UMA DEMONSTRAÇÃO ALTERNATIVA DE UM RESULTADO DE HERMANN HEINEKEN SOBRE GRUPOS QUE SATISFAZEM A TERCEIRA CONDIÇÃO DE ENGEL

Sérgio Brazil Júnior

Resumo

Um grupo G é dito grupo Engel se para cada $x, y \in G$ existe $n \in \mathbb{N}$, n dependendo de x e y, tal que $[\underbrace{x, x, \dots, x}_{n\ vezes}, y] = 1$. Se n pode ser escolhido independente de x e y, dizemos que G é um grupo satisfazendo a n-ésima condição de Engel e o denotaremos por $\mathcal{E}_n$-grupo. Hermann Heineken , em 1961, mostra em seu artigo *Engelsche Elemente der Länge Drei*, além de muitos resultados relevantes sobre os $\mathcal{E}_3$-grupos , que se G é um grupo satisfazendo a terceira condição de Engel, então todo subgrupo gerado por dois elementos é metabeliano e nilpotente de classe no máximo 4. Este não é o principal resultado de Heineken sobre os $\mathcal{E}_3$-grupo, no entanto, nosso objetivo no presente trabalho é apresentar uma demonstração alternativa e bem mais simples desse resultado.

Abstract

A group G is considered an Engel's group if for each $x, y \in G$ exist $n \in \mathbb{N}$, n depending on the x e y , such as $[\underbrace{x, x, \dots, x}_{n\ times}, y] = 1$. If n can be chosen independent on the x and y, we say that G is a group satisfying the n^{th} condition of Engel and we will denote by $\mathcal{E}_n$-group. Hermann Heineken, in 1961, shows in his article *Engelsche Elemente der Länge Drei*, besides many relevant results about $\mathcal{E}_3$-groups, that if G is a group satisfying Engel's third condition, so all subgroup generated by two elements is metabelian and nilpotent of class at most 4. This is not the main result in Heineken's about the $\mathcal{E}_3$ -groups, nonetheless, our objective in the present work is to present an alternative and even simpler demonstration of this result.

Palavras Chaves: Grupos, 3ª Condição de Engel.

1. Introdução

Um grupo G é dito nilpotente de classe no máximo n se $[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] = 1$, para todo $x_i \in G, i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. Se para todo subconjunto finito X de G o subgrupo $\langle X \rangle$, é nilpotente, dizemos que G é localmente nilpotente. Um grupo G é dito grupo Engel se para cada $x, y \in G$ existe $n \in \mathbb{N}$, n dependendo de x e y, tal que $[\underbrace{x, x, \dots, x}_{nvezes}, y] = 1$. Se n pode ser escolhido independente de x e y, dizemos que G é um grupo satisfazendo a n-ésima condição de Engel e o denotaremos por $\mathcal{E}_n$-grupo. Claramente, grupos localmente nilpotentes são grupos de Engel, assim como grupos nilpotentes de classe no máximo n são $\mathcal{E}_n$-grupo. Dado isto, surgem, naturalmente, três questões:

1) Todo $\mathcal{E}_n$-grupo é nilpotente?
2) Todo grupo de Engel é localmente nilpotente?
3) Todo $\mathcal{E}_n$-grupo é localmente nilpotente?

A resposta para as duas primeiras questões é negativa, veja o exemplo de K. Weston em Brazil (1997), página 16 e Golod (1966), respectivamente. Apesar disto existem classes importantes de grupos onde a condição de Engel implica em nilpotência local. Zorn (1936) mostra esta implicação na classe dos grupos finitos, Gruenberg (1953), na classe dos grupos solúveis e Baer (1957), na classe dos grupos com a condição maximal. Apesar de muito esforço nesta área, a terceira questão, ainda, é um problema em aberto. Porém, para o caso onde o grupo é residualmente finito, esta questão foi respondida positivamente por Wilson (1991). A resposta, para esta questão, também é positiva para os casos onde $n \leq 3$. Brazil (1997) faz um estudo aprofundado sobre os $\mathcal{E}_2$-grupos, $\mathcal{E}_3$-grupos, demonstando os resultados dados por Levi (1942), no caso dos $\mathcal{E}_2$-grupos, e os resultados dados por Heineken (1961) e L. Kappe e W. Kappe (1972), sobre os $\mathcal{E}_3$-grupos. Ainda neste mesmo trabalho, faz um estudo sobre os resultados dados por Traustason (1995), que trata dos $\mathcal{E}_4$-grupos.

