Revista Elementos • 2ª edição • ano 2012 • 17-26

Revista ELEMENTOS

De Grupos a Álgebras de Lie: um passeio entre as estruturas algébricas

Antonio Carlos Tamarozzi
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Marco Antonio Travassos
Bolsista do programa PET/Matemática - UFMS/CPTL

Thiago Mariano Viana
Bolsista do programa PET/Matemática-UFMS/CPTL

Resumo

Neste trabalho apresentamos um relato de experiências que vivenciamos na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), no Campus de Três Lagoas, frente a um Programa de Ensino Tutorial (PET), tendo como meta pesquisar as estruturas algébricas mais comuns no ensino de graduação em matemática em nosso país descrevendo suas inter-relações.

Abstract

We present an account of experiences that we experience at the Federal University of Mato Grosso do Sul (UFMS), Three Ponds Campus, opposite a Tutorial Education Program (TEP), aiming to research the algebraic structures more common in teaching degree in mathematics in our country, describing their interrelations.

Palavras Chaves: Estruturas algébricas, álgebra de Lie, colchete e módulos.

Introdução: Justificativa e Objetivos

Em geral, os cursos de Matemática das universidades brasileiras possuem uma grande curricular, na qual, os conteúdos de Álgebra são distribuídos entre duas disciplinas de Álgebra Abstrata e uma disciplina de Álgebra Linear. Enquanto que a Álgebra Abstrata explora as estruturas algébricas de grupos, anéis e corpos, a álgebra linear se ocupa dos espaços vetoriais, operadores lineares e de suas representações. Mesmo em cursos de bacharelado, salvo raras exceções, a limitação da carga-horária impõe que os conteúdos da álgebra abstrata e da álgebra linear sejam abordados de maneira estanque, sem apresentar e explorar as inter-relações entre eles. Apenas para citar um exemplo, uma breve consulta na bibliografia comumente utilizada nas disciplinas de álgebra linear revela que os livros definem um espaço vetorial sem mencionar que, na verdade, trata-se de um grupo aditivo com uma "operação (externa) de multiplicação por escalar" proveniente de um corpo que é outra estrutura algébrica. Nessa linha de estudo, perdemos, portanto, oportunidades de simplificar abordagens, investigar relações e explorar aplicações advindas de conteúdos anteriormente estudados.

Na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS) – Campus de Três Lagoas, temos implantado um programa de ensino tutorial PET, na área de Matemática, (PET/MAT UFMS CPTL).

Uma atividade de pesquisa, que tem implicações relevantes também para o ensino de Matemática, notadamente em álgebra, foi proposta como trabalho para alguns dos membros desse programa que são coautores deste trabalho. A atividade consiste em pesquisar as estruturas algébricas mais comuns de maneira construtiva, descrevendo suas inter-relações. Dessa forma, foram apresentadas as definições clássicas desde grupos até álgebras de Lie, de maneira gradual, de modo que os elementos das estruturas apresentadas depois da descrição de um grupo sejam obtidos a partir das estruturas anteriores.

Fundamentos Teóricos – Metodológicos

A estratégia de estudo usada no programa tutorial que nos levou a escrever este pequeno relato baseou-se em discussões coletivas e individuais, mas regulares em torno de um único propósito: descrever em detalhes algumas estruturas algébricas importantes relacionando-as sempre que possível.

Os conhecimentos científicos trabalhados aqui foram desenvolvidos de acordo com o pensamento de Vygotsky, partindo de uma sistematização de propriedades dos objetos matemáticos. Concordamos que se faz necessário possibilitar ao aluno a apropriação da forma sistematizada de pensamento e de linguagem. Aproveitar as experiências já vividas ou adquiridas por eles para alcançar níveis mais complexos de abstração. Sendo essa uma relação fundamental para o processo de aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Entendendo que o conhecimento é uma herança ou um patrimônio aos quais os cidadãos têm direto, que é o que lhe encoraja na busca do entendimento das proposições e conhecimento das ciências, realizamos nossos estudos acreditando, como o suíço Jean Piaget, que o principal objetivo da educação é tornar os indivíduos capazes de fazer coisas novas e não simplesmente repetir o que já foi feito.

