ISSN 2237-7409

ELEMENTOS

Revista de Ensino e Pesquisa em Classes, Operações e Propriedades de Estruturas Algébricas

Edufac

Ano 2012

ELEMENTOS REVISTA DE ENSINO E PESQUISA EM CLASSES OPERACIONAIS E PROPRIEDADES DE ESTRUTURAS ALGÉBRICAS.
Rio Branco: Edufac, 2012 Anual. ISSN: 2237-7409 (on line)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAC.

B546e Elementos Revista de Ensino e Pesquisa em Classes, Operações e Propriedades de Estruturas Algébricas. – v. 2, n. 2 (jan./dez. 2012) – Rio Branco : Edufac, 2012.
117 p.

Anual
ISSN: 2237-7409 (on line)

1. Álgebra – Periódicos. I. Universidade Federal do Acre. II. Título.

CDD.: 512
CDU.: 512

Marcelino G. M. Monteiro CRB/11 - 258

Associação Brasileira das Editoras Universitárias

Editora da Universidade Federal do Acre

Revista
ELEMENTOS

OBJETIVO E POLÍTICA EDITORIAL

A revista Elementos tem como principal intenção a divulgação dos estudos, pesquisas e relatos de experiências desenvolvidos sobre tópicos da Matemática ligados às Estruturas Algébricas, dentro e fora da Universidade Federal do Acre. Como forma de resgatar pensamentos e práticas de ensino uma seção de cada edição da revista é composta de uma entrevista com educadores experientes.

A publicação dos textos ou artigos, de autoria individual ou coletiva, é feita dentro de um padrão técnico de qualidade editorial, como forma de promover a produção intelectual – acadêmica e científica.

Apresentação

A idéia de criação da revista Elementos nasceu da necessidade da divulgação dos trabalhos realizados pelos membros do Grupo de Ensino e Pesquisa em Classes, Operações e Propriedades de Estruturas Algébricas (GEPCOPEA), grupo de pesquisa cadastrado do CNPq, desde o ano de 2009.

De início, apostando também na nacionalização e, posteriormente, na internacionalização de suas matérias, evitamos especializá-la em uma única temática como percebemos nas muitas revistas que primam pela qualidade editorial e pelo nível daquilo que publicam. Isso pode significar para esta revista algumas reformulações, inclusive na sua política editorial, durante os primeiros anos de sua existência.

A permissão para publicações de experiências no uso de objetos matemáticos abstratos ou não, ligadas à política de ensinamentos, tem a intenção de encorajar mais pessoas a se lançarem na maravilhosa arte de escrever Matemática, inclusive sob forma de uma narrativa que socialize metodologias e conhecimentos.

Submissões de textos fora de um padrão científico serão evitadas. Assumimos assim o risco de que um Matemático anônimo e inexperiente, mas com uma brilhante idéia, deixe de usar o espaço de nossa revista para divulgá-la. Atenuamos esse problema insistindo na divulgação das edições lançadas e na disponibilização de chamadas regulares para publicação.

O fato de o conselho editorial ser composto por pesquisadores de diversas Instituições de ensino, especialmente os Consultores ad hoc, permite que tanto a comunidade acadêmica quanto os membros do comitê editorial local possam se submeter aos critérios de uma chamada para publicação, sem que seja ferida a imparcialidade e a transparência no aceite de uma matéria a ser publicada.

O comitê editorial é soberano na escolha de suas entrevistas e informativos, publicando o que julgar pertinente à cada edição. Em contrapartida, deverá fazer suas escolhas respeitando a proposta de criação desta revista, primando pela regularidade anual de suas edições e pela valorização de seus leitores.

Por se tratar de uma revista eletrônica, muitos autores, sob a luz de pareceres favoráveis, podem contribuir regularmente com suas edições, submetendo para análise seus relatos de experiências e artigos científicos.

Editorial

A edição 2012 da revista elementos traz algumas alterações em seu conselho editorial o que acarretou uma ampliação do grupo de pessoas que passarão a colaborar com a publicação das novas edições. Essencialmente retiramos a exclusividade de manutenção da Elementos pelo GEPCOPEA, grupo de pesquisa onde nasceu a ideia de criação desta revista. Na última capa desta edição podemos verificar que o nome do grupo foi suprimido.

Após a divulgação da primeira edição e da obtenção do ISSN de nossa revista, conseguimos novas e importantes adesões de professores pesquisadores para a composição do Conselho Editorial, o que implica que nossas publicações podem alcançar um número maior de leitores e de pesquisadores interessados em submeter seus trabalhos para publicação, o que pode significar que a revista receba algum tipo de qualificação num futuro próximo.

A manutenção da política de publicação é um entendimento claro do atual Conselho Editorial. Acreditamos que as temáticas previamente relacionadas para os editais de chamada têm significativa abrangência e isso representa uma boa possibilidade para que tenhamos sempre alguém interessado em divulgar um trabalho através da revista elementos.

A entrevista desta edição traz em detalhes a trajetória acadêmica de um dos professores da Universidade federal do Acre. Um estudioso que ajudou a manter o curso de Matemática no Estado do Acre quando as condições eram precárias e ainda não tínhamos noção de como teríamos que crescer em conhecimento e nos preparar para os avanços dessa importante área do conhecimento, a Matemática.

O número de relatos de experiências e de notas informativas ainda se compara ao número de trabalhos mais puros, o que significa que eles ainda constituem boa parte do espaço desta edição. Mesmo assim, para um segundo volume, consideramos satisfatório o número de artigos aqui apresentados.

José Ivan da Silva Ramos
(Professor efetivo do CCET/UFAC)

Sumário

Revista Elementos • 2ª edição • ano 2012 • 6-16

Revista
ELEMENTOS

Entrevista

O sonho de ser Engenheiro

Prof. Valmir Saraiva de Oliveira

Comecei a estudar no Colégio Acreano, no centro da cidade de Rio Branco, no Estado do Acre em 1964. Depois de terminar o ginásio (correspondente hoje às quatro últimas séries do primeiro grau), você podia escolher se iria para o Científico, se seria Técnico em Contabilidade ou se iria para a Escola Normal. Havia somente essas três opções em nosso Estado. Não tinha nada de curso profissionalizante. Então, fui para o Científico. Lá me dei muito bem. Tive muita sorte naquela época, porque com a criação, pelo governo do Estado da empresa ACAR-Acre, veio para cá uma leva grande de engenheiros, dentre eles: Vanglésio, Rego, Daakar, Kleber, Geraldo, Gustavo, e outros, sendo que alguns deles dedicaram-se também à docência.

Assim, logo no primeiro ano do científico (1968), foi uma revolução para o Colégio, porque era a primeira vez que esses profissionais foram dar aula lá. A partir dali, comecei a criar gosto pela área, não especificamente da matemática, mas da física, que eu gostava muito.

Quando terminamos o Científico, em 1970, a Universidade, só oferecia praticamente a faculdade de direito. Depois, começou o curso de economia, em 1971. Mas, quem já optou pela área de exatas, durante três anos, cultivando aquela ideia, não tinha afinidade com aquelas áreas. Meu sonho, então, passou a ser fazer engenharia. Não só meu, mas de alguns outros colegas.

Eu não tinha recurso para sair de Rio Branco. Mas o pessoal me incentivou dizendo “vamos, vamos, vamos, vamos”. O que é certo é que eu peguei um ônibus daqui para o Rio de Janeiro e passamos uma semana pra chegar lá. Uma situação muito difícil. Fiquei ali no Rio, na Pensão da Norma, por quatro meses, onde gastei os últimos trocados.

Por já ter sofrido muito na casa de parentes, casa de tia, apesar de eles terem me dado todo apoio, a casa dos outros quando você é menino é “brabo”, resisti o quanto pude. Isso porque existia um convite de um primo, para que se eu quisesse ir para a casa dele, por conta dos estudos, ela estava à disposição. Assim, um dia, quando só tinha o dinheiro da passagem de ônibus do Rio de Janeiro para Recife, não tive dúvida, embarquei pra lá.

Fui para a casa do Antonio Carneiro, meu primo. Agradeço muito a ele por tudo o que tenho ou fiz. Ele foi meu segundo pai, especialmente pelo apoio que me deu. Cheguei lá em agosto de 1971. Comecei a procurar lugar pra trabalhar. Fiz um concurso em um banco e comecei a estudar pra fazer o vestibular no fim desse mesmo ano. No vestibular, passei, e até passei bem. Ainda guardo o jornal com a relação dos candidatos aprovados. Eram 660 vagas para a área de exatas. Naquele tempo era assim: eram 11 turmas de 60 alunos. Eu classificado em 81º lugar. Estudei engenharia naquela cidade nos anos de 1972, 1973 e até a metade de 1974. Do segundo ano de curso em diante as disciplinas já passavam a ser numa área específica, então passei a cursar Engenharia Civil.

Paralelo a isso eu continuava a trabalhar no banco até que em março de 72 surgiu uma oportunidade para eu trabalhar na Empresa aérea chamada de Cruzeiro do Sul; onde esse meu primo era gerente de aeroporto. Passei então a trabalhar no aeroporto. Durante esses quase dois anos e meio minha rotina era a seguinte: pegava o ônibus 6 horas da manhã, ia pra faculdade, estudava, depois, “pegava o bandejão no (restaurante universitário) RU”, e tinha que correr pra pegar dois ônibus, para estar no aeroporto à uma da tarde. Quando foi no terceiro ano, em 1974, no primeiro semestre, comecei a ter problema, porque passou a ter aula de manhã e à tarde; as aulas práticas eram à tarde. Os professores nunca me importunaram por conta da vestimenta, até que um belo dia, quando pedi licença pra fazer uma aula no CECINE, no *Campus* Universitário de Recife, onde a gente começou os estudos sobre hidráulica, com as instalações de um banheiro, ao terminar uma das aulas, estávamos dentro dos esgotos. A maioria dos colegas estava de calça jeans, e eu com a farda da companhia aérea Cruzeiro, numa situação difícil, pois usava a mesma calça para ir à faculdade e trabalhar. Como dizíamos na época: todo "lascado". A partir daquele momento, vi que tinha alguma coisa que não estava funcionando a contento. Eu não ia dar conta, porque, a partir dali, as aulas iriam acontecer nos dois horários mesmo. Iam começar mais e mais aulas práticas, e eu, trabalhando, não tinha condições de frequentá-las. Então, no segundo semestre letivo, tranquei o curso.

Nesse mesmo ano, a Cruzeiro abriu uma filial em Rio Branco e meu primo foi convidado para ser o gerente geral. Logo em seguida ele me fez uma consulta: "Valmir, já que tu trancaste a faculdade, você poderia gerenciar o aeroporto para mim, lá em Rio Branco?". Mesmo sabendo da complexidade do serviço eu concordei em voltar. Cheguei aqui dia 26 de setembro de 1974, e a sucursal foi aberta dia 01 de outubro, quando comecei a gerenciar o aeroporto.

A opção pela Matemática

Procurei a Universidade aqui, verifiquei que nessa época o único curso que se encaixava com o que eu tinha afinidade era o de Matemática. Então, ainda em 1974, me inscrevi no vestibular e passei em primeiro lugar para o curso de Matemática, apesar de ter feito as provas numa "ressaca braba". Fui manchete de um jornal local. No dia seguinte publicaram: "aluno passou mal por causa do vestibular". Evidentemente a situação não ocorreu por conta das provas.

Logo que começou o curso tive um apoio muito grande do professor João Batista Nogueira, o Batistão. Ele foi um professor de "primeira linha" para mim. Me "abraçou" como aluno e logo pude contar a ele sobre a minha vida acadêmica em Recife.

Algumas matérias que eu havia cursado na Engenharia foram aproveitadas. Houve problemas de carga horária porque aqui a maioria das disciplinas era de 90 horas e eu havia obtido créditos em disciplinas de 60 horas.

No final de 1976, chegou aqui o professor Zé Vicente depois de ter obtido o mestrado. Antes, tinha chegado também o professor Odonias, também havia tentado terminar o mestrado em Matemática. Esse professor e o professor João Batista Sobrinho foram morar perto de mim. A gente se dava muito bem e isso fez com que o Odonias me elogiasse para o Zé Vicente. Um episódio que terminou por estreitar a minha relação com esse importante professor foi o seguinte: numa das provas sobre variáveis complexas havia uma questão para mostrar que $|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$. Eu encontrei uma forma de resolver o problema, acoplando aqui, separando ali, e acabei justificando a desigualdade. Depois de cobrar o resultado da prova o professor me disse que eu havia errado somente uma questão. Eu retruquei e lhe disse: "não errei nenhuma não, nem aquela questão, eu vou mostrar como eu acertei". Fomos eu o Odonias e ele para uma sala de aula e mostrei a eles como que tinha resolvido a questão. Ele concordou com a resposta que dei dizendo que eu estava certo. Depois recebi a prova, que tinha recebido um traço na questão e colocado um "C" por cima. A partir dali, o Zé começou a me considerar. Ele foi uma pessoa excepcional porque, ao invés dele ter ficado retraído por ter outro professor intervindo, ele começou a me adorar. Isso foi em 1977.

Minha vida de aluno foi meio atribulada porque paralelo a ela eu trabalhava na Cruzeiro, dava aula num colégio e ainda tinha um cursinho pré-vestibular, junto com os professores Ribamar e Neubes. Era uma correria só! Fui dono do "Radical" e do "Nobel", dois cursinhos antigos. Eu e o Ribamar éramos donos do Radical e o Neubes dava aula. Quando o Ribamar saiu para o mestrado, eu continuei tomando de conta do cursinho, isso em 1979. Depois, o Ribamar não conseguiu passar no teste de aptidão do mestrado e voltou com toda a família. O reitor, que era o Áulio Gélio, não perdoou e o demitiu da Universidade. Ele ficou numa situação difícil; então, falei a ele que podia ficar com o Radical. Depois eu e o Neubes, ficamos sócios e fundamos o Nobel.

O magistério superior

Formei-me, juntamente com a senhora Laura Maia, a Solange Delgado, esposa de Zé Vicente e o Sérgio Fuchs, em 1978. Logo em seguida, através de um convite, participei de um concurso simplificado para dar aula na Universidade, que também exigia o currículo vitae e uma entrevista. Foram duas vagas. O professor Reis Sobrinho foi contratado junto comigo, só que para a área de Estatística. Nesse tempo o Departamento era muito pequeno, o corpo docente era eu e os professores Marilda, Zé Vicente, Aroldo, Aldair, Odonias, Batistão e José Reis, me perdoe se falta algum. Éramos uns sete professores, aproximadamente. Os professores que estavam aí, no geral, vinham de fora do estado e usavam a Universidade como um trampolim para fazerem pós-graduação. Na maioria dos casos eles vinham, ficavam um ou dois anos aqui e saíam pra fazer mestrado. Nisso, “carreguei muito piano”.