Heineken (1961) mostra em seu artigo *Engelsche Elemente der Länge Drei*, além de muitos resultados relevantes, que se G é um $\mathcal{E}_3$-grupo, então todo subgrupo gerado por dois elementos é metabeliano e nilpotente de classe no máximo 4. Nosso objetivo no presente trabalho é apresentar uma demonstração alternativa e bem mais simples desse resultado.

2. Preliminares

Definição 1: Seja G um grupo e x, y elementos de G. Definimos o comutador de x e y como sendo o elemento

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^{y}.$$

O seguinte lema segue imediatamente da definição acima.

Lema 1: Seja G um grupo e x, y, z elementos de G. Então

i) $x^y = x[x, y]$;

ii) $xy = yx[x, y] = [x^{-1}, y^{-1}]yx$;

iii) $[x, y] = [y, x]^{-1} = [y^{-1}, x]^y = [y, x^{-1}]^x$;

iv) $[x, y]^z = [x^z, y^z]$;

v) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$;

vi) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$;

vii) $[x, [y, z^{-1}]]^z\, [z, [x, y^{-1}]]^y[y, [z, x^{-1}]]^x = 1$ **(Identidade de Hall-Witt)**

O subgrupo

$$G^{'} = [G, G] = \langle [x, y] |\, x, y \in G \rangle$$

é chamado de subgrupo comutador ou derivado de G.

Definimos, também, comutadores simples normado à direita de peso ≥ 2, recursivamente por

$$[x_{1,} x_2, \dots, x_n] = [x_1, [x_2, \dots, x_n]].$$

Definição 2: Um grupo G é dito nilpotente de classe no máximo n se

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] = 1,$$

para todo $x_i \in G, i \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$.

Definição 3: Um grupo G é dito metabeliano, se existe N abeliano, $N \lhd G$ com G/N abeliano.

A definição 3 acima, obviamente, implica que G é metabeliano se, e somente se, G' é abeliano.

Definição 4: Um grupo G é dito grupo Engel se para cada $x, y \in G$ existe $n \in \mathbb{N}$, n dependendo de x e y, tal que

$$[\underbrace{x, x, \dots, x}_{nvezes}, y] = 1.$$

Se n pode ser escolhido independente de x e y, dizemos que G é um grupo satisfazendo a n-ésima condição de Engel e o denotaremos por $\mathcal{E}_n$-grupo.

3. Resultados relevantes relacionando os $\mathcal{E}_n$-grupo, $n = 1, 2, 3, 4$ e nilpotência.

O caso em que $n = 1$ é trivial, uma vez que os $\mathcal{E}_1$-grupos são exatamente os grupos abelianos.

No caso $n = 2$, Levi, em 1942, mostrou que os $\mathcal{E}_2$-grupos são nilpotentes de classe no máximo 3.

Para o caso $n = 3$, Heineken, em 1961, deu uma contribuição muito importante, provando que todo $\mathcal{E}_3$-grupo é localmente nilpotente e, ainda, que um $\mathcal{E}_3$-grupo é nilpotente de classe no máximo 4, se este não possuir elementos de ordem 2 ou 5. Em 1971, Bachmuth e Mochizuki construíram exemplos de 2-grupos e 5-grupos, satisfazendo a terceira condição de Engel, que não são nilpotentes. Ainda para $n = 3$, L. Kapper e W. Kapper, em 1972, deram uma caracterização para os $\mathcal{E}_3$-grupos, mostrando que são equivalentes as seguintes afirmações:

(1) Classe de nilpotência de $\langle x^G \rangle$ é no máximo 2, para todo $x \in G$;

(2) $\langle x^G \rangle$ é um $\mathcal{E}_2$-grupo, para todo $x \in G$;

(3) Gé um $\mathcal{E}_3$-grupo.