Ações desenvolvidas

Inicialmente realizamos um levantamento bibliográfico dos principais livros-texto utilizados nas disciplinas de álgebra dos cursos de Matemática das universidades brasileiras. No momento seguinte verificamos em que ordem esses livros apresentam as definições das estruturas algébricas e relacionamos a essas alguns conceitos não convencionais como módulo, álgebra e álgebras de Lie.

A partir de estudos individuais, estudos em grupo, apresentação de seminários e resolução de problemas relacionados com a teoria estudada, foram destacadas algumas técnicas comuns na descrição das estruturas estudadas, como por exemplo, a determinação de quocientes e a ação de automorfismos. Nossas argumentações se referem às estruturas algébricas que descrevemos a seguir.

1. Grupos, anéis e corpos.

A estrutura de Grupo é fundamental na Álgebra Abstrata, sendo que outras estruturas algébricas importantes podem ser descritas a partir da mesma.

Dados G um conjunto não vazio e uma operação $*: G \times G \to G$. Dizemos que G é um ***grupo*** se $*$ satisfaz as seguintes condições:

i) Associatividade, isto é, $a * (b * c) = (a * b) * c;\ \forall a, b, c \in G$.

ii) Existe um elemento neutro, isto é, $\exists e \in G$ tal que $a * e = e * a; \forall a \in G$.

iii) Todo elemento possui um elemento inverso, isto é, $\forall a \in G, \exists b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$.

Dizemos que o grupo G é *abeliano* ou *comutativo* se valer:

iv) Comutatividade, isto é, $a * b = b * a;\ \forall a, b \in G$.

Podemos observar facilmente que na estrutura de um grupo temos que:

1) O elemento neutro é único.

2) O elemento inverso é único.

Consideremos G um grupo abeliano aditivo. Se definirmos em G uma nova operação $\cdot$, que admite as propriedades associativa e distributiva em relação à operação (de adição) que define esse grupo, obteremos a estrutura denominada ***anel***. Formalmente, dado $(G, +)$ um grupo abeliano, no qual pode ser definida outra operação $\cdot$, diremos que G é um anel se a operação $\cdot$ verifica as seguintes propriedades:

i) Associatividade, isto é, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c;\ \forall a, b, c \in G$.

ii) A operação $\cdot$ é distributiva em relação à operação $+$, isto é, $\forall a, b, c \in G$, vale que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Por uma questão de simplicidade de representação e linguagem, as operações $+$ e $\cdot$ são chamadas adição e multiplicação, respectivamente, e utilizaremos ab para denotar. $a \cdot b$. Assim, todo anel é um grupo relativo à operação de adição.

Ainda no caso acima, em que G um grupo abeliano aditivo, consideremos 0 o elemento neutro com relação à operação de adição de G. Se o conjunto $G \setminus \{0\}$, munido da operação de multiplicação, formar um grupo abeliano, e valer a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, teremos uma estrutura que chamamos de ***corpo***.

2. Espaços vetoriais e Módulos

Sejam V um conjunto não vazio e K um corpo. Suponhamos que possam estar definidas as seguintes operações: $+: V \times V \to V$, que a cada par de vetores $(u, v) \in V \times V$ associa o vetor soma de u e v, $u + v \in V$ e $\cdot : K \times V \to V$ que a cada elemento $k \in K$ e cada vetor $v \in V$ associa o vetor $kv \in V$. Denominamos V como um ***espaço vetorial*** sobre o corpo K se,

i) $(V, +)$ é um grupo abeliano e valem as seguintes condições: $\forall a, b \in K$ e $\forall u, v \in V$,

ii) $a(b \cdot v) = (ab) \cdot v$

iii) $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$

iv) $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$

v) $1 \cdot v = v$, onde 1 denota o elemento neutro da multiplicação de K.