Com o passar do tempo nós fizemos outro concurso e contratamos os professores Antonio Carlos, Marquinho (que era irmão do professor Zé Vicente), Elizete Domingo e Neuza (sua irmã).

Em 1980, houve um problema sério no Curso. Com a implantação da Lei 5692 percebemos que o Brasil não queria cientistas, e sim trabalhadores braçais, ou seja, criavam o curso de ciências, extinguiam os cursos de matemática, física e química, criavam o curso de ciências para o pessoal atuar em nível de Primeiro Grau, e, lá na frente, criavam as habilitações. Então, você ficava com uma licenciatura curta, de 2 anos e meio, e mais 2 anos para habilitação em uma dada área. Na nossa Universidade isso funcionou somente com duas habilitações: Biologia e Matemática.

Nós sofremos muito nesse período, porque a grade curricular tinha muitos pré-requisitos. O sistema era semestral, mas as disciplinas eram oferecidas anualmente. Era um desastre! Os cálculos I, II e III e EDO, por exemplo, eram disciplinas, encadeadas em pré-requisitos e se um aluno devesse uma delas, já era. Isso culminou com a evasão e uma retenção violentíssima. Muitas vezes uma pessoa estava interessada em fazer biologia e não queria saber desse negócio de matemática, e ficava devendo da Matemática I até a Matemática V, já tendo terminado os créditos de química, biologia e etc. Sofremos muito nessa época.

O curso só teve um desafogo quando eu e os professores Magnésio e Pedroso, trabalhamos a ideia da pré-opção que surgiu no sentido de desafogar o Curso: passou a existir um núcleo comum de disciplinas, mas o aluno fazia a pré-opção que significava que quem fazia biologia, por exemplo, não precisava fazer as cinco matemáticas, e, quem optava por matemática não fazia as cinco biologias. Foi assim que a gente deu um pouco de dinamismo ao curso, tendo as pré-opções começado em 1982, para amenizar as retenções de alunos. Esse foi um caso típico de que “tem lei que pega e tem lei que não pega”. As que não pegam são as ruins mesmo.

Depois que comecei a dar aulas, descobri que meu forte era esse. Quanto ao método de ensino, isso depende muito de que tipo de alunos nós temos, pois dar aula em um colégio é totalmente diferente de dar aula na Universidade ou em um curso preparatório para provas de vestibular onde geralmente as pessoas são adultas.

Durante minha vida de professor, aluno já saiu do colégio me devendo ponto, porque toda vez que eu botava um aluno para fora de sala, o que era permitido naquela época, eu lhe tirava um ponto na nota. Teve aluno que saiu me devendo ponto e que até hoje não pagou, zerava nas provas e era tirado da sala algumas vezes. Essa rigidez não passa nem perto do que costuma ocorrer em aulas na Universidade ou em um cursinho com microfone e sala lotada. São experiências diferentes.

Uma experiência que sempre menciono foi a de quando assumi uma turma de cálculo no curso de Agronomia, apesar de eu estar acostumado ao ambiente e à filosofia de estudo no curso de matemática. A partir do que aconteceu nessa turma passei a refletir previamente sobre qual clientela de alunos iria receber essa ou aquela disciplina que compõem os conteúdos de um curso. Nesse caso, havia uma necessidade primeira de preparar os alunos para poder, por exemplo, falar em derivada. Uma necessidade de contextualização e explicação das relações do cálculo com a Geometria. Enfim, fazer a devida adaptação prática com o curso da agronomia que é uma forma de motivar o estudante.

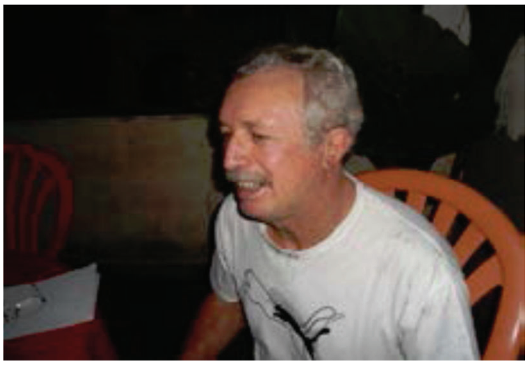
Também assumi atividades administrativas na UFAC. Mas o exercício da chefia no Departamento de Matemática foi difícil. A estrutura era muito pequena. Apesar disso criamos uma série de projetos de extensão, oferecemos cursos de nivelamento para alunos do antigo 2º grau em uma salinha improvisada. Sempre tínhamos muitos alunos que ao concluir o curso recebiam um diploma. Essa nossa ideia recebia o apoio incondicional por parte da Administração Superior.

Naquela época, existiam outras metodologias e relações de trabalho. O Chefe de Departamento respondia diretamente ao Reitor. Mas todos tinham que “rezar na mesma cartilha”. Mesmo assim eu sempre tive outro emprego fora da UFAC, já que meu regime de trabalho sempre foi 40h. Não era de “Dedicação

Exclusiva". Como o curso funcionava à noite eu podia dar aulas e, mediante a flexibilidade de horários no outro emprego, eu podia participar das reuniões na UFAC e exercer aquele cargo administrativo.

Depois que assumi o cargo, em 1979, permaneci nele por quatro anos até a troca do Reitor Áulio Gélio.

Deixando a Matemática para atuar na área de Informática



Isso pode ter começado durante a minha graduação em Matemática. Quando surgiu a Acredata, que era a Empresa de Processamento de Dados do Estado, Zé Vicente, meu professor, passou a visitar muito o aeroporto para receber equipamentos. Numa dessas visitas, perguntei: "e aí, Zé, o que te traz aqui?" Respondeu: "é um computador que está chegando". Aqui não se sabia nem o que era computador, naquela época.

No final de 1977, encontrei novamente com ele no aeroporto e ele me disse: "Valmir, vai ter um concurso na Acredata, e eu quero que você se inscreva". Falei: "mas Zé, sou gerente aqui, e aqui tenho todo um respaldo para trabalhar". Isso de fato era assim, embora o salário não fosse lá essas coisas. Mas ele insistiu, dizendo que lá o salário ia ser muito bom.

Ele era da Comissão Permanente de Vestibular (COPEVE), nesse tempo, e estava elaborando prova para o vestibular quando novamente esteve no aeroporto para pegar um equipamento que tinha chegado. Quando me viu perguntou: "Cadê, tu se inscreveu?". Falei: "me inscrevi". Era o último dia de inscrição e menti para ele, pois eu não tinha me inscrito coisa nenhuma. Isso me deixou muito preocupado. A Maria José, minha irmã, trabalhava na Assessoria de Comunicação e era da equipe do concurso; então, naquele dia mesmo, pedi pra ela fazer minha inscrição, porque tinha mentido pro Zé Vicente e não queria que ele descobrisse e depois me procurasse. Inscrevi-me, e, graças a Deus, passei. Quando me formei, em 1978, já estava trabalhando na Acredata.

Em 1994, quando começou a surgir, dentro da UFAC, a ideia do Curso de Análise de Sistemas, eu era analista de sistema, de carteirinha e tudo. O curso foi instalado através de professores vindos de Mato Grosso do Sul. Lá, eles tinham bem separados, os cursos de Análise de Sistemas e de Informática Pura ou Ciência da Computação. Mas aqui, por se tratar da criação de um único curso, tentamos fazer um híbrido, botando muitas disciplinas, de um e de outro.

Paralelo a isso, era preciso capacitar os docentes para dar aulas em Sistemas de Informação. E eu aceitei participar da capacitação, e acho que foi ótimo, porque descobri novos horizontes. Não sei se foi bom para a Universidade, já que eu parei de atuar na área da Matemática. Lá eu poderia chegar à aposentadoria sem precisar me capacitar mais, pois já tinha acumulado muitas experiências. Mas meu negócio sempre foi esse, de vislumbrar novas coisas, desbravar.

Quando, com 50 anos, você se dispõe a fazer mestrado, ou você é louco ou é matemático mesmo. Fiz o mestrado tendo que largar a família aqui e muitas vezes ir de carro para Rondônia, o que causava certa confusão. Mas, graças a Deus, eu defendi minha dissertação. Essa oportunidade de estudos aprofundados em uma nova área era o que eu sempre vislumbrava. Muitos me chamavam de mestre e agora esse chamamento está certo. Apesar das recomendações para que eu continuasse os estudos, não quis fazer um doutorado. Eu achei que ter um mestrado estava bom. Meu negócio é ser chamado de professor mesmo.

Depois, o curso que era híbrido foi, logicamente, consertado. O que estava errado era a sua grade curricular. Quando veio o reconhecimento e a regulamentação do curso pelo MEC ele tinha sido alterado definitivamente para o curso de Sistemas de Informação.

Digo sempre que o mundo vai rodando e vai tornando as coisas cada vez mais difíceis. Anteriormente, quando um professor tinha apenas a graduação, era permitido dar aulas na Universidade. Depois, começaram a exigir pelo menos uma especialização. Hoje, na nossa Universidade, se exige o mestrado para alguém que queira ocupar um cargo de professor, e vai evoluindo para a exigência de um doutorado. Se eu tivesse concluído somente a especialização hoje eu me sentiria frustrado. Por isso que com 50 anos fiz o mestrado, ajudei a consolidar um curso de informática na UFAC e pude atuar com mais segurança e me aposentar mais confortavelmente. A docência na Universidade foi para mim uma coisa espetacular!

Uma forma de contribuir e manter uma relação próxima com a Universidade

A gente poderia pensar em realizar algumas palestras na UFAC. Escolheríamos alguns temas e eu poderia falar sobre eles. A Lógica Difusa é algo que me apaixona muito. A ideia é simples demais, mas temos que esquecer nossa formação em Matemática. Por exemplo, lá a intersecção de um conjunto com o seu complementar, não é vazia, nem a união dá o universo. E isso está fora da lógica Booleana do 0 ou 1.

Nessa lógica está centrada praticamente toda a engenharia dos grandes projetos. Vai desde a construção da máquina de lavar até a construção do trem-bala. Agora podemos falar em velocidades média, alta ou média alta. Também não é só o quente ou o frio, temos agora o meio quente. Essa lógica multivalorada trouxe avanços tecnológicos significativos.

Podíamos preparar uma palestra para contar como ela surgiu: dizem que o cidadão era meio "louco". Trabalhava num alto instituto de matemática nos EUA e levou uma maçã pra comer durante o trabalho. Deixou-a em cima da mesa que foi vista por um colega que a viu e perguntou: e tua maçã, não vai comer? Aí, ele tirou parte da maçã e comeu. Depois foi perguntado novamente: "tu não vai comer a tua maçã?" Ele então ficou intrigado, porque já tinha comido quase a maçã toda, mas o seu colega continuava chamando o que restava da fruta de maçã. Percebeu que não era mais uma maçã.

Quando montou essa teoria ela continha tanta falha, do ponto de vista matemático, que ele foi expulso do EUA. Ele foi morar na Coréia do Sul. Em função desse teórico matemático, os tigres asiáticos deram uma aula de tecnologia para os EUA. Exatamente através dessa teoria do multivalor.

Considerações finais sobre a área de Matemática e a carreira de professor

Hoje, vejo a Matemática muito fortalecida. Fico assim muito empolgado com as edições das olimpíadas brasileiras de Matemática. Continuo achando que a Matemática é o ponto crucial de tudo. Mas o estudo aprofundado na Matemática especificamente só pode ser realizado por quem está no meio dos grandes pesquisadores.

Uma coisa que ainda me preocupa é a dicotomia que existe entre os estudos realizados na Universidade com o propósito de formar professores de ensinos fundamental e médio e aquilo que eles futuramente vão ensinar. Em geral, esse estudo não é aplicado, em sua totalidade, nos níveis de ensino que ficam para baixo. No meu tempo, tenho certeza de que não era.

Parece existir um misto de licenciatura com bacharelado. Isso pode nos preparar para o início de uma carreira universitária, mas pode deixar-nos distantes de uma atuação coerente frente a um cargo de professor dos ensinos básicos.

Considero que a estrutura educacional sofre adaptações em função das leis que vão sendo criadas. A área de Matemática vem mudando significativamente para melhor, mas isso também ocorre muitas vezes ao sabor de certos governantes.

Com relação à situação atual da Universidade, ou o Brasil pensa que tudo está centrado na educação, ou nós não vamos avançar. Tudo tem que caminhar com a educação. Neste aspecto, vejo pouquíssima importância sendo dada. Por exemplo, não vejo o porquê de um professor da universidade ganhar menos do que um policial federal, ou qualquer profissional de outra carreira. Porque todos são formados pela academia. Se o professor não ganhar bem, ele vai ensinar mal, e vai formar mal o policial. De todo modo, como é que quem forma aquele policial pode ganhar um salário miserável? Não sei como é que o pessoal encara isso. Podemos citar ainda a delicada situação das pessoas que fundaram ou que estão à frente da ANDES, muitas vezes o próprio Ministro da Educação não recebe os representantes de nosso sindicato! É uma situação muito difícil.

A universidade precisa se fortalecer, não há dúvida, não só por ser universidade, mas porque todos os profissionais vêm dela. Como surgiu um desembargador? Se ele fez pós-graduação, foi lá na Universidade. Hoje eles ganham mil e mil e mil, enquanto nós, umas migalhas.

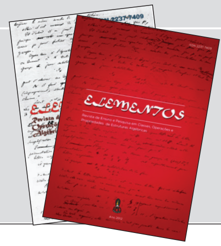
Na vida, eu me sinto realizado, porque o que eu podia deixar para meus filhos é o estudo. Não temos dinheiro, mas temos as vidas deles todas encaminhadas, e foi pra isso que a gente batalhou na vida.

Se eu pudesse optar entre ter sido professor ou seguir carreira em outro tipo de serviço, escolheria ser professor! Sem dúvida nenhuma! Se algum dia eu fosse mudar meu nome, colocaria “Professor Valmir Saraiva”, pois é assim que a maioria das pessoas me chama. É uma coisa que me conforta. Acho sublime ser professor. Isso pode não significar nada para muitos, mas para mim é uma “grande coisa”. Se eu exercesse a profissão de engenheiro provavelmente seria um péssimo profissional.

Minha grande paixão agora é a criação de peixes. Mas, uma das coisas que ocorre frequentemente em relação ao trabalho que ainda presto ao Estado do Acre, é que às vezes sou convocado para calcular um percentual de aumento salarial como se isso fosse a coisa mais complicada do mundo. Ainda bem que tenho a formação matemática.