Demonstrando, com isso, que um $\mathcal{E}_3$-grupo com n geradores possui classe de nilpotência no máximo $2n$.

Os primeiros resultados relevantes sobre os $\mathcal{E}_4$-grupos apareceram em 1994 e são devidos a Vaughan-Lee e Gunnar Traustason. Este último contribuiu com o estudo dos $\mathcal{E}_4$-grupos, mostrando que, se Gé um $\mathcal{E}_4$-grupo, então, os elementos de torção formam um subgrupo, e que o quociente de tal subgrupo pelo seu centro é um produto de p-grupos. Mostrou, ainda, que, se Gé um 2-grupo ou 3-grupo, satisfazendo a quarta condição de Engel, então G é localmente finito. Além disso, se Gé um p-grupo, onde p é um primo diferente de 2 ou 3, e $rad(G)$ é o radical localmente nilpotente de G, então $G/rad(G)$ possui expoente dividindo p. Vaughan-Lee, em 1997, mostra que os $\mathcal{E}_4$-grupos de expoente 5 são localmente finitos.

Para os casos onde $n > 4$, não sabemos se existem resultados relevantes. O que podemos observar é que o nível de dificuldade aumenta quando n cresce.

A seguir apresentaremos uma demonstração alternativa e bem mais simples de um resultado de Heineken sobre o $\mathcal{E}_3$-grupos. Para tanto, seja o seguinte

Lema2: Se Gé um $\mathcal{E}_3$-grupo e $a, b \in G$, então $\big[[a,b],[a,b],a\big] = 1$

Demonstração: Sendo G um $\mathcal{E}_3$-grupo, temos

$$
\begin{aligned}
1 &= [a, a, a, b^{-1}] \\
&= \left[a, a, a^{-1}a^{b^{-1}}\right] \\
&= [a, a, a^{b^{-1}}] \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Conjugando por b, obtemos

$$
\begin{aligned}
1 &= [a^b, a^b, a] \\
&= [a^b, [a, b], a] \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Porém,

$$
\begin{aligned}
\left[[a, b], [a, b], a\right] &= [a^{-1}a^b, [a, b], a] \\
&= [a^{-1}, [a, b], a]^{a^b}[a^b, [a, b], a] \\
&= [a^{-1}, [a, b], a]^{a^b} \qquad \text{por} \quad (2) \\
&= [a^{-1}, [a, a, b]^{-1}]^{a^b} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

■

Uma conseqüência imediata do Lema1 acima é que $[a, b]$comuta com $[a, b]^a$.

Agora estamos em condições de demonstrar o seguinte

Teorema: Se G é um $\mathcal{E}_3$-grupo e $a, b \in G$, então $\langle a, b\rangle$ é metabeliano e nilpotente de classe no máximo 4.

Demonstração: Mostraremos, primeiramente, que

$$\langle a, b\rangle' = \langle [a, b], [a, b]^a, [a, b]^b, [a, b]^{ab}\rangle$$

e é abeliano.

Claramente, $H = \langle [a, b], [a, b]^a, [a, b]^b, [a, b]^{ab}\rangle \leq \langle a, b\rangle'$, uma vez que $[a, b] \in \langle a, b\rangle' \trianglelefteq \langle a, b\rangle$. Já que $\langle a, b\rangle'$ é o fecho normal de $[a, b]$ em $\langle a, b\rangle$, basta mostrar que $H \trianglelefteq \langle a, b\rangle$. Ora, isso é conseqüência das relações abaixo, observando que estas seguem utilizando naturalmente o Lema 1 e usando, algumas vezes, u^{g+h} como notação abreviada para $u^g.u^h$. Isto quer dizer que $u^{(g+h)}.u^{(p+q)} = u^{(g+h)p}.u^{(g+h)q}$ o qual, não necessariamente, é igual a $u^{g(p+q)}.u^{h(p+q)}$.