Os elementos do corpo K são chamados *escalares* enquanto os elementos de V são chamados *vetores*.

A estrutura de ***Módulo*** é uma generalização de Espaço vetorial, onde restringimos os escaleres a um anel. Assim, dado R um anel qualquer, um conjunto não vazio M é dito um ***R - Módulo*** ou um ***módulo sobre R***, se M é um grupo abeliano aditivo e são satisfeitas as condições: $\forall r, s \in R$ e $\forall a, b \in M$

i) $r(a + b) = ra + rb$

ii) $r(sa) = (rs)a$

iii) $(r + s)a = ra + sa$

Se R possuir elemento unidade 1 e $1 \cdot m = m$ para qualquer elemento $m \in M$, então M é denominado um *R - Módulo unitário*. Notemos que se R for um corpo, um *R - Módulo unitário* é *R – espaço vetorial*.

Os seguintes exemplos apontam importantes casos de módulos:

2.1. Exemplos

2.1.1. Todo grupo abeliano A é um módulo sobre o anel dos inteiros. De fato, basta observarmos que para quaisquer $z \in \mathbb{Z}$ e $a \in A$, temos $za = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{z\ vezes}$, se $z \geq 0$ e $za = \underbrace{(-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_{z\ vezes}$, se $z < 0$.

2.1.2. Todo anel R é um R – módulo sobre si mesmo. De fato, na definição de módulo dada acima, devemos ter que $\forall r, m \in R$, $rm \in R$ e que valem as três propriedades i), ii) e iii) dadas. Mas estas condições decorrem imediatamente do fato de R ser um anel.

3. Álgebras

Seja V um $K -$ *espaço vetorial*. Existem espaços vetoriais sobre um corpo K, nos quais a multiplicação de vetores pode ser também realizada. Isto ocorre, particularmente quando V for também um anel.

Uma ***álgebra*** *sobre um corpo* K é um espaço vetorial V com uma operação binária de multiplicação de vetores, que satisfaz: $\forall x, y, z \in V$ e $\forall a, b \in K$,

i) $x(y + z) = xy + xz$ e $(x + y)z = xz + yz$

ii) $(ax)(by) = (ab)(xy)$.

Quando vale a propriedade associativa da multiplicação numa álgebra V, dizemos que essa ***álgebra é associativa***. Ou seja, diz-se que V é uma *álgebra associativa*, se para quaisquer $x, y, z \in V$ valer que $x(yz) = (xy)z$.

Quando a álgebra é associativa, podemos sem ambigüidade denotar produtos triplos como $x(yz)$ e $(xy)z$ simplesmente por xyz. Uma álgebra V é dita ser uma ***álgebra comutativa*** ou uma *álgebra abeliana* se para todos $x, y \in V$ tivermos que $xy = yx$.

3.1. Exemplos

3.1.1. Seja $V = M_n(\mathbb{R})$, o espaço das matrizes quadradas de ordem n com entradas reais. Então V é uma álgebra associativa sobre o corpo K, onde a operação de multiplicação é a multiplicação usual de matrizes. Notemos que este é um exemplo de álgebra associativa, mas não comutativa.

3.1.2. Seja V o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes sobre um corpo K, então V é uma *álgebra comutativa* sobre o corpo K, onde a multiplicação é a multiplicação de polinômios.

4. Álgebras de Lie

Agora vamos definir e explorar as propriedades de uma classe especial de álgebra, a chamada *Álgebra de Lie*, que tem definição baseada no conceito de *colchete de Lie*.

Uma ***álgebra de Lie*** é um $K-$*espaço vetorial* L munido de uma operação binária $[\ \ ]: L \times L \to L$ tal que a cada par (x, y) associa o elemento $[x, y]$ chamado *colchete de Lie*, que satisfaz as seguintes propriedades: $\forall a, b \in K$ e $\forall x, y, z \in L$,

i) o colchete de Lie é bilinear, isto é,

$$[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z] \text{ e } [z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y].$$

ii) o colchete de Lie é anti-simétrico, isto é, sempre temos $[x, x] = 0$.

iii) Vale a identidade de Jacobi, $\left[x, [y, z]\right] + \left[y, [z, x]\right] + \left[z, [x, y]\right] = 0$.