Revista Elementos • 2ª edição • ano 2012 • 17-26

Revista
ELEMENTOS



De Grupos a Álgebras de Lie: um passeio entre as estruturas algébricas

Antonio Carlos Tamarozzi
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Marco Antonio Travassos
Bolsista do programa PET/Matemática - UFMS/CPTL

Thiago Mariano Viana
Bolsista do programa PET/Matemática-UFMS/CPTL

Resumo

Neste trabalho apresentamos um relato de experiências que vivenciamos na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), no Campus de Três Lagoas, frente a um Programa de Ensino Tutorial (PET), tendo como meta pesquisar as estruturas algébricas mais comuns no ensino de graduação em matemática em nosso país descrevendo suas inter-relações.

Abstract

We present an account of experiences that we experience at the Federal University of Mato Grosso do Sul (UFMS), Three Ponds Campus, opposite a Tutorial Education Program (TEP), aiming to research the algebraic structures more common in teaching degree in mathematics in our country, describing their interrelations.

Palavras Chaves: Estruturas algébricas, álgebra de Lie, colchete e módulos.

INTRODUÇÃO: JUSTIFICATIVA E OBJETIVOS

Em geral, os cursos de Matemática das universidades brasileiras possuem uma grande curricular, na qual, os conteúdos de Álgebra são distribuídos entre duas disciplinas de Álgebra Abstrata e uma disciplina de Álgebra Linear. Enquanto que a Álgebra Abstrata explora as estruturas algébricas de grupos, anéis e corpos, a álgebra linear se ocupa dos espaços vetoriais, operadores lineares e de suas representações. Mesmo em cursos de bacharelado, salvo raras exceções, a limitação da carga-horária impõe que os conteúdos da álgebra abstrata e da álgebra linear sejam abordados de maneira estanque, sem apresentar e explorar as inter-relações entre eles. Apenas para citar um exemplo, uma breve consulta na bibliografia comumente utilizada nas disciplinas de álgebra linear revela que os livros definem um espaço vetorial sem mencionar que, na verdade, trata-se de um grupo aditivo com uma “operação (externa) de multiplicação por escalar” proveniente de um corpo que é outra estrutura algébrica. Nessa linha de estudo, perdemos, portanto, oportunidades de simplificar abordagens, investigar relações e explorar aplicações advindas de conteúdos anteriormente estudados.

Na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS) – Campus de Três Lagoas, temos implantado um programa de ensino tutorial PET, na área de Matemática, (PET/MAT UFMS CPTL).

Uma atividade de pesquisa, que tem implicações relevantes também para o ensino de Matemática, notadamente em álgebra, foi proposta como trabalho para alguns dos membros desse programa que são coautores deste trabalho. A atividade consiste em pesquisar as estruturas algébricas mais comuns de maneira construtiva, descrevendo suas inter-relações. Dessa forma, foram apresentadas as definições clássicas desde grupos até álgebras de Lie, de maneira gradual, de modo que os elementos das estruturas apresentadas depois da descrição de um grupo sejam obtidos a partir das estruturas anteriores.

Fundamentos Teóricos – Metodológicos

A estratégia de estudo usada no programa tutorial que nos levou a escrever este pequeno relato baseou-se em discussões coletivas e individuais, mas regulares em torno de um único propósito: descrever em detalhes algumas estruturas algébricas importantes relacionando-as sempre que possível.

Os conhecimentos científicos trabalhados aqui foram desenvolvidos de acordo com o pensamento de Vygotsky, partindo de uma sistematização de propriedades dos objetos matemáticos. Concordamos que se faz necessário possibilitar ao aluno a apropriação da forma sistematizada de pensamento e de linguagem. Aproveitar as experiências já vividas ou adquiridas por eles para alcançar níveis mais complexos de abstração. Sendo essa uma relação fundamental para o processo de aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Entendendo que o conhecimento é uma herança ou um patrimônio aos quais os cidadãos têm direto, que é o que lhe encoraja na busca do entendimento das proposições e conhecimento das ciências, realizamos nossos estudos acreditando, como o suíço Jean Piaget, que o principal objetivo da educação é tornar os indivíduos capazes de fazer coisas novas e não simplesmente repetir o que já foi feito.

Ações desenvolvidas

Inicialmente realizamos um levantamento bibliográfico dos principais livros-texto utilizados nas disciplinas de álgebra dos cursos de Matemática das universidades brasileiras. No momento seguinte verificamos em que ordem esses livros apresentam as definições das estruturas algébricas e relacionamos a essas alguns conceitos não convencionais como módulo, álgebra e álgebras de Lie.

A partir de estudos individuais, estudos em grupo, apresentação de seminários e resolução de problemas relacionados com a teoria estudada, foram destacadas algumas técnicas comuns na descrição das estruturas estudadas, como por exemplo, a determinação de quocientes e a ação de automorfismos. Nossas argumentações se referem às estruturas algébricas que descrevemos a seguir.

1. Grupos, anéis e corpos.

A estrutura de Grupo é fundamental na Álgebra Abstrata, sendo que outras estruturas algébricas importantes podem ser descritas a partir da mesma.

Dados G um conjunto não vazio e uma operação $*: G \times G \to G$. Dizemos que G é um ***grupo*** se $*$ satisfaz as seguintes condições:

i) Associatividade, isto é, $a * (b * c) = (a * b) * c;\ \forall a, b, c \in G$.

ii) Existe um elemento neutro, isto é, $\exists e \in G$ tal que $a * e = e * a; \forall a \in G$.

iii) Todo elemento possui um elemento inverso, isto é, $\forall a \in G, \exists b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$.

Dizemos que o grupo G é *abeliano* ou *comutativo* se valer:

iv) Comutatividade, isto é, $a * b = b * a;\ \forall a, b \in G$.

Podemos observar facilmente que na estrutura de um grupo temos que:

1) O elemento neutro é único.

2) O elemento inverso é único.

Consideremos G um grupo abeliano aditivo. Se definirmos em G uma nova operação $\cdot$, que admite as propriedades associativa e distributiva em relação à operação (de adição) que define esse grupo, obteremos a estrutura denominada ***anel***. Formalmente, dado $(G, +)$ um grupo abeliano, no qual pode ser definida outra operação $\cdot$, diremos que G é um anel se a operação $\cdot$ verifica as seguintes propriedades:

i) Associatividade, isto é, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c;\ \forall a, b, c \in G$.

ii) A operação $\cdot$ é distributiva em relação à operação $+$, isto é, $\forall a, b, c \in G$, vale que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Por uma questão de simplicidade de representação e linguagem, as operações $+$ e $\cdot$ são chamadas adição e multiplicação, respectivamente, e utilizaremos ab para denotar. $a \cdot b$. Assim, todo anel é um grupo relativo à operação de adição.

Ainda no caso acima, em que G um grupo abeliano aditivo, consideremos 0 o elemento neutro com relação à operação de adição de G. Se o conjunto $G \setminus \{0\}$, munido da operação de multiplicação, formar um grupo abeliano, e valer a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, teremos uma estrutura que chamamos de ***corpo***.

2. Espaços vetoriais e Módulos

Sejam V um conjunto não vazio e K um corpo. Suponhamos que possam estar definidas as seguintes operações: $+: V \times V \to V$, que a cada par de vetores $(u, v) \in V \times V$ associa o vetor soma de u e v, $u + v \in V$ e $\cdot : K \times V \to V$ que a cada elemento $k \in K$ e cada vetor $v \in V$ associa o vetor $kv \in V$. Denominamos V como um ***espaço vetorial*** sobre o corpo K se,

i) $(V, +)$ é um grupo abeliano e valem as seguintes condições: $\forall a, b \in K$ e $\forall u, v \in V$,

ii) $a(b \cdot v) = (ab) \cdot v$

iii) $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$

iv) $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$

v) $1 \cdot v = v$, onde 1 denota o elemento neutro da multiplicação de K.

Os elementos do corpo K são chamados *escalares* enquanto os elementos de V são chamados *vetores*.

A estrutura de ***Módulo*** é uma generalização de Espaço vetorial, onde restringimos os escaleres a um anel. Assim, dado R um anel qualquer, um conjunto não vazio M é dito um ***R - Módulo*** ou um ***módulo sobre R***, se M é um grupo abeliano aditivo e são satisfeitas as condições: $\forall r, s \in R$ e $\forall a, b \in M$

i) $r(a + b) = ra + rb$

ii) $r(sa) = (rs)a$

iii) $(r + s)a = ra + sa$

Se R possuir elemento unidade 1 e $1 \cdot m = m$ para qualquer elemento $m \in M$, então M é denominado um *R - Módulo unitário*. Notemos que se R for um corpo, um *R - Módulo unitário* é *R – espaço vetorial*.

Os seguintes exemplos apontam importantes casos de módulos:

2.1. Exemplos

2.1.1. Todo grupo abeliano A é um módulo sobre o anel dos inteiros. De fato, basta observarmos que para quaisquer $z \in \mathbb{Z}$ e $a \in A$, temos $za = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{z\ vezes}$, se $z \geq 0$ e $za = \underbrace{(-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_{z\ vezes}$, se $z < 0$.

2.1.2. Todo anel R é um R – módulo sobre si mesmo. De fato, na definição de módulo dada acima, devemos ter que $\forall r, m \in R$, $rm \in R$ e que valem as três propriedades i), ii) e iii) dadas. Mas estas condições decorrem imediatamente do fato de R ser um anel.

3. Álgebras

Seja V um $K-$*espaço vetorial*. Existem espaços vetoriais sobre um corpo K, nos quais a multiplicação de vetores pode ser também realizada. Isto ocorre, particularmente quando V for também um anel.

Uma ***álgebra*** *sobre um corpo K* é um espaço vetorial V com uma operação binária de multiplicação de vetores, que satisfaz: $\forall x, y, z \in V$ e $\forall a, b \in K$,

i) $x(y + z) = xy + xz$ e $(x + y)z = xz + yz$

ii) $(ax)(by) = (ab)(xy)$.

Quando vale a propriedade associativa da multiplicação numa álgebra V, dizemos que essa ***álgebra é associativa***. Ou seja, diz-se que V é uma *álgebra associativa*, se para quaisquer $x, y, z \in V$ valer que $x(yz) = (xy)z$.

Quando a álgebra é associativa, podemos sem ambigüidade denotar produtos triplos como $x(yz)$ e $(xy)z$ simplesmente por xyz. Uma álgebra V é dita ser uma ***álgebra comutativa*** ou uma *álgebra abeliana* se para todos $x, y \in V$ tivermos que $xy = yx$.

3.1. Exemplos

3.1.1. Seja $V = M_n(\mathbb{R})$, o espaço das matrizes quadradas de ordem n com entradas reais. Então V é uma álgebra associativa sobre o corpo K, onde a operação de multiplicação é a multiplicação usual de matrizes. Notemos que este é um exemplo de álgebra associativa, mas não comutativa.

3.1.2. Seja V o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes sobre um corpo K, então V é uma *álgebra comutativa* sobre o corpo K, onde a multiplicação é a multiplicação de polinômios.

4. Álgebras de Lie

Agora vamos definir e explorar as propriedades de uma classe especial de álgebra, a chamada *Álgebra de Lie*, que tem definição baseada no conceito de *colchete de Lie*.

Uma ***álgebra de Lie*** é um $K-$*espaço vetorial* L munido de uma operação binária $[\ \ ]: L \times L \to L$ tal que a cada par (x, y) associa o elemento $[x, y]$ chamado *colchete de Lie*, que satisfaz as seguintes propriedades: $\forall a, b \in K$ e $\forall x, y, z \in L$,

i) o colchete de Lie é bilinear, isto é,

$$[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z] \text{ e } [z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y].$$

ii) o colchete de Lie é anti-simétrico, isto é, sempre temos $[x, x] = 0$.

iii) Vale a identidade de Jacobi, $\big[x, [y, z]\big] + \big[y, [z, x]\big] + \big[z, [x, y]\big] = 0$.

Observemos que a propriedade $[x, x] = 0, \forall x \in L$, identifica a anti-simetria em uma álgebra de Lie L, porque temos:

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x + y] + [y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y].$$

E, da igualdade acima, resulta facilmente que $[x, y] = -[y, x]$. Reciprocamente, se $[x, y] = -[y, x]$, para quaisquer $x, y \in L$, temos que $[x, y] + [y, x] = 0$. Em particular, se $x = y$, temos que $2[x, x] = 0$, de onde concluímos que $[x, x] = 0$.

O colchete de Lie, em geral, não é associativo.

Se $x_1, x_2, \cdots, x_n \in L$ então o colchete de $n \geq 2$ elementos é definido por

$$[x_1, x_2, \cdots, x_n] = \big[[x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}], x_n\big].$$

Com essa notação, a identidade de Jacobi pode ser escrita como sendo $[x,y,z]+[y,z,x]+[z,x,y]=0$.

Uma estrutura algébrica bem conhecida é o chamado ***Anel de Lie***, que fundamenta quase todo o ramo da álgebra conhecido como *Teoria de Lie*. Um anel de Lie nada mais é que uma estrutura algébrica com as mesmas propriedades de uma álgebra de Lie, sendo que os escalares estão no anel dos inteiros.

4.1. Exemplos

4.1.1. Considere o espaço vetorial dos números reais $\mathbb{R}$ com colchete definido por $[x,y]=x+y$. Com este colchete $\mathbb{R}$ não é uma álgebra de Lie, pois se $x\neq 0$, temos que $[x,x]=x+x=2x\neq 0$. Da mesma forma, se definirmos o colchete como o produto, isto é, $[x,y]=xy$, teremos que $\mathbb{R}$ não é uma álgebra de Lie, já que se $x\neq 0$, temos que $[x,x]=xx=x^2\neq 0$.

4.1. 2. O $\mathbb{R}^3$, munido do produto vetorial, é uma álgebra de Lie. De fato, basta observar que $\mathbb{R}^3$é um $\mathbb{R}-$*espaço vetorial*, definindo $[u,v]=u\times v$, para quaisquer $u,v\in\mathbb{R}^3$.

Discussão dos Resultados

Notadamente as estruturas algébricas aqui relacionadas têm uma forte ligação entre si. De certo modo por imposição ou supressão de algumas propriedades podemos ir de uma estrutura para outra e observar como deve ser a abordagem de uma situação problema, mediante a estrutura em que ela ocorre.

Os parágrafos que seguem são uma breve discussão à respeito de exemplos de algumas estruturas algébricas que podem ser relacionadas com as discussões feitas neste trabalho.

Se Vé uma álgebra associativa sobre um corpo K, temos então que Vcom suas operações de soma e multiplicação de vetores formam um anel. Logo, pelo fato de V ser um anel, segue que podemos fazer de V, um V- *módulo* sobre si mesmo.

