe-se que $\bar{\mathcal{O}}$ é um anel de valorização sob seu corpo de frações $\mathbb{C}((x, y))$.

Sabe-se que qualquer germe é equivalente a um germe com uma parametrização de Puiseux. Por isso, a partir de agora, assumimos φ como uma parametrização de Puiseux de um germe (f), isto é,

$$\varphi(t) = \left(t^{\mathrm{n}}, \sum_{i \geq m} a_i t^i\right)$$

onde $f \circ \varphi(t) = 0$.

A parametrização de Puiseux induz um homomorfismo $\varphi^*: \mathcal{O} \to \mathbb{C}[[t]]$ onde $\varphi^*(h) = h \circ \varphi^*(t)$ e $\mathcal{O}$ é o anel local do germe (f).

4.2 Definição Seja φ uma parametrização de Puiseux de um germe (f). Uma valorização natural sobre o fecho inteiro $\bar{\mathcal{O}}$ (lembrando que $\bar{\mathcal{O}}$ é um anel de valorização) é definida como $\nu: \bar{\mathcal{O}}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ onde $\nu(h) = ord_t h(\varphi(t))$.

Segue da definição que $\nu(u) = 0$ onde u é uma unidade em $\bar{\mathcal{O}}$.

4.3 Proposição Sejam $g, h \in \bar{\mathcal{O}}$. Se $\frac{g}{h} \in \bar{\mathcal{O}}$ então $\nu(g) \geq \nu(h)$.

Prova. Reduzindo ao absurdo, suponha que $\nu(g) < \nu(h)$. Assim $\nu(g^{\mathrm{n}}) = n \cdot \nu(g)$ e $\nu(a_k g^{n-k} h^k) = \nu(a_k) + (n-k) \cdot \nu(g) + k \cdot \nu(h)$, com $k = 1, \dots, n$. Como $\nu(g) < \nu(h)$ então para todo $k = 1, \dots, n$, temos

$$\begin{gathered}\nu(a_k) + (n-k) \cdot \nu(g) + k \cdot \nu(h) \ = \\ = \nu(a_k) + n \cdot \nu(g) - k \cdot \nu(g) + k \cdot \nu(h) > \\ > \nu(a_k) + n \cdot \nu(g) - k \cdot \nu(h) + k \cdot \nu(h) = \\ = \nu(a_k) + n \cdot \nu(g) \geq n \cdot \nu(g) = \nu(g^{\mathrm{n}})\end{gathered}$$

Isso implica que $\nu(g^n + a_1 g^{n-1} h + \cdots + a_{n-1} g h^{n-1} + a_n h^n) = \nu(g^{\mathrm{n}}) = n \cdot \nu(g)$, contradição, pois $\nu(g^n + a_1 g^{n-1} h + \cdots + a_{n-1} g h^{n-1} + a_n h^n) = \nu(0) = \infty$.■

Portanto, podemos definir uma aplicação de valorização sobre $\mathcal{O}$, a saber,

$$\nu_\varphi : \mathcal{O} \backslash \{0\} \to \mathbb{N}$$

definida como $\nu_\varphi(h) = ord_t(\varphi^*(h))$.

O subconjunto dos naturais dado por $\Gamma = \nu_\varphi(\mathcal{O} \backslash \{0\})$ é um semigrupo dos naturais.

De fato, observe que $0 \in \Gamma$, pois $\mathcal{O}$ é um anel comutativo com unidade e $\nu_\varphi(1) = 0$. Sejam $\nu_\varphi(g), \nu_\varphi(h) \in \Gamma$, $g, h \in \mathcal{O} \backslash \{0\}$, por definição temos $\nu_\varphi(g \cdot h) = \nu_\varphi(g) + \nu_\varphi(h)$. Como $g \cdot h \in \mathcal{O} \backslash \{0\}$ segue que $\nu_\varphi(g) + \nu_\varphi(h) = \nu_\varphi(g \cdot h) \in \Gamma$. Portanto Γ é um semigrupo dos naturais.

4.4 Definição O semigrupo dos naturais $\Gamma = \nu_\varphi(\mathcal{O} \backslash \{0\})$ é chamado de *semigrupo de valores* associado à curva $f = 0$.