Observemos que a propriedade $[x, x] = 0, \forall x \in L$, identifica a anti-simetria em uma álgebra de Lie L, porque temos:

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x + y] + [y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y].$$

E, da igualdade acima, resulta facilmente que $[x, y] = -[y, x]$. Reciprocamente, se $[x, y] = -[y, x]$, para quaisquer $x, y \in L$, temos que $[x, y] + [y, x] = 0$. Em particular, se $x = y$, temos que $2[x, x] = 0$, de onde concluímos que $[x, x] = 0$.

O colchete de Lie, em geral, não é associativo.

Se $x_1, x_2, \cdots, x_n \in L$ então o colchete de $n \geq 2$ elementos é definido por

$$[x_1, x_2, \cdots, x_n] = \left[[x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}], x_n\right].$$

Com essa notação, a identidade de Jacobi pode ser escrita como sendo $[x,y,z]+[y,z,x]+[z,x,y]=0$.

Uma estrutura algébrica bem conhecida é o chamado ***Anel de Lie***, que fundamenta quase todo o ramo da álgebra conhecido como *Teoria de Lie*. Um anel de Lie nada mais é que uma estrutura algébrica com as mesmas propriedades de uma álgebra de Lie, sendo que os escalares estão no anel dos inteiros.

4.1. Exemplos

4.1.1. Considere o espaço vetorial dos números reais $\mathbb{R}$ com colchete definido por $[x,y]=x+y$. Com este colchete $\mathbb{R}$ não é uma álgebra de Lie, pois se $x\neq 0$, temos que $[x,x]=x+x=2x\neq 0$. Da mesma forma, se definirmos o colchete como o produto, isto é, $[x,y]=xy$, teremos que $\mathbb{R}$ não é uma álgebra de Lie, já que se $x\neq 0$, temos que $[x,x]=xx=x^2\neq 0$.

4.1. 2. O $\mathbb{R}^3$, munido do produto vetorial, é uma álgebra de Lie. De fato, basta observar que $\mathbb{R}^3$é um $\mathbb{R}-$*espaço vetorial*, definindo $[u,v]=u\times v$, para quaisquer $u,v\in\mathbb{R}^3$.

Discussão dos Resultados

Notadamente as estruturas algébricas aqui relacionadas têm uma forte ligação entre si. De certo modo por imposição ou supressão de algumas propriedades podemos ir de uma estrutura para outra e observar como deve ser a abordagem de uma situação problema, mediante a estrutura em que ela ocorre.

Os parágrafos que seguem são uma breve discussão à respeito de exemplos de algumas estruturas algébricas que podem ser relacionadas com as discussões feitas neste trabalho.

Se Vé uma álgebra associativa sobre um corpo K, temos então que Vcom suas operações de soma e multiplicação de vetores formam um anel. Logo, pelo fato de V ser um anel, segue que podemos fazer de V, um V- *módulo* sobre si mesmo.

Pode ser provado que em uma álgebra V, o produto por escalares comuta com o produto da álgebra e é distributivo em relação a ele, ou seja, para todos x,y em V e a em K, vale que $a(xy)=(ax)y=x(ay)$. De fato, sendo 1_K o elemento neutro multiplicativo de K, temos $(ax)y = (ax)(1_K y) = (a1_K)(xy) = a(xy)$ enquanto que $x(ay) = (1_K x)(ay) = (1_K a)(xy) = a(xy)$.

O espaço das matrizes quadradas reais M_n ($\mathbb{R}$) é uma álgebra de Lie com o colchete definido por: $[A, B] = AB - BA$. De fato, dados $a, b \in \mathbb{R}$ e $A, B, C \in M_n$ ($\mathbb{R}$), vale que $[aA + bB, C] = (aA + b)C - C(aA + bB) = aAC + bBC - aCA - bCB = a(AC - CA) + b(BC - CB) = a[A, C] + b[B, CB]$. Analogamente, podemos mostrar que $[C, aA + bB] = a[C, A] + b[C, B]$. Logo o colchete aqui definido é bilinear.