Pode ser provado que em uma álgebra V, o produto por escalares comuta com o produto da álgebra e é distributivo em relação a ele, ou seja, para todos x,y em V e a em K, vale que $a(xy)=(ax)y=x(ay)$. De fato, sendo 1_K o elemento neutro multiplicativo de K, temos $(ax)y = (ax)(1_K y) = (a1_K)(xy) = a(xy)$ enquanto que $x(ay) = (1_K x)(ay) = (1_K a)(xy) = a(xy)$.

O espaço das matrizes quadradas reais M_n $(\mathbb{R})$ é uma álgebra de Lie com o colchete definido por: $[A, B] = AB - BA$. De fato, dados $a, b \in \mathbb{R}$ e $A, B, C \in M_n$ $(\mathbb{R})$, vale que $[aA + bB, C] = (aA + b)C - C(aA + bB) = aAC + bBC - aCA - bCB = a(AC - CA) + b(BC - CB) = a[A, C] + b[B, CB]$. Analogamente, podemos mostrar que $[C, aA + bB] = a[C, A] + b[C, B]$. Logo o colchete aqui definido é bilinear.

Além disso, vale que $[A, A] = AA - AA = 0$ e o colchete é anti-simétrico.

Por fim, vale a identidade de Jacobi,

$\big[A, [B, C]\big] + \big[B, [C, A]\big] + \big[C\ [A, B]\big] = A[B, C] - [B, C]A + B[C, A] - C[A, B] - [A, B]C=$
$A(BC-CB) - (BC-CB)A-B(CA - AC) - (CA - AC)B + C(AB - BA) - (AB - BA)C =$
$ABC-ACB-BCA+CBA+BCA - BAC - CAB + ACB + CAB - CBA - ABC + BAC = 0.$

Sendo V um espaço vetorial qualquer, definindo que $[x, y] = 0$, para quaisquer x, y em V, é de imediata verificação que V, munido desse colchete de Lie, é uma álgebra de Lie. As álgebras de Lie com colchete definido desta forma recebem o nome de *álgebras de Lie abelianas.*

Conclusão

Uma compilação dos principais livros de estruturas algébricas utilizados nas universidades brasileiras mostra diferentes linhas de abordagens, em se tratando da introdução das estruturas algébricas. Podemos observar, por exemplo, que enquanto [2] segue a ordem clássica de Grupos, Anéis e Corpos, o tratamento dado por [4] e [5] consiste em introduzir inicialmente a estrutura de anel, explorando o anel $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.

De acordo com as propostas e objetivos apresentados, a linha de abordagem que utilizamos neste trabalho é a clássica de [Hygino], com contribuições de [3] e [7] para o delineamento das estruturas não desenvolvidas por [1] e [2].

As argumentações apresentadas neste trabalho propiciou que conhecêssemos estruturas algébricas novas. Obtivemos as técnicas convencionais de, a partir de uma estrutura algébrica dada, definir outra. Mais importante, possibilitou que os alunos envolvidos adquirissem a capacidade de estabelecer conexões entre as principais estruturas algébricas e de generalizar conceitos e resultados, compreendendo certas particularidades.

Bibliografia

[1] Coelho, F. U. e Lourenço, M. L. **Um Curso de Álgebra Linear.** 2ª ed. São Paulo: Edusp, 2005.

[2] Domingues, Hygino. **Álgebra Moderna**, São Paulo: Atual Editora LTDA, 1999.

[3] Fraleigh, John B., **A First Course in Abstract Algebra**, 5ª Edition, Addison – Wesley Publishing Company, 1994.

[4] Garcia, Arnaldo e Lequain, Yves – **Álgebra: um curso de introdução**, Projeto Euclides, IMPA, 1988.

[5] Gonçalves, Adilson, **Introdução à álgebra** – Projeto Euclides – Rio de Janeiro, 1979.

[6] PIAGET, Jean. **Fazer e Compreender.** São Paulo: Melhoramentos. Editora Universidade de São Paulo, 1978.

_____. **A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imitação e representação.** Rio de Janeiro: LTC, 1990.

_____. **O Nascimento da Inteligência na Criança.** Rio de Janeiro: Guanabara, 1991.

[7] San Martin, L. A. B. **Álgebras de Lie.** Campinas, Editora da Unicamp, 1999.

[8] VYGOTSKY, Lev Semenovich. **Pensamento e Linguagem.** São Paulo, Martins Fontes, 3ª edição, 1991.

_____. **A formação social da mente.** 6. Ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

Antonio Carlos Tamarozzi

Av. Ranulpho Marques Leal, nº 3484, – Bairro Distrito Industrial

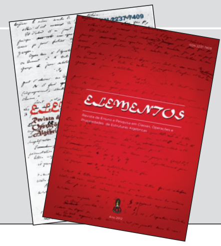
Cidade Três Lagoas – Estado – MS CEP: 79610-160

e-mail : act.ufms@gmail.com

Tels.: 0xx67-3521-2140 e 0xx67-3509-3779

Revista Elementos • 2ª edição • ano 2012 • 27-41

Revista
ELEMENTOS



Sequências que Definem o Grau de uma Função

Dedicado ao 81º aniversário de meu pai

José Ivan da Silva Ramos
Universidade Federal do Acre

Resumo

Por comparação objetos matemáticos podem ser identificados dentro de universos mais simples. A existência de uma correspondência biunívoca entre o conjunto das sequencias quase nulas e um subconjunto do conjunto das funções reais permite que se faça uma defesa do conceito de grau de determinadas funções.

Abstract

By comparison mathematical objects can be identified within universes simpler. The existence of one-one correspondence between the set of sequences near zero and a subset of the set of real functions allows you to make a defense of the concept of degree of certain functions.

Palavras Chaves: Sequências, funções, polinômios, isomorfismos e grau.

Introdução: Justificativa e Objetivos

Comecei a carreira do magistério nas últimas séries do ensino ginasial (hoje denominado de ensino fundamental). Depois de um ano passei a atuar também no 2º grau (hoje chamado de ensino médio). De lá para cá já são 26 anos procurando desenvolver minhas habilidades e ensinar com certa responsabilidade os temas relacionados com a Matemática. A opção pela abstração da Álgebra apareceu muito cedo e junto as mais diversas angústias.

Tão necessário como é a padronização da linguagem matemática, constituída de símbolos, fórmulas e proposições, que se acumulam ao longo do tempo, é a interpretação de tudo aquilo que podemos apreciar e “saborear” ao lermos um texto de Matemática. Leitura que imprescindivelmente deve ser feita corretamente, em obediência às regras gramaticais do português, do inglês ou de qualquer outra língua em que ele se traduz.

Muitas vezes, nas variadas tentativas de justificarmos as regras ou propriedades inerentes aos objetos matemáticos podemos, por empirismo, formalizar conceitos distantes do rigor que essa ciência exige.

A proximidade dos alunos dos cursos de graduação e pós-graduação, especialmente aqueles cursos ligados à Matemática e às Tecnologias, nos faz participar de várias realizações como, por exemplo, o sucesso dos alunos em uma disciplina mais específica da Matemática ou de angústias como as “confusões” que certas orientações de leitura ou uso indevido de notação podem provocar. Uma discussão que presenciei se refere a um grupo de alunos por não estarem aceitando o fato de que “zero é um número par”. A justificativa dada, inclusive por pessoas mais experientes, era de que “esse número inteiro não é nada”. Uma afirmação descuidada. Outra girava em torno de que vale a igualdade $\sqrt{16} = -4$, já que $(-4)^2 = 16$, mais uma confusão com claras definições matemáticas.

Atualmente leciono uma disciplina de Álgebra Básica no 1º período de um Curso de Licenciatura em Matemática e outra disciplina de Álgebra em um Curso de mestrado em Matemática. Esse último, uma ação conjunta entre a UFAC e a UFAM. Isso permite que eu faça constantes avaliações quanto à forma de abordar e dosar os conteúdos relacionados com essas disciplinas.

Numa das aulas da graduação, onde o objeto de estudo era o conjunto das funções reais, após definir a adição de funções, usei uma função específica, chamando-a de “função do 2º grau”. Educadamente um dos alunos fez um questionamento, inclusive dizendo que também se sentia privado do “direito” de usar esse “nome” para uma função que, para ele era assim chamada e que, agora, na Universidade, foi aconselhado a chamá-la de “função quadrática”. Uma “boa justificativa” para isso era a ausência de resposta para a natural pergunta: se essa função tem grau, então qual é o grau da função exponencial, por exemplo? Depois de uma breve conversa a respeito de como essa informação chegou para a turma, pude constatar que a mesma não foi feita de forma irresponsável. Havia uma motivação para que isso fosse realmente colocado para os alunos. Mesmo assim, resolvi intervir. Adiantei aos alunos que assim, por comparação com os outros elementos desse conjunto de funções, poderíamos realmente ser levados a divulgar que seria incorreto insistir no uso desse termo. Mas, como os polinômios em breve seriam tocados em nossas aulas, poderíamos em breve fazer uma defesa da permanência da relação do grau com determinadas funções reais. Essa é a principal motivação para eu ter me dedicado a escrever esse pequeno relato.

A descrição do conjunto $\mathbb{P}$ dos polinômios e o conceito de homomorfismo serão colocados em nossa 3ª seção de modo a darmos a exata justificativa em defesa de que podemos considerar o grau de certas funções reais.

Fundamentos Teóricos - Metodológicos

Apesar das várias vertentes metodológicas é preciso entender que, independentemente do que elas recomendam, o estudo dos vários conceitos matemáticos hoje já sistematizados depende incondicionalmente da uniformização de uma linguagem universal.

Por questão de liderança de uma pessoa ou Instituto, poderíamos adotar uma corrente filosófica como a da Escola Pitagórica. Não existiria chance alguma para questionamentos que conflitam com uma ideia já colocada. Mas, assim, a manutenção de uma boa proposição matemática poderia estar em risco mediante o ceticismo de pensadores que se dedicassem a suscitar dúvidas, substituindo o mérito e o rigor de uma verdade matemática por um consenso filosófico.

Muitas tentativas de formulações Matemáticas nos levam a realizar pequenos testes. Em geral, perguntas simples nos levam a concluir resultados mais gerais. Porém, um "descuido" pode ser o caminho para a construção de formulações absurdas.

Segundo o suíço Jean Piaget, o principal objetivo da educação é criar indivíduos capazes de fazer coisas novas e não simplesmente repetir o que as outras gerações fizeram, dado que as estruturas operatórias da inteligência não são inatas. Porém, em se tratando da Matemática, caminhamos mais rápido na repetição e aprendizado dos conceitos já postos do que na formalização de um conceito científico novo.

Os conhecimentos e conceitos científicos se desenvolvem a partir de propriedades mais complexas dos objetos matemáticos e se manifestam através do caráter consciente e da voluntariedade, convertendo-se em experiências pessoais e situações concretas.

O desenvolvimento das Ciências, principalmente o desenvolvimento daquelas ciências que, em essência, primam pela generalização, pela abstração e pelo investimento em novas descobertas, é impulsionado por correntes filosóficas do pensamento matemático como o construtivismo, o formalismo e o logicismo. Seguindo ou não uma dessas correntes de pensamento, não podemos ignorar as mais variadas formas de vermos e relacionarmos os objetos matemáticos.

Ações Desenvolvidas

Antes de organizar este relato em defesa da manutenção do fato de podermos atribuir um "grau" para certas funções reais, procurei organizar os argumentos de forma que os conceitos matemáticos que fossem abordados fossem direto à questão que motivou a discussão que está sendo relatada aqui.

Fiz algumas consultas a respeito de o termo "grau" ser atribuído a uma função real. Alguns colegas devolveram a pergunta, certos de que isso é algo velho e já aceito desde as últimas séries do ensino fundamental. Outros, já informados de uma nova forma de discurso a esse respeito, além de aceitarem as novas recomendações: **função não tem grau**, explicaram que o que teria levado eles a aceitarem essa ideia é o fato de que não podemos atribuir um grau a cada uma das funções reais. Qual seria, por exemplo, o grau da função real definida por *senx*? Essa pergunta me foi feita com o intuito de por fim à conversa. Porém, entendi que ela deveria encerrar esse o assunto. Cada vez que eu abordava um colega de estudo procurava falar dos homomorfismos bijetores, começando com aqueles que identificam cada número complexo com um vetor de $\mathbb{R}^2$ ou com uma matriz quadrada de ordem 2. Por fim, lembrava-os de que os polinômios, de fato, são as (funções) sequências quase nulas e que poucas vezes eu vi os colegas professores fazerem essa abordagem. Minhas explicações eram dadas de forma clara, apoiadas nas descrições que faço a seguir.

1. O Conjunto $\mathbb{P}_n\,(x)$ dos polinômios de grau no máximo n

Um polinômio pode ser identificado como uma *sequência de elementos em* $\mathbb{R}$ (o corpo dos números reais) ou $\mathbb{C}$ (o corpo dos números complexos). Essa sequência é formada pelas transformadas de uma função que age de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1. Definição: Denominamos de *sequência real* (*numérica*) ou *complexa* a toda função f que possui domínio $D(f) = \mathbb{N}$ e contra domínio $CD(f) = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.2. Exemplos:

1. A função $\begin{array}{l} g\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad n \longmapsto g(n) = (-1)^n \end{array}$ tem como *conjunto imagem*, $\mathrm{Im}(g) = g(\mathbb{N}) = \{g(n)/n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$

2. Também é uma função $\begin{array}{l} l\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad n \longmapsto l(n) = \frac{1}{n+1} \end{array}$. Aqui, temos que $Im(l) = l(\mathbb{N}) = \{l(n)/n \in \mathbb{N}\} = \left\{\dots, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

Ao definir uma sequência **iremos considerar** os valores que a função produz quando atua em $\mathbb{N}$. Em geral, denotamos por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

No exemplo 2, podemos escrever $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$. No exemplo 1, $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, \dots)$.

1.3. Definições:

i) Se para uma seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ temos que $a_n = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$, dizemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *sequência nula*.

ii) Se para $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vale que $a_n = r \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $\forall\, n \in \mathbb{N}$, dizemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *sequência constante*.

iii) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $a_n \neq 0$ para algum $n \leq m \in \mathbb{N}$ e $a_n = 0, \forall\, n > m$, dizemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *sequência quase nula*.

iv) Duas sequencias $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são *iguais* se, e só se, $a_i = b_i, \forall\, i \in \mathbb{N}$.

1.4. Observação: Consideremos o conjunto

$$\mathbb{P} = \{\, (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \,/ a_i \in \mathbb{R};\, i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ e } n \in \mathbb{N}\},$$

das sequências quase nulas, juntamente com a sequencia nula. Então, em $\mathbb{P}$ estão bem definidas as seguintes operações: $\forall\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{P}$:

$+: (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_m)_{m\in\mathbb{N}} = (c_t)_{t\in\mathbb{N}}$, tal que $c_t = a_t + b_t, \forall\, t \in \mathbb{N}$.