$$
\begin{aligned}
&[a, b]^{a^{-1}} = [a, b]^{-a+2}; \\
&[a, b]^{b^{-1}} = [a, b]^{-b+2}; \\
&[a, b]^{a^2} = [a, b]^{2a-1}; \\
&[a, b]^{b^2} = [a, b]^{2b-1}; \\
&[a, b]^{ab^{-1}} = [a, b]^{b^{-1}}[a, b][a, b]^{-ab}[a, b]^{-1}[a, b]^{2a}[a, b]^{-b^{-1}};
\end{aligned}
$$

$$[a,b]^{ba} = [a,b][a,b]^{ab}[a,b]^{-1};$$
$$[a,b]^{ba^{-1}} = [a,b]^{-a^{-1}}[a,b]^{-ab}[a,a^b]^{2b}[a,b]^{a^{-1}};$$
$$[a,b]^{aba} = [a,b][a,b]^{2ab}[a,b]^{-b}[a,b]^{-1};$$
$$[a,b]^{aba^{-1}} = [a,b]^{-a^{-1}}[a,b]^{b}[a,b]^{a^{-1}};$$
$$[a,b]^{abb} = [a,b]^{-b}[a,b]^{2ab}[a,b]^{-1}[a,b]^{-a}[a,b]^{1+b}.$$

Do Lema 2, temos que $[a,b]$ comuta com $[a,b]^a$ e $[a,b]^b$.

Trocando a por ab, no Lema 1, temos que $[a,b]$ comuta com $[a,b]^{ab}$.

Logo $[a,b] \in Z(\langle a,b\rangle')$, que é característico em $\langle a,b\rangle'$ e, daí, $Z(\langle a,b\rangle') \trianglelefteq \langle a,b\rangle$, o que acarreta $\langle a,b\rangle'$ abeliano e, portanto, $\langle a,b\rangle$ metabeliano.

Claramente,

$$[b,a,a,b] \in Z(\langle a,b\rangle) \tag{1}$$

e

$$[b,b,a,b] = [b,b,b,a]^{-1} = 1 \tag{2}$$

Para mostrarmos que $\langle a,b\rangle$ é nilpotente de classe no máximo 4, demonstraremos que

$$[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5] = 1$$

para $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \in \{a,b\}$.

O que ocorre, realmente por (1) e (2), logo $\langle a,b\rangle$ é nilpotente de classe no máximo 4.

■

Essa demonstração foi concebida na elaboração da dissertação de mestrado do autor deste texto, em 1997, na Universidade de Brasília-UnB, sob a orientação do Professor Pavel Shumyatsky.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACHMUTH, S. and MOCHIZUKI, H. Y.. **Third Engel Groups and the Macdonald-Neumann Conjecture**, Bull. Austral. Math. Soc. 5 (1971), 379-386.

BAER, R..**Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen**, Math. Ann. 133 (1957), 256-270.

BRAZIL, SÉRGIO JUNIOR. **Condição de Engel em Teoria dos Grupos,** Dissertação de Mestrado, UnB, (1997).

GOLOD, E. S.. **Some Problems de Burnside Type**, in "Proc. Int. Congr. Math., Moscow, 1966", pp. 284-289, 1968; Englisch Translation, in Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol.84, pp. 83-88, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.

GRUENBERG, K. W.. **Two Theorems on Engel Groups**, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 49 (1953), 377-380.

HEINEKEN, H. **Engelsche Elemente der Länge Drei**, Illinois J. Math. 5 (1961), 681-707.

KAPPE, L. C. and KAPPE, W. P.. **On Three-Engel Groups**, Bull. Austral. Math. Soc. 7 (1972).

LEVI, F. W.. **Groups in Which the Commutator Operation Satisfies Certain Algebraic Conditions**, J. Indian Math. Soc. 6 (1942), 87-97.

TRAUSTASON, G.. **On 4-Engel Groups**, J. Algebra 178 (1995), 414-429.

VAUGHAN-LEE, M. R.. Engel-4 Groups of exponent 5, Proc. London. Math. Soc. (3) 74 (1997), 306-334.

WILSON, J. S.. **Two Generator Conditions for Residually Finite Groups**, Bull. London Math. Soc. 23 (1991), 239-248.

ZORN, M.. **Nilpotency of Finite Groups**, Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936), 485-486.

Sérgio Brazil Júnior
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Universidade Federal do Acre
Rio Branco Acre
sbrazil@ufac.br
(68)9984-1922