4.5 Exemplo Se $f = Y^2 - X^3$ então uma parametrização de Puiseux para o germe (f) é $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ definido como $\varphi(t) = (t^2, t^3)$. Veja que $\nu_\varphi(X) = ord_t(\varphi^*(X)) = ord_t(t^2) = 2$ e que $\nu_\varphi(Y) = ord_t(\varphi^*(Y)) = ord_t(t^3) = 3$. Uma vez que qualquer número natural l pode ser escrito como $l = 2a + 3b$, com $a, b \in \mathbb{N}$, podemos concluir que $\Gamma = \{0,2,3,4,5, \dots\}$ é o semigrupo de valores associado ao germe $f = 0$. Como a multiplicidade de Γ é 2 segue que seu conjunto mínimo de geradores é dado por $\{2,3\}$ (lembre-se que podemos encontrar esse conjunto via sequência de Apéry), portanto $\Gamma = \langle 2,3 \rangle$.

4.6 Exemplo Seja $f(X,Y) = Y^3 - X^3Y^3 - X^5 + X^8$. Já que $X = t^3$ e $Y = t^5$ é a parametrização de Puiseux do germe (f), então temos $\nu_\varphi(X) = ord_t(\varphi^*(X)) = ord_t(t^3) = 3$ e que $\nu_\varphi(Y) = ord_t(\varphi^*(Y)) = ord_t(t^5) = 5$. Agora, é fácil escrever qualquer número natural $l > 7$ como $l = 3a + 5b$, com $a, b \in \mathbb{N}$. Portanto, $\Gamma = \{0,2,3,4,5, \ldots\} = \langle 3,5 \rangle$.

Considerações Finais

Vemos assim que se um germe de uma curva plana irredutível pode ser representado por uma parametrização de Puiseux então é possível encontrar seu semigrupo associado. Isso muitas vezes é trabalhoso e cansativo, mas podemos lançar mão do uso de algoritmos para o cálculo de semigrupos associados a germes de curvas. Em [3] (pg. 25), Hernandes mostra que é possível, por meio de algoritmos, determinar o semigrupo de valores associado a um germe de uma curva.

O estudo local de uma singularidade isolada se mostra ainda hoje um campo vasto para pesquisa e com muitas questões sem respostas. Por exemplo, como decidir se dois germes de curvas analíticas irredutíveis planas equisingulares são analiticamente equivalentes; ou seja, como decidir se algum dos homeomorfismos θ que realizam a equivalência topológica é um isomorfismo analítico? Tal questão central da teoria de curvas irredutíveis planas ainda permanece aberta.

Na direção de uma resposta e esta e outras questões K. Brauner, W. Burau e O. Zariski, em 1930, mostraram que duas curvas planas irredutíveis são topologicamente equivalentes (equisingulares) se, e somente se, elas têm o mesmo semigrupo de valores. Isso demonstra a importância da aplicação da teoria dos semigrupos.

Referências Bibliográficas

[1] Fulton, W. *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*. Versão digital, 2008.

[2] Hefez, A. *Irreducible Plane Curve Singularities. In Real and Complex Singularities*. D. Mond and M. J. Saia, Editors, Lecture Notes in Pure and Applied Math. Vol. 232, Marcel Dekker, 1-120, 2003.

[3] Hernandes, M. *Métodos Computacionais na Teoria de Curvas Algebróides Irredutíveis.* Tese de Doutorado, ICMC-USP, 2001.

[4] Greuel, G.-M. & Lossen, C. & Shustin, E. *Introduction to singularities and deformations*. Springer, 2007.

[5] Oliveira, L. N. *Caracterização dos Germes de Curvas Planas Irredutíveis com Torção Maximal*. Dissertação de Mestrado: UFES, 2011.

[6] Zariski, O. & Samuel, P. *Commutative Algebra*. Vol I, by D. Van Nostrand Company, Inc., 1958.

Universidade Federal do Acre, Rio Branco - AC, Brasil
E-mail address: leandroner@gmail.com
URL: www.ufac.br