$\cdot: (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_m)_{m\in\mathbb{N}} = (d_l)_{l\in\mathbb{N}}$, onde $d_l = \sum_{l=k+j} a_k b_j$, $\forall\, l \in \mathbb{N}$.

1.5. Exemplos:

1. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 0, 2, 0, 0, \cdots)$ e $(b_m)_{m\in\mathbb{N}} = (2, 2, 2, 2, 2, 0, \dots)$, temos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_m)_{m\in\mathbb{N}} = (c_t)_{t\in\mathbb{N}} = (1, 2, 4, 2, 2, 0, 0, \dots)$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_m)_{m\in\mathbb{N}} = (d_l)_{l\in\mathbb{N}}$, onde

$d_0 = a_0 b_0 = 2$

$d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = -2$

$d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 2$

$d_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = -2 + 0 + 4 + 0 = 2$

$d_4 = a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0 = -2 + 0 + 4 + 0 + 0 = 2$ e

$d_5 = a_0 b_5 + a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1 + a_5 b_0 = 0 + 0 + 4 + 0 + 0 + 0 = 4.$

Continuando com esses cálculos, vemos que $d_6 = d_5 = 4$ e $d_7 = d_8 = \cdots = 0$. Logo, $(d_l)_{l\in\mathbb{N}} = (-2, -2, 2, 2, 2, 4, 4, 0, 0, \dots)$.

2. Considerando as sequências

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) = (-1)^n + 3 \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} g: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto g(n) = \begin{cases} n(n-1)(n-2); se\ n \leq 3 \\ 0, se\ n > 3 \end{cases} \end{aligned}.$$

temos

$$f+g\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto (f+g)(n) = f(n) + g(n) = \begin{cases} (-1)^n + 3 + n(n-1)(n-2); se\ n \leq 3 \\ (-1)^n + 3; n > 3 \end{cases}.$$

Essa função determina a sequência $(4, 2, 4, 8, 4, 2, 4, 2, \dots)$, cujo 7º termo é o número 4. **De outra forma:** Tomando a sequência $(4, 2, 4, 2, \dots)$ definida por f e a sequência $(0, 0, 0, 6, 0, 0, \dots)$ definida por g, temos a soma $(4, 2, 4, 8, 4, 2, 4, 2, \dots)$ que é a sequência definida pela função $f+g$.

Cuidado: Considerando a função produto (comumente definida no Cálculo),

$$f.g\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto (f.g)(n) = f(n).g(n) = \begin{cases} ((-1)^n + 3).n(n-1)(n-2); se\ n \leq 3 \\ ((-1)^n + 3).0 = 0; n > 3 \end{cases},$$

obtemos a sequência $(0, 0, 0, 12, 0, 0, \dots)$. Enquanto que calculando conforme a definição em 1.4 temos

$$(4, 2, 4, 2, \dots).(0, 0, 0, 6, 0, 0, \dots) = (0, 0, 0, 24, 12, 24, 12, \dots)$$

que é claramente diferente de $(0, 0, 0, 12, 0, 0, \dots)$.

Para as operações de adição e multiplicação definidas em $\mathbb{P}$, valem e são de fácil verificação as seguintes propriedades: $\forall\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}};\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}};\ (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{P}$,

$\boldsymbol{A_1}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + [(b_n)_{n\in\mathbb{N}} + (c_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}] + (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\boldsymbol{A_2}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} + (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\boldsymbol{A_3}$: $\exists\ 0 = (0)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 0, 0, 0, \dots) \in \mathbb{P}$ e $0 + (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + 0 = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\boldsymbol{A_4}$: $\exists -(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{P}$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + [-(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] = -(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$

$\boldsymbol{M_1}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}.(c_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.(b_n)_{n\in\mathbb{N}}].(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\boldsymbol{M_2}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}.(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\boldsymbol{M_3}$: $\exists$ 1$= (1, 0, 0, 0, \dots) \in \mathbb{P}$ tal que 1.$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.1$= (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\boldsymbol{D}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.[(b_n)_{n\in\mathbb{N}} + (c_n)_{n\in\mathbb{N}}] = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}.(b_n)_{n\in\mathbb{N}} + (a_n)_{n\in\mathbb{N}}.(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.6. Definição: O conjunto $\mathbb{P}$ munido das operações de adição e multiplicação aqui definidas, é chamado de *conjunto dos polinômios de grau no máximo m*.

Os elementos de $\mathbb{P}$ serão representados por letras minúsculas de nosso alfabeto. Além disso, para $f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, 0, 0, \dots) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $a_n = 0\ se\ n > m$, temos que:

i) Se $a_m \neq 0$, então a_m é o *coeficiente dominante* de f.

ii) Se a_m é o coeficiente dominante de f, dizemos que m é o *grau* do polinômio f.

iii) Por $\partial f = m$ denotamos o grau do polinômio *f*.

iv) Não se define o grau do polinômio nulo $0 = (0,0,0,\dots)$, já que não existe $a_n \neq 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos em $\mathbb{P}$ o elemento $x = (0,1,0,0,\dots)$. Este elemento é denominado de *identidade*. Precisamente, a identidade x é um polinômio de grau um, cujo coeficiente dominante é um.

Valem os seguintes cálculos

$x^0 = 1 = (1,0,0,\dots)$

$x^1 = x = (0,1,0,0,\dots)$

$x^2 = x.x = (0,1,0,0,\dots).(0,1,0,0,\dots) = (0,0,1,0,0,\ \dots)$

$x^3 = x^2.x = (0,0,1,0,0,\dots).(0,1,0,0,\dots) = (0,0,0,1,0,0,\dots)$

$x^n = (0,0,\dots,0,1,0,0,\dots)$, onde 1 é o coeficiente dominante e aparece na posição n (é o $(n+1)$-ésimo termo da sequência).

1.7. Observação: O conjunto $\mathcal{C} = \{f \in \mathbb{P}/f = (r,0,0,\dots) \text{ com } r \in \mathbb{R} \text{ ou } \partial f = 0\}$, munido das operações de a adição e a multiplicação, definidas em $\mathbb{P}$, é denominado de conjunto dos *polinômios constantes*. Podemos identificar cada elemento de $\mathcal{C}$ como um elemento de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Isso pode ser feito assim: $(0,0,0,\dots) \equiv 0$, $(1,0,0,\dots) \equiv 1$ e $\left(-\sqrt{2},0,0,\dots\right) \equiv -\sqrt{2}$. Em geral, $\forall\, r \in \mathbb{R}$, pomos $(r,0,0,\dots) \equiv r$.

1.8. Definição: Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathbb{P}$ o conjunto de polinômios definido em 1.6. Para todo $f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0{,}0, \dots) \in \mathbb{P}$ e $\forall\, t \in \mathbb{R}$, podemos definir: $\cdot$: $t.f = t.(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, \dots) = (ta_0, ta_1, ta_2, \dots, ta_n, 0, \dots) \in \mathbb{P}$.

Valem as seguintes propriedades: $\forall\, r, s \in \mathbb{R}$ e $\forall\, f, g \in \mathbb{P}$,

$\boldsymbol{P_1}$: $r.(f.g) = (r.f).g = f.(r.g)$

$\boldsymbol{P_2}$: $(r.s).f = r.(s.f)$

$\boldsymbol{P_3}$: $(r+s).f = r.f + s.f$

$\boldsymbol{P_4}$: $r.(f+g) = r.f + r.g$

Essa multiplicação (externa) de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{P}$ permite escrever um polinômio de outra forma: para todo $f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0{,}0, \dots) \in \mathbb{P}$, vale que

$f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0{,}0, \dots) =$

$$= (a_0, 0{,}0, \dots) + (0, a_1, 0{,}0, \dots) + \cdots + (0, 0, \dots, a_n, 0{,}0, \dots)$$
$$= a_0(1, 0{,}0, \dots) + a_1(0, 1, 0{,}0, \dots) + \cdots + a_n(0, 0, \dots, 1, 0{,}0, \dots)$$
$$= a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n.$$

Essa é a *forma algébrica* do polinômio f.

1.9. Observação: Sejam $\mathbb{P}$ o conjunto dos polinômios e f qualquer elemento em $\mathbb{P}$. Então, a forma algébrica de f é única.

Demonstração: Consideremos a definição no item 4) de 1.3: se tivermos as igualdades $f = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n = b_0x^0 + b_1x^1 + \cdots + b_nx^n$, vale que $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0{,}0, \dots) = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, 0{,}0, \dots)$. Equivalentemente, temos $a_i = b_i, \forall\, i = 0, 1, 2, \dots, n$. Isso mostra que $f = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$ é a (única) forma algébrica de f.

Essa observação permite que reescrevamos o conjunto $\mathbb{P}$ como sendo $\mathbb{P}_n(x) = \{a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \,/ a_i \in \mathbb{R}; i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$, considerando a identidade $x = (0, 1, 0, 0, \dots)$ e a unicidade da forma algébrica de cada elemento em $\mathbb{P}$.

1.10. Exemplos:

1. O polinômio $t = (2, 0, -1, 3, 0, 0, \dots)$ tem a seguinte forma algébrica:

$$t = 2(1{,}0{,}0{,}0{,}0, \dots) + 0(0{,}1{,}0{,}0{,}0, \dots) + (-1)(0{,}0{,}1{,}0{,}0, \dots) + 3(0{,}0{,}0{,}1{,}0, \dots)$$
$$= 2x^0 + 0x + (-1)x^2 + 3x^3.$$

2. Para os elementos de $\mathbb{P}$: $l = (2, 1, 0, 0, \dots)$ e $J = (0, 1, 0, 4, 0, 0, \dots)$. Temos que:

i) o polinômio $(2{,}1{,}0{,}0{,}0{,}0, \dots).(0{,}1{,}0{,}4{,}0{,}0, \dots) = (0{,}2{,}1{,}8{,}4{,}0, \dots)$ é o produto $l.j$

ii) as formas algébricas de l e j são: $l = (2{,}1{,}0{,}0{,}0{,}0, \dots) = 2x^0 + 1x^1 = 2 + x$ e $j = (0{,}1{,}0{,}4{,}0{,}0, \dots) = 0x^0 + 1x^1 + 0x^2 + 4x^3 = x + 4x^3$, respectivamente. Daí,

$$l.j = (2 + x^1).(0x^0 + x^1 + 0x^2 + 4x^3)$$
$$= 0x^0 + 2x^1 + 0x^2 + 8x^3 + 0x^1 + 1x^2 + 0x^3 + 4x^4$$
$$= 0x^0 + 2x^1 + 1x^2 + 8x^3 + 4x^4 = 2x + x^2 + 8x^3 + 4x^4.$$

Comparando i) e ii), temos $l.j = (0{,}2{,}1{,}8{,}4{,}0, \dots) = 2x + x^2 + 8x^3 + 4x^4$.

2. O Conjunto das funções reais

Para podermos comparar um polinômio com um tipo especial de função real, faremos agora uma pequena descrição da estrutura do conjunto $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f$ é uma função$\}$ das funções reais.

2.1. Observação: Considere o conjunto $\mathcal{F}$. Definindo que $\forall f, g \in \mathcal{F}$:

$$\begin{array}{rl} f+g: \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rl} f.g: \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto (f.g)(x) = f(x).g(x) \end{array}$$

valem e é de fácil verificação que, $\forall f, g, h \in \mathcal{F}$, as propriedades $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_3}$, $\boldsymbol{A_4}$, $\boldsymbol{M_1}$, $\boldsymbol{M_2}$, $\boldsymbol{M_3}$ e $\boldsymbol{D}$ já observadas anteriormente para as operações de adição e multiplicação no conjunto $\mathbb{P}_n(x)$ dos polinômios. Nesse caso temos que

$$\begin{array}{rl} o: \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto o(x) = 0 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rl} -f: \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto -f(x) = -x \end{array}$$

são, respectivamente, os elementos neutro e inverso para a operação de adição aqui definida: $\forall\, x \in \mathbb{R}$, claramente podemos calcular: $(o+f)(x) = o(x) + f(x) = o(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x) = f(x) + 0 = f(x) + o(x) = (f+o)(x)$. Isso nos mostra que o é o elemento neutro para a adição. Também são claras as igualdades $(-f+f)(x) = -f(x) + f(x) = 0 = o(x) = f(x) + \ (-f(x)) \ = (f + \ (-f)\ )(x)$. O que mostra que $-f$ é o inverso aditivo do elemento f de $\mathcal{F}$.

Com relação à multiplicação,

$$\begin{array}{rl} 1: \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 1\,(x) = 1 \end{array}$$

é o elemento neutro. Vale que $(1.f)(x) = 1\,(x).f(x) = 1.f(x) = f(x) = f(x).1 = f(x).1\,(x) = (f.1)(x); \forall\, x \in \mathbb{R}$.

2.2. Definição: Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathcal{F}$ o conjunto das funções reais. Então, $\forall\, f \in \mathcal{F}, \forall\, r \in \mathbb{R}$, podemos definir a função produto,

$$\because \begin{array}{rl} rf: \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto (rf)(x) = rf(x). \end{array}$$

Valem as seguintes propriedades: $\forall\, r, s \in \mathbb{R}$ e $\forall\, f, g \in \mathcal{F}$,

i) $r.(f.g) = (r.f).g = f.(r.g)$

ii) $(r.s).f = r.(s.f)$

iii) $(r+s).f = r.f + s.f$

iv) $r.(f+g) = r.f + r.g$

2.3. Observação: Dentro de $\mathcal{F}$, o conjunto

$$P = \left\{ \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \to f(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \end{array} \Big/ a_i \in \mathbb{R};\ i = 0, 1, 2, \ldots, n \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\},$$

munido das operações de adição e multiplicação definidas em 2.1, goza, por herança, das propriedades $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{M_1}$, $\boldsymbol{M_2}$ e $\boldsymbol{D}$. Além disso, se colocarmos $a_i = 0 \in \mathbb{R};$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ ou $a_0 = 1$ e $a_i = 0;$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ ou considerarmos os inversos aditivos (que existem!) dos coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$; i. e., os números $-a_i \in \mathbb{R}; i = 0, 1, 2, \ldots, n,$ para $n \in \mathbb{N}$, vemos as funções $o, 1,$ e $-f$ são elementos de P.

Demonstração: É imediata!

Faremos a seguir algumas considerações sobre os homomorfismos. Essas funções especiais nos ajudarão a compreender a identificação que pode ser feita entre os elementos de $\mathbb{P}_n(x)$ e P.

3. Homomorfismos

Abrimos esta seção com uma definição geral de homomorfismo. Comumente ela é feita sem levar em conta a operação definida em cada um dos conjuntos de domínio e contra domínio da função relacionada. Isso é comumente entendido por quem tem familiaridade com a problemática aqui envolvida.