Além disso, vale que $[A, A] = AA - AA = 0$ e o colchete é anti-simétrico.

Por fim, vale a identidade de Jacobi,

$\big[A, [B, C]\big] + \big[B, [C, A]\big] + \big[C\ [A, B]\big] = A[B, C] - [B, C]A + B[C, A] - C[A, B] - [A, B]C = A(BC - CB) - (BC - CB)A - B(CA - AC) - (CA - AC)B + C(AB - BA) - (AB - BA)C = ABC - ACB - BCA + CBA + BCA - BAC - CAB + ACB + CAB - CBA - ABC + BAC = 0$.

Sendo V um espaço vetorial qualquer, definindo que $[x, y] = 0$, para quaisquer x, y em V, é de imediata verificação que V, munido desse colchete de Lie, é uma álgebra de Lie. As álgebras de Lie com colchete definido desta forma recebem o nome de *álgebras de Lie abelianas.*

Conclusão

Uma compilação dos principais livros de estruturas algébricas utilizados nas universidades brasileiras mostra diferentes linhas de abordagens, em se tratando da introdução das estruturas algébricas. Podemos observar, por exemplo, que enquanto [2] segue a ordem clássica de Grupos, Anéis e Corpos, o tratamento dado por [4] e [5] consiste em introduzir inicialmente a estrutura de anel, explorando o anel $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.

De acordo com as propostas e objetivos apresentados, a linha de abordagem que utilizamos neste trabalho é a clássica de [Hygino], com contribuições de [3] e [7] para o delineamento das estruturas não desenvolvidas por [1] e [2].

As argumentações apresentadas neste trabalho propiciou que conhecêssemos estruturas algébricas novas. Obtivemos as técnicas convencionais de, a partir de uma estrutura algébrica dada, definir outra. Mais importante, possibilitou que os alunos envolvidos adquirissem a capacidade de estabelecer conexões entre as principais estruturas algébricas e de generalizar conceitos e resultados, compreendendo certas particularidades.

Bibliografia

[1] Coelho, F. U. e Lourenço, M. L. **Um Curso de Álgebra Linear.** 2ª ed. São Paulo: Edusp, 2005.

[2] Domingues, Hygino. **Álgebra Moderna**, São Paulo: Atual Editora LTDA, 1999.

[3] Fraleigh, John B., **A First Course in Abstract Algebra**, 5ª Edition, Addison – Wesley Publishing Company, 1994.

[4] Garcia, Arnaldo e Lequain, Yves – **Álgebra: um curso de introdução**, Projeto Euclides, IMPA, 1988.

[5] Gonçalves, Adilson, **Introdução à álgebra** – Projeto Euclides – Rio de Janeiro, 1979.

[6] PIAGET, Jean. **Fazer e Compreender.** São Paulo: Melhoramentos. Editora Universidade de São Paulo, 1978.

____. **A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imitação e representação.** Rio de Janeiro: LTC, 1990.

____. **O Nascimento da Inteligência na Criança.** Rio de Janeiro: Guanabara, 1991.

[7] San Martin, L. A. B. **Álgebras de Lie.** Campinas, Editora da Unicamp, 1999.

[8] VYGOTSKY, Lev Semenovich. **Pensamento e Linguagem.** São Paulo, Martins Fontes, 3ª edição, 1991.

____. **A formação social da mente.** 6. Ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

Antonio Carlos Tamarozzi

Av. Ranulpho Marques Leal, nº 3484, – Bairro Distrito Industrial

Cidade Três Lagoas – Estado – MS CEP: 79610-160

e-mail : act.ufms@gmail.com

Tels.: 0xx67-3521-2140 e 0xx67-3509-3779