3.1. Definição: Sejam X e Y conjuntos não vazios. Suponha que $*$ é uma operação bem definida em X e $\square$ é uma operação bem definida em Y. Uma função

$$\begin{array}{rcl} \varphi: X & \longrightarrow & Y \\ x & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$$

é dita um *homomorfismo* se, e só se, $\forall\ a, b \in X$, vale que $\varphi(a * b) = \varphi(a) \square \varphi(b)$.

Um homomorfismo injetivo é denominado *monomorfismo*. Se for sobrejetivo é denominado *epimorfismo*. Se for bijetivo é denominado *isomorfismo*.

3.2. Observação: (As Leis do Cancelamento): Seja A um conjunto não vazio. Dizemos que valem as *leis do cancelamento* para uma operação $*$ definida em A, se para $a, b, c \in A$, temos que

$$a * b = a * c \Leftrightarrow b = c \text{ (cancelamento à esquerda) e}$$

$$b * a = c * a \Leftrightarrow b = c \text{ (cancelamento à direita)},$$

Na maioria das vezes essas regras ou leis são permitidas ou pela existência de elemento inverso para a operação $*$ ou pela não existência de divisores de zero para essa operação. É o que pode ser experimentado na tentativa de obtermos a solução de $2x = 6$, bastando que seja $U = \mathbb{Q}$ o conjunto universo dessa equação.

3.3. Observação: Se φ é um isomorfismo de X em Y, valem as seguintes propriedades:

a) Se e é o elemento neutro para uma operação $*$ definida em X, e' o elemento neutro para uma operação $\square$ definida em Y e em Y valem as leis do cancelamento, então $\varphi(e) = e'$.

b) Se x^{-1} é o inverso de um elemento x em X, então $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$.

c) Se φ é bijetor, $\exists\ \varphi^{-1}$, o inverso de φ, e φ^{-1} é um homomorfismo (bijetor).

Demonstração: a) Primeiramente, temos que $e * e = e$. Daí vale que

$$e' \square \varphi(e) = \varphi(e) = \varphi(e * e) = \varphi(e) \square \varphi(e);$$

já que φ é um homomorfismo. Cancelando $\varphi(e)$ em ambos os membros da igualdade, vemos que $\varphi(e) = e'$.

b) De $x * x^{-1} = e$, obtemos $\varphi(x * x^{-1}) = \varphi(e)$. Como φ é um homomorfismo, conforme o que provamos anteriormente, $\varphi(e) = e'$, vem que $\varphi(x) \square \varphi(x^{-1}) = e'$. Isto mostra que $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$.

c) Sendo φ uma bijeção, podemos definir

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : Y &\longrightarrow X \\ y &\longmapsto \varphi^{-1}(y) = x \end{aligned}$$

que é tal que $\forall\, y, y' \in \mathrm{Y}$, existem únicos $x, x' \in X$, tais que $\varphi(x) = y \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \varphi^{-1}(y)$ e $\varphi(x') = y'$. Daí, temos $\varphi^{-1}(y \square y') = f^{-1}[f(x) \square f(x')] = \varphi^{-1}[\varphi(x * x')] = x * x' = \varphi^{-1}(y) \square \varphi^{-1}(y')$. Portanto φ^{-1} é um homomorfismo.

3.4. Exemplo: A função

$$\begin{aligned} \varphi :\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ r &\mapsto \varphi(r) = (r, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

é um homomorfismo bijetor, que permite identificar cada número real com um polinômio constante e vice versa. Assim, temos $1 \equiv x^0 = 1 = (1, 0, 0, \dots)$.

A observação a seguir é o principal resultado no sentido da justificativa que daremos para que continuemos a considerar o grau de uma função.

3.5. Observação 5: Consideremos $\mathbb{P}_n(x)$, o conjunto de todos os polinômios de grau no máximo *n*, juntamente com o polinômio nulo e P, o conjunto de funções definido em 2.3. Então, vale que a função φ que associa a cada $p = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$ em $\mathbb{P}_n(x)$, a função f em P, definida por $f(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$, é um isomorfismo.

Demonstração: Que φ é bijetiva é claro! Além disso, temos que para quaisquer $p_1 = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots), p_2 = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_m, 0, 0, \dots) \in \mathbb{P}_n(x)$, vale que:

i) $\varphi(p_1.p_2) = \varphi\left(a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \dots, \sum_{n+m=k+j} a_kb_j, 0, 0 \dots\right) = f$; onde a função f, imagem de $p_1.p_1$ pelo homomorfismo φ, é definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f)(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x^1 + \cdots + \left(\textstyle\sum_{n+m=k+j} a_kb_j\right) x^{n+m} \end{aligned}.$$

Mas essa função, pela multiplicação definida em 2.1, é a função produto das funções:

$$\begin{aligned} f_1: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to g_1(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} f_2: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to g_2(x) = b_0 + b_1x^1 + \cdots + b_mx^m \end{aligned}$$

Assim, temos $\varphi(p_1.p_2) = \varphi(p_1).\varphi(p_2)$; já que $\varphi(p_1) = f_1$ e $\varphi(p_2) = f_2$.

ii) $\varphi(p_1 + p_2) = \varphi(a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, 0 + b_{n+1}, 0 + b_{n+1}, \dots, 0 + b_m) = g$ onde a função g, imagem de $p_1 + p_1$ pelo homomorfismo φ, é definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f_2)(x) = \textstyle\sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i + (0 + b_{n+1})x^{n+1} + \cdots + (0 + b_m)x^m \end{aligned}$$

onde podemos supor, sem perda de generalidades, que $n < m$. Mas essa função, conforme a adição definida na observação em 2.1, é a soma das funções f_1 e f_2 dadas acima. Portanto, vale que $\varphi(p_1 + p_2) = \varphi(p_1) + \varphi(p_2)$; já que temos $\varphi(p_1) = g_1$e $\varphi(p_2) = g_2$. Isso mostra que φ é um isomorfismo de $\mathbb{P}_n(x)$ para P.

Essa correspondência biunívoca entre os elementos desses conjuntos permite chamar de *função* polinomial *do nº grau* um elemento de P que é da forma:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \end{aligned}; \text{ onde } a_i \in \mathbb{R};\ i = 0, 1, \dots, n \text{ e } n \in \mathbb{N}$$

Discussão dos Resultados

A expectativa que temos em relação à publicação desse relato é de que a denominação do grau para uma função, do tipo que é um elemento do conjunto P, continue sendo considerada.

Mesmo para um aluno menos experiente, como os alunos que fizeram o questionamento durante uma das minhas aulas, foi possível entender a lógica dos argumentos que foram apresentados.

Se o fato de não atribuirmos um grau à função real *senx* fosse um impedimento para o uso desse conceito dentro do conjunto P, também caberia a nós questionarmos, por exemplo, o conceito de *elemento inverso*. No conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, considerando a operação de multiplicação, somente 1 e -1 são inversíveis. *O fato de não existir inverso multiplicativo para o inteiro 7 não foi um impedimento para o uso desse conceito dentro do conjunto* $\mathbb{Z}$. E, claro, não deveria.

Conclusão

Muitos dos avanços nas pesquisas dependem de como um conceito é estabelecido. Propriedades locais muitas vezes ajudam na descrição do objeto estudado e por isso têm sua importância. Quantos números primos pares existem? Todas as funções reais são deriváveis? Todas são inversíveis em relação à operação composição de funções?

Então, a negativa para o grau de uma função real que é isomorfa a um polinômio não parece se sustentar por não podermos comparar todos os elementos do conjunto $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f \text{ é uma função}\}$ com os elementos em $\mathbb{P}$.

Bibliografia

__ GONÇALVES, Adilson; **Introdução à Álgebra**; 4ª edição, Editora IMPA; Rio de Janeiro-RJ, 1999.

__ OLIVEIRA, Lindinei de e CUNHA, Thyago Silva; TCC (Trabalho de Conclusão de Curso); **Imersões de Corpos em Anéis de Matrizes**; Rio Branco-AC; 2010.

__ PEREIRA, Cleber e FERREIRA, Cristhiane de Sousa; TCC (Trabalho de Conclusão de Curso); **A Influência do Conjunto Universo nos Métodos de Resolução de Certas Equações**; Rio Branco-AC; 2008.

__ PIAGET, Jean. **Fazer e Compreender**. São Paulo: Melhoramentos. Editora Universidade de São Paulo, 1978.

____. **A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imitação e representação**. Rio de Janeiro: LTC, 1990.

____. **O Nascimento da Inteligência na Criança.** Rio de Janeiro: Guanabara, 1991.

__ VYGOTSKY, Lev Semenovich. **Pensamento e Linguagem.** São Paulo, Martins Fontes, 3ª edição, 1991.

____. **A formação social da mente**. 6. Ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

__ WALLON, H.. **L' évolution psychologique de l' enfant (Evolução Psicológica da Criança).** PUF, Paris, 1941, reed. 1974 (Andes, Rio de Janeiro, s. d.).

____. **Les origenes de la pensée chez l' enfant (Origens do Pensamento da Criança).** PUF, Paris, 1945, reed. 1963 (Manole. São Paulo. 1989).

José Ivan da Silva Ramos

Rua Maranhão, nº 133 – Bairro Bosque

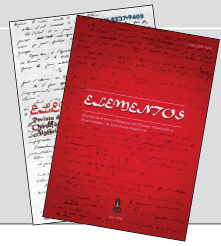
Rio Branco – Acre – CEP: 69908-240

ivanr@ufac.br

Tels.: 0xx68-3301-1416 e 0xx68-84067712

Revista Elementos • 2ª edição • ano 2012 • 42-55

Revista
ELEMENTOS



A Superfície de Riemann-Zariski

Miguel Fernández Duque
Universidad de Valladolid, Espanha

Resumo

Neste artigo vamos introduzir a superfície de Riemann-Zariski associada a um corpo de funções. Começaremos definindo as valorizações e as suas propriedades básicas. Na parte central provaremos a principal propriedade da superfície de Riemann-Zariski, a quase-compacidade. Finalmente enunciaremos o problema de uniformização local.

Abstract

In this article we will introduce the Riemann-Zariski surface of a function field. We will start defining the valuations and their basic properties. In the central part we will prove the main property of the Riemann-Zariski surface, the quasi-compactness. Finally we will enounce the local uniformization problem.

Palavras chaves: Valorização, superfície de Riemann-Zariski, uniformização local.

Introdução

Vamos começar lembrando o que é um corpo de funções, objeto sobre o qual é definida a superfície de Riemann-Zariski.

Seja V uma variedade algébrica definida sobre um corpo base k de característica 0 e algebricamente fechado. O anel de coordenadas de V é $\mathcal{O}(V) = k[x_1, \ldots, x_n]/I$ onde I é o ideal que define V. O corpo de funções racionais de V é um corpo $K = K(V)$ extensão de k, que é o corpo quociente de $\mathcal{O}(V)$. Os elementos de K são, portanto, quocientes de polinômios nas coordenadas de V e podem ser interpretados como funções racionais de V em k. A dimensão de V é o grau de transcendência da extensão $K|k$.

1. Valorizações

Definição 1.1 Uma *valorização* de $K|k$ é uma aplicação sobrejetiva $\nu : K^* \longrightarrow (\Gamma_\nu, \geq)$ é um grupo totalmente ordenado, ao qual denominamos grupo de valores de ν, verificando

- $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$;
- $\nu(x + y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\}$;
- $\nu_{|K^*} \equiv 0$.

Podemos estender a definição a K considerando como grupo de valores $\Gamma_\nu \cup \{\infty\}$, com a ordem $g < \infty$ para todo $g \in \Gamma_\nu$, e estabelecendo $\nu(0) = \infty$.

Definição 1.2. Diz-se que um subanel $R \subset K$ é um *anel de valorização* de K se

$$\forall x \in K, x \notin R \Longrightarrow x^{-1} \in R.$$

Observação 1.3.

- Se $R \subset K$ é um anel de valorização, segue da definição que K é o corpo de frações de R.
- Um anel de valorização é um anel local, cujo ideal maximal é $\mathfrak{m} = \{x \in R | x^{-1} \notin R\}$.

Como podemos ver na seguinte proposição, os dois conceitos anteriormente definidos estão relacionados.

Proposição 1.4. *Existe uma relação 1-1 (salvo isomorfismo de grupos ordenados) entre o conjunto de valorizações e o de anéis de valorização. Explicitamente, cada valorização ν tem associado um anel de valorização R_ν, e dado $R \subset K$ anel de valorização de K, existe uma valorização ν tal que $R = R_\nu$.*

Demonstração. Associado a uma valorização ν temos um anel $R_\nu = \{x \in K | \nu(x) \geq 0\}$, o qual vemos diretamente que é um anel de valorização de K, com ideal maximal $\mathfrak{m}_\nu = \{x \in R_\nu | \nu(x) > 0\}$.

Vejamos agora a implicação recíproca. Primeiro observemos que o conjunto de ideais de R está totalmente ordenado para a inclusão. Sejam I e J ideais de R, e suponhamos $I \nsubseteq J$. Seja $j \in J$ e suponhamos que existe $i \in I$ com $j/i \in R$. Então $j = i \cdot j/i \in I$. Caso contrário $\forall i \in I$, ter-se-ia $i/j \in R$, mas isto contradiz o fato de $I \nsubseteq J$, pois $i = j \cdot i/j \in J$. Portanto $J \subset I$.

Por outro lado, o grupo de unidades de R, que denotaremos por U, é um subgrupo do grupo multiplicativo K^*, e podemos considerar o grupo $\Gamma = K^*/U$. Γ é um grupo ordenado, com a ordem derivada da relação de divisibilidade de R: se $\bar{a}, \bar{b} \in \Gamma$, dizemos que $\bar{a} \leq \bar{b}$ se para $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$, a divide b em R. Como vimos antes, o conjunto de ideais de R está totalmente ordenado e, portanto, esta relação de ordem em Γ é total.

A valorização procurada não é outra que a aplicação canônica natural ao quociente $\nu : K^* \longrightarrow \Gamma = K^*/U$. Comprova-se trivialmente que verifica as condições da definição e que o anel de valorização associado é R. ■

Lembremos os conceitos de posto e posto racional de um grupo totalmente ordenado.

Um subconjunto $\Delta \subset \Gamma$ de um grupo totalmente ordenado se diz segmento se é convexo e $\Delta = -\Delta$, i.e., se verifica que

$$\beta \in \Gamma \text{ e } -\alpha \leq \beta \leq \alpha \text{ para algum } \alpha \in \Delta \Longrightarrow \beta \in \Delta.$$

Um subgrupo de Γ diz-se subgrupo isolado se é um segmento. O conjunto dos segmentos de um grupo é totalmente ordenado por inclusão. Chamamos posto de Γ e denotamos por $rank(\Gamma)$ ao cardinal do conjunto de subgrupos isolados próprios (diferentes de Γ).

O posto racional de Γ é o máximo cardinal de um subconjunto de elementos $\mathbb{Z}$-independentes de Γ. Denotamo-lo por $rat.rank(\Gamma)$.

Definição 1.5. O *posto* (*posto racional*) de uma valorização ν se define como o posto (posto racional) do seu grupo de valores.

$$rank(\nu) \coloneqq rank(\Gamma_\nu), \qquad rat.rank(\nu) \coloneqq rat.rank(\Gamma_\nu)$$

Observação 1.6.

- Existe uma relação 1-1 entre os ideais primos de R_ν e os subgrupos isolados de Γ_ν. Explicitamente temos a correspondência

  $$\mathfrak{p} \Longrightarrow \Delta_\mathfrak{p} \coloneqq \Gamma \backslash (\nu(\mathfrak{p}) \cup -\nu(\mathfrak{p}))$$

  $$\Delta \Longrightarrow \mathfrak{p}_\Delta \coloneqq \{\phi \in R_\nu | \nu(\phi) \notin \Delta\}$$

  Portanto temos

  $$rank(\nu) = dim_{Krull}(R_\nu).$$

- Tem-se a seguinte desigualdade (ver [9])

  $$rank(\nu) \leq rat.rank(\nu).$$

Por último, lembremos que um anel de valorização é um anel local e, portanto, tem sentido considerar o seu corpo residual. Como a valorização é identicamente nula sobre o corpo base k, o corpo residual será uma extensão dele.

Definição 1.7. Chamamos *corpo residual* de ν a $\kappa_\nu = R_\nu/\mathfrak{m}_\nu$. Definimos a dimensão de ν como

$$dim(\nu) = tr.deg_k(\kappa_\nu).$$

Observação 1.8. Como estamos trabalhando com um corpo base k algebricamente fechado, o corpo residual κ_ν ou é o próprio k ou caso contrário é uma extensão transcendente.

2. O Centro de uma Valorização.

Definição 2.1. Dado um corpo de funções K, dizemos que uma variedade projetiva $M \subset \mathbb{P}_k^N$ é um *modelo projetivo* de K se este é o seu corpo de funções.

Definição 2.2. Sejam $(A, \mathfrak{m})$ e $(B, \mathfrak{n})$ dois anéis locais. Dizemos que B *está dominado por* A, e denotamos por $B \preccurlyeq A$, se $B \subset A$ e $\mathfrak{n} = B \cap \mathfrak{m}$.

Definição 2.3. Sejam K um corpo de funções, M modelo projetivo de K e ν valorização sobre K. Uma subvariedade irredutível Y de M se diz *centro* de ν em M se $\mathcal{O}_{\{\mathrm{M,Y}\}} \preccurlyeq R_\nu$.

Proposição 2.4. *O centro de uma valorização ν de $K|k$ em um modelo projetivo M de K existe e é único.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que a variedade $M \subset \mathbb{P}_k^N$ não está contida em nenhum hiperplano. Caso contrário, consideraríamos $M \subset \mathbb{P}_k^{N-1}$.

Tomemos coordenadas homogêneas $(x_0 : \dots : x_N)$ e denotemos por U_i aos abertos afins $x_i \neq 0$. M está coberta por abertos afins $M = \bigcup_{i=0}^N M_i$ onde $M_i = M \cap U_i$.

Cada parte afim de M é uma variedade $M_i \subset \mathbb{A}_k^N$ definida por um ideal $\mathfrak{p}_i$. Estes ideais são a deshomogeneização de $\mathfrak{p}$, onde $M = V(\mathfrak{p})$. O fecho projetivo em $\mathbb{P}_k^N$ de quaisquer das M_i é a própria M. O anel de coordenadas de cada uma de elas é, portanto, $A_i = \mathcal{O}(M_i) = k[y_1, \dots, y_N]/\mathfrak{p}_i$. Temos que o corpo de frações de quaisquer destes anéis de coordenadas é o próprio K.

Provemos primeiro a existência do centro. Olhemos para uma carta afim, por exemplo, U_0, onde temos coordenadas $y_i = \frac{x_i}{y_i}, i = 1, \dots, n$. As coordenadas afins são elementos de K e, portanto, podemos considerar os seus valores. Podemos supor que $A_0 = \mathcal{O}(M_0) \subset R_\nu$, i.e., que os valores das coordenadas são todos positivos. Caso contrário, seja i_0 o índice da coordenada afim de menor valor. Então, na carta U_{i_0} todas as coordenadas tem valor positivo e temos $A_{i_0} = \mathcal{O}\left(M_{i_0}\right) \subset R_\nu$.

Consideremos o ideal $\mathfrak{q}_0 = A_0 \cap \mathfrak{m}_\nu \subset A_0$ e seja $Y_0 = V(\mathfrak{q}_0) \subset M_0$ a subvariedade definida por ele. Temos que $\mathcal{O}_{M_0,Y_0} = (A_0)_{\mathfrak{q}_0}$, localização de A_0 por $\mathfrak{q}_0$. Por construção temos $\mathcal{O}_{M_0,Y_0} \subset R_\nu$. Além disso, $\mathfrak{m}_{M_0,Y_0} = \mathfrak{q}_0 (A_0)_{\mathfrak{q}_0} = \mathfrak{m}_\nu \cap \mathcal{O}_{M_0,Y_0}$. Comprovamos, portanto, que a subvariedade $Y = \overline{Y_0} \subset M$ é o centro de ν em M.

Vejamos agora a unicidade. Suponhamos que Z é também centro de ν em M. Salvo mudança de coordenadas homogêneas se fosse preciso, podemos supor que $Z_i = Z \cap M_i \neq \emptyset$ e $Y_i = Y \cap M_i \neq \emptyset$ para todo i. Como vimos anteriormente, existe i tal que $A = \mathcal{O}(M_i) \subset R_\nu$, e por comodidade, vamos supor que $i = 0$.

A subvariedade Z_0 é dada por um ideal $\mathfrak{q}_0'$. Vejamos que de fato $\mathfrak{q}_0' = \mathfrak{q}_0 = A_0 \cap \mathfrak{m}_\nu$. Sabemos que $\mathcal{O}_{M_0,Y_0} = (A_0)_{\mathfrak{q}_0}$, e por ser Z centro de ν, temos que $\mathcal{O}_{M_0,Y_0} \preccurlyeq R_\nu$. Isto implica que $\mathfrak{m}_{M_0,Y_0} = \mathcal{O}_{M_0,Y_0} \cap \mathfrak{m}_\nu$, ou o que é igual, que $\mathfrak{q}_0' = A_0 \cap \mathfrak{m}_\nu$. ■

3. Valorizações Compostas

Seja ν uma valorização de $K|k$ com $rank(\nu) = r > 1$. Temos uma cadeia de subgrupos isolados

$$\Delta_r = (0) \subset \Delta_{r-1} \subset \cdots \subset \Delta_0 = \Gamma.$$

A dimensão de Krull do anel R_ν é r, logo temos uma cadeia maximal de ideais primos

$$\mathfrak{p}_r = \mathfrak{m}_\nu \supset \mathfrak{p}_{r-1} \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_0 = (0)$$

em correspondência com os subgrupos isolados ($\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_{\Delta_i}$). Se denotarmos por V_i a localização de R_ν no ideal $\mathfrak{p}_i$, temos

$$V_r = R_\nu \subset V_{r-1} \subset \cdots \subset V_0 = K$$

onde $\max(V_i) = \mathfrak{p}_i$. Além disso, como $R_\nu \subset V_i$, para todo i, todos os V_i são anéis de valorização. Se denotarmos por ν_i a valorização correspondente a V_i temos que

$$rank(\nu_i) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Uma consequência direta é que uma valorização é arquimediana, i.e., de posto 1, se e só se, o seu anel de valorização é maximal para a relação de contenção (excetuando a valorização trivial $R_\nu = K$).

Olhemos agora para um dos ideais primos $(0) \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$. Sejam $\Delta \subset \Gamma$ o seu subgrupo isolado associado, $V' = (R_\nu)_\mathfrak{p}$ o anel de valorização, ν' a valorização associada e Γ' o seu grupo de valores. A seguinte proposição, cuja demostração pode se encontrar em [9], relaciona as valorizações ν e ν'.

Proposição 3.1. *a) $\Gamma' \cong \Gamma/\Delta$ e a valorização $\nu' : K^* \longrightarrow \Gamma'$ é a composição de $\nu : K^* \longrightarrow \Gamma$ com a aplicação natural ao quociente $\lambda : \Gamma \longrightarrow \Gamma/\Delta$.*

b) O anel quociente $\bar{V} = V/\mathfrak{m}' \subset V'/\mathfrak{m}' = k_{\nu'}$, é um anel de valorização do corpo residual de ν'. A sua valorização associada $\bar{\nu}$ tem grupo de valores isomorfo a Δ. De fato, $V = \{f \in V' | f \bmod \mathfrak{p} \in \bar{V}\}$.

Definição 3.2. Diremos que a valorização ν' é a *valorização composta* com as valorizações ν' e $\bar{\nu}$. Denotaremos por $\nu = \nu' \circ \bar{\nu}$.

Temos que

$$rank(\nu) = rank(\nu') + rank(\bar{\nu})$$
$$rat.rank(\nu) = rat.rank(\nu') + rat.rank(\bar{\nu})$$

A ideia é que uma valorização de posto maior que 1 pode-se descompor em valorizações de posto menor. Em particular, se $rank(\nu) = r > 1$, temos uma decomposição única

$$\nu = \nu_1 \circ \left(\nu_2 \circ \left(\ldots \circ (\nu_r)\right)\right), \text{com } rank(\nu_i) = 1, i = 1, \ldots, r,$$

onde ν_i é uma valorização definida no corpo residual de ν_{i-1}. Igualmente, se temos uma valorização ν' de K e uma $\bar{\nu}$ do corpo residual de ν', podemos considerar a sua composição $\nu = \nu' \circ \bar{\nu}$. Além disso, temos que os corpos residuais de ν e $\bar{\nu}$ são o mesmo.

Analisemos com mais detalhe um exemplo da situação anterior. Seja $k = \mathbb{C}$ e $K = \mathbb{C}(x, y)$. Consideremos a seguinte valorização

$$\begin{aligned} \nu: K &\longrightarrow (\mathbb{Z}, \leq_{lex}) \\ x &\longmapsto (1,0) \\ y &\longmapsto (0,1) \end{aligned}$$

Primeiro, determinemos o anel de valorização, i.e., o subconjunto de K de elementos de valores não negativos. Temos que

$$V = R_\nu = \{\phi \in K \mid \nu(\phi) \geq (0,0)\} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{C}[x, y], \nu(p) \geq \nu(q)\right\}.$$

Analisemos agora o grupo de valores. Temos a seguinte cadeia de subgrupos isolados

$$\{(0,0)\} \subset \Delta = \{0\} \times \mathbb{Z} \subset \Gamma = \mathbb{Z}^2$$

e portanto temos que

$$rank(\nu) = rank(\Gamma) = 2$$

A cadeia de primos correspondentes é

$$\mathfrak{m} = (x, y)V \supset \mathfrak{p} = (x)V \supset (0).$$

Ligado ao ideal $\mathfrak{p}$ temos o anel de valorização $V' = V_{\mathfrak{p}}$. A valorização associada a V' é $\nu' = \pi \circ \nu$ onde $\pi: \Gamma \longrightarrow \Gamma/\Delta \simeq \mathbb{Z}$ é a projeção sobre o primeiro fator.

Por outro lado temos o anel quociente $\bar{V} = V/\mathfrak{p} \subset V'/\mathfrak{p} = \kappa_\nu$, anel de valorização sobre o corpo residual de ν'. A valorização correspondente é $\bar{\nu}: \kappa_\nu \longrightarrow \Delta \simeq \mathbb{Z}$.

Expliquemos por último a relação entre ν e ν' e $\bar{\nu}$. O ideal maximal de V' é gerado por x. Se associarmos a cada elemento $\phi \in K$ o elemento

$$\widetilde{\phi} = \phi x^{-\nu'(\phi)} mod\ \mathfrak{p} \in \kappa_{\nu'},$$

temos que $\nu(\phi) = \left(\nu'(\phi), \bar{\nu}(\tilde{\phi})\right)$.

Por exemplo, seja $\phi = \frac{x^2y^3-3x^6}{y^5}$. Temos que $\nu(\phi) = (2,-2)$ e $\nu'(\phi) = 2$. Por outro lado $\widetilde{\phi} = \phi x^{-2} mod\ \mathfrak{p} = \frac{y^3-3x^4}{y^5}\ mod\ \mathfrak{p} = y^{-2}\ mod\ \mathfrak{p}$, logo $\bar{\nu}(\tilde{\phi}) = -2$.

Fizemos, portanto, uma decomposição de ν, valorização de posto 2, em ν' e $\bar{\nu}$, valorização de posto 2.

4. A Superfície de Riemann-Zariski

Vamos agora a definir a superfície de Riemann-Zariski de um corpo de funções e provar a sua principal propriedade, a quase-compacidade.

Definição 4.1. A superfície de Riemann-Zariski do *corpo* K/k é o conjunto

$$S = S(K|k) = \{\nu | \nu \text{ é } uma\ valorização\ sobre\ K|k\}.$$

Vamos agora definir uma topologia em S. Para cada $D \subset K$, consideramos o conjunto $E(D) = \{\nu \in S | D \subset R_\nu\}$.

Proposição 4.2. *A família* $\{E(D) | D \subset K\ finito\}$ *é uma base de topologia para* S.

Demonstração. Temos que S está coberta pelos abertos da base, pois para todo $\nu \in S, \nu \in E(\phi)$ para todo $\phi \in R_\nu$. Por outro lado, $E(D) \cap E(D') = E(D \cup D')$. ■

Observação 4.3. Se $D = \{\phi_1, \dots, \phi_s\}$, então $E(D) = E(k[\phi_1, \dots, \phi_s])$.

Nós munimos a S de uma topologia e vamos ver agora que com ela não é um espaço T_1.

Proposição 4.4. *Dado* $\nu_0 \in S$ *temos que o fecho do conjunto* $\{\nu_0\}$ *é* $\{\nu | \nu \text{ é } composta\ com\ \nu_0\}$.

Demonstração. Lembremos que ν é composta com ν_0 se, e só se, $R_\nu \subset R_{\nu_0}$. Tomemos uma vizinhança aberta $E(D)$ de ν. Temos que

$$\nu \in E(D) \Longrightarrow D \subset R_\nu \Longrightarrow D \subset R_{\nu_0} \Longrightarrow \nu_0 \in E(D) \Longrightarrow \nu_0 \in \overline{\{\nu\}}.$$

Reciprocamente, se ν não está composta com ν_0 então existe $x \in R_\nu \backslash R_{\nu_0}$. Se tomarmos agora o aberto $E(D)$, onde $D = k[x]$, temos que $\nu_0 \notin E(D)$ enquanto que $\nu \in E(D)$ e, portanto, $\nu \notin \overline{\{\nu_0\}}$. ■

Vimos ao começo que uma valorização está inequivocamente definida pelo seu anel de valorização associado. Temos outra forma de interpretar uma valorização que vai ser útil, como uma aplicação de K no conjunto $\mathbb{Z} = \{-,0,+\}$ da seguinte forma

$$\nu(x) = \begin{cases} - & se\ x \notin R_\nu \\ 0 & se\ x \in R_\nu \backslash \mathfrak{m}_\nu \\ + & se\ x \in \mathfrak{m}_\nu \end{cases}$$

Usando esta identificação podemos ver a superfície de Riemann-Zariski como subconjunto de Z^K. De fato, podemos munir a S de uma topologia de forma que seja um subespaço topológico.

Proposição 4.5. *Considerando em Z a topologia $T = \{\emptyset, \{0,+\}, Z\}$ e em Z^K a topologia produto, S é um subespaço topológico de Z^K.*

Demonstração. Um aberto elemental da topologia produto é da forma $\prod_{x \in K} U_x$, com $U_x = Z$ exceto para um número finito de x's para os quais $U_x = \{0,+\}$. Seja $U_{x_1,\dots,x_n}$ o aberto onde $\{x_1, \dots, x_n\}$ é o conjunto de índices para os quais o aberto é $\{0,+\}$. Temos que

$$U_{x_1,\dots,x_n} \cap S = \{\nu \in S | \nu(x_i) \geq 0, i = 1, \dots, n\} = E(k[x_1, \dots, x_n])$$

e portanto a topologia de S é a induzida por a de Z^K. ■

Estamos em condições de provar o resultado de esta seção.

Teorema 4.6. *A superfície de Riemann-Zariski é quase-compacta.*

Demonstração. Tomemos primeiro um refinamento da topologia, considerando em Z a topologia discreta e em Z^K a produto. Observemos que com esta topologia as aplicações $e_x: Z^K \longrightarrow Z$ definidas para todo $x \in K$ por $e_x(f) = f(x)$ são continuas (estas aplicações são as projeções sobre o fator Z_x).

Vamos agora caracterizar S por meio de interseções de conjuntos de Z^K. Para isso temos de caracterizar as propriedades que definem uma valorização.

Um elemento $f \in Z^K$ está em S, i.e., uma aplicação $f: K \longrightarrow \{-,0,+\}$ é uma valorização se, e só se, verifica

a) $\forall x, y \in K, f(x) = -, f(y) = -$ ou $f(xy)$ e $f(x+y) \in \{0,+\}$
b) $k \subset f^{-1}(0)$
c) $\forall x \in K, f(x) \in \{0,+\}$ ou $f(x^{-1}) = +$

Estas propriedades podem ser reescritas como

a') $f \in A = \bigcap_{x,y \in K} F_{xy}$

b') $f \in B = \bigcap_{x \in K} e_x^{-1}(0)$

c') $f \in C = \bigcap_{x \in K^*} e_x^{-1}(0,+) \cup e_{1/x}^{-1}(+)$

onde $F_{xy} = e_x^{-1}(-) \cup e_y^{-1}(-) \cup \left(e_{x+y}^{-1}(0,+) \cap e_{xy}^{-1}(0,+)\right)$.

A causa da continuidade das aplicações e_x, os conjuntos que aparecem na definição de A, B e C são todos fechados e, portanto, estes também o são. Em consequência S é um fechado, pois temos que $S = A \cap B \cap C$.

Lembremos agora o enunciado do teorema de Tychonoff: *o produto arbitrário de espaços compactos é compacto*. Temos, portanto, que Z^K é compacto, e portanto S, para esta topologia, também é. Como a topologia original de S é menos fina, S também é compacta em ela. ■

5. Considerações Finais

Seja $\mathcal{L}$ um objeto definido sobre K de forma que para qualquer modelo projetivo M de K, $\mathcal{L}$ está definido sobre M e pode-se considerar o conjunto $Sing(\mathcal{L}, M) \subset M$ formado pelos pontos de M que não verificam certas propriedades (as que para nós indicaram regularidade). Este conjunto $Sing(\mathcal{L}, M)$ deve estar definido em qualquer modelo e ser fechado. Podemos agora pensar no seguinte problema:

Resolução de singularidades: Dado M_0 modelo projetivo de K, determinar outro modelo M e um morfismo birracional

$$M_0 \overset{\pi}{\leftarrow} \mathrm{M}$$

de forma que $Sing(\mathcal{L}, M) = \emptyset$.

O mais famoso exemplo deste problema é quando $\mathcal{L}$ é o próprio modelo projetivo e $Sing(\mathcal{L}, M)$ é o subconjunto de pontos singulares da variedade M. Este problema foi resolvido em 1964 por H. Hironaka (sem uso das valorizações) no caso do corpo base sobre o qual é definida a variedade M seja de característica 0.

Este mesmo problema, mas em característica positiva, não foi ainda resolvido em geral.

Consideremos agora outro problema relacionado com o anterior.

Uniformização local: Dado M_0 modelo projetivo de K e ν uma valorização, determinar outro modelo M_ν e um morfismo birracional

$$M_0 \overset{\pi_\nu}{\leftarrow} \mathrm{M}_\nu$$

de modo que se P_ν é o centro de ν em M_ν se tem que

$$\mathrm{P}_\nu \notin Sing(\mathcal{L}, \mathrm{M}_\nu).$$

Claramente a resolução de singularidades implica a uniformização local, mas não ao contrário. A ideia de O. Zariski foi tentar provar primeiro a uniformização local para depois globalizar. Vejamos sem ser muito técnicos como isto pode ser feito.

Devido à continuidade da aplicação que leva a uma valoração no seu centro, e ao lugar singular do objeto $\mathcal{L}$ ser fechado, temos que se um modelo projetivo de K da uniformização local para uma valorização, então este mesmo modelo projetivo da uniformização local para todas as valorizações de certa vizinhança aberta.

Suponhamos agora que sabemos resolver o problema de uniformização local para qualquer valorização dada. Usando o lema e a compacidade de $S(K)$ podemos fixar um número finito de valorizações $\nu_1, \dots, \nu_t$ com os seus modelos $M_{\nu_1}, \dots, M_{\nu_t}$ associados de forma que para qualquer valorização o seu centro é não singular em algum desses modelos.

Se soubéssemos *colar* modelos projetivos de uma forma apropriada, obteríamos um modelo no qual o centro de qualquer valorização é não singular. A ideia de colar modelos é a seguinte. Dados dois modelos projetivos M_1 e M_2 de K, colá-los significa determinar um novo modelo projetivo M de K e dois morfismos birracionais $\pi_i : M \longrightarrow M_i$, de forma que $\pi_i\left(Sing(\mathcal{L}, M)\right) \subset Sing(\mathcal{L}, M_i)$ para $i = 1,2$.

Mesmo não foi dito explicitamente, qualquer ponto ou subvariedade de um modelo projetivo é o centro de alguma valorização e, portanto, temos que a uniformização local junto com o colado de modelos implica na resolução global.

Foi deste modo como O. Zariski provou a resolução de singularidades de variedades de dimensão 3 em característica zero antes da prova para qualquer dimensão de H. Hironaka. Em característica positiva um trabalho recente de O. Piltant e V. Cossart (2008) prova a uniformização local de variedades de dimensão 3. Também foi provada recentemente a uniformização local para campos de vetores em característica cero por F. Cano, C. Roche e M. Spivakovsky (2011).

Estes são exemplos que mostram como o problema de uniformização local e, portanto, as valorizações podem ser usadas para resolver o problema mais geral de resolução de singularidades, mas tanto o problema de uniformização local como o colado de modelos na maior parte dos casos são ainda problemas abertos.

Referências

[1] F. Cano, C. Rouche, M. Spivakovsky: *Uniformización local en característica cero*. Revista del Seminario Iberoamericano de Matemáticas, Volumen 8, Fascículos V-VI (2008).

[2] F. Cano, C. Rouche, M. Spivakovsky: *Reduction of singularities of three-dimensional line foliations.* Preprint (2011).

[3] V. Cossart, O. Piltant. *Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic. I. Reduction to local uniformization on Artin-Schreier and purely inseparable coverings.* J. Algebra 320 (2008), no. 3, 1051–1082.

[4] V. Cossart, O. Piltant: *Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic. II.* J. Algebra 321 (2009), no. 7, 1836–1976.

[5] O. Endler: *Valuation theory*. Springer-Verlag (1972).

[6] H. Hironaka: *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*. Ann. of Math., 79 (1964), pp. 109–326.

[7] O. Piltant: *An axiomatic version of Zariski's patching theorem*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas (2012).

[8] M. Spivakovsky: *Valuations in functions fields of surfaces*. American Jornal of Mathematics, Volumen 112 (1990), 107-156.

[9] M. Vaquié. *Valuations: Resolution of singularities*. A research textbook in tribute to O. Zariski, Birkhauser (1997), 539-591.

[10] O. Zariski: *Local uniformization of algebraic varieties*. Ann. of Math., 41 (1940), pp. 852–896.

[11] O. Zariski: *Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties*. Ann. of Math., 45 (1944), pp. 472–542.

[12] O. Zariski, P. Samuel: *Commutative Algebra*. Volume 2, Van Nostrand (1958).

Miguel Fernández Duque

Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología

Universidad de Valladolid.

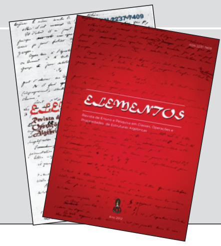
mfduque@agt.uva.es

0034 983 18 58 79

Com o apoio do programa FPI-UVa.

Revista Elementos • 2ª edição • ano 2012 • 55-61

Revista
ELEMENTOS



Homologia Semialgébrica Sobre Corpos Reais Fechados

Rodrigo Mendes Pereira
Instituto Federal do Ceará

Resumo

Neste trabalho, apresentamos um tratamento diferente para obter uma “boa” definição de grupos de homologia em espaços semialgébricos sobre $\boldsymbol{R}$, isto é, mostrar que estes grupos independem da triangulação em tais espaços. Para isto é essencial a estabilidade (sobre projeções) da estrutura semialgébrica em $\boldsymbol{R}$.

Abstract

This paper presents a different treatment to obtain a “good” defining groups of homology over semialgebraic spaces in $\boldsymbol{R}$, ie, show that these groups are independent of triangulation in such spaces. The stability (on projections) of the structure semialgébric in $\boldsymbol{R}$ is essential.

Palavras chaves: Grupos de homologia. Espaços semialgébricos.

Introdução

Neste artigo, veremos como tornar consistente uma teoria de homologia sobre espaços semialgébricos num corpo que generaliza, num certo sentido, o corpo dos números reais. O ponto é que é possível trabalhar sobre corpos, que eventualmente, não possuam a propriedade arquimediana e ainda transferir consequências topológicas conhecidas (advindas da teoria de homologia) no espaço euclidiano para um espaço K^n arbitrário.

Primeiramente, definiremos o que significa um corpo real fechado e em seguida exibimos o importante princípio de transferência de Tarski-Seindenberg que permite obter que os grupos de homologia são invariantes topológicos na estrutura semialgébrica. Esse passo é fortemente relevante, considerando que com esse resultado obtemos todos os demais objetos da teoria de homologia como sequência de Mayer-Vietoris, Teorema de Dualidade de Poincaré e ainda suas consequências, em particular, o famoso teorema de invariância do domínio. Futuramente, podemos falar de tais resultados.

O pré-requisito para esta leitura são conceitos básicos sobre a estrutura semialgébrica real (que pode ser encontrado em [4]) e grupos de homologia (que pode ser visto em [10]).

1. Corpos Reais Fechados.

Um corpo real fechado $\boldsymbol{R}$ é um corpo ordenado tal que para todo polinômio $F \in R[X]$ e para todo a, b em $\boldsymbol{R}$ com $a < b$ e $F(a)F(b) < 0$ existe $c \in R$, $a < c < b$, tal que $F(c) = 0$.

1.1 Exemplo: Note que $\mathbb{R}$ é um corpo real fechado. Vemos que tal estrutura generaliza, num certo sentido, o corpo dos números reais já que pode não possuir propriedades mais fortes como completude ou a propriedade arquimediana.

O conjunto formado por soluções de equações polinomiais com coeficientes em $\mathbb{Q}$ é um corpo real fechado denotado por $\mathbb{R}_{alg}$. Tal corpo não é completo.

O corpo das séries de Puiseux descrito por

$$R\{\{t\}\} = \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} a_k t^{\frac{k}{n}};\ m \in \mathbb{Z},\ \ n \in \mathbb{N}, a_k \in R \right\}$$

também é um corpo real fechado. Uma ordem em $R\{\{t\}\}$ é definida tomando a indeterminada t positiva e menor do que qualquer número positivo $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que, por exemplo,

$$\lambda(t) = a_p t^{\frac{p}{n}} + a_{p-1} t^{\frac{p-1}{n}} + \cdots + a_{m+1} t^{\frac{m+1}{n}} + a_m t^{\frac{m}{n}} > 0 \Leftrightarrow a_m > 0.$$

O interessante é que esta é, de fato, a única ordem compatível com as operações em $R\{\{t\}\}$. Veja também que o corpo das séries de Puiseux é não arquimediano, pois para todo $n \in \mathbb{N}, \frac{1}{t} > n$. Portanto, intervalos da forma $[0, \frac{r}{t}]$ não ficam "pequenos" já que $\mathbb{R} \supset [0, \infty] \subset [0, \frac{r}{t}]$, para todo $r \in \mathbb{Q}$.

2. Extensão de Conjuntos e Aplicações Semialgébricas sobre *R*

O teorema de Tarski-Seindenberg (ver [4], teorema 2.3) garante que um conjunto descrito por uma combinação finita de quantificadores, equações e inequações polinomiais (com uma álgebra booleana) sobre ***R*** é ainda um espaço semialgébrico. Descrições desta natureza são chamadas de fórmulas de 1º ordem. Em posse disto, consideremos $R \subset R'$ corpos reais fechados. Seja

$$A = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\varphi(y)\} \subset A_{R'} = \{y \in \mathbb{R'}^n \,|\varphi(y)\}.$$

Diremos que $A_{R'}$ é a extensão do espaço semialgébrico A a R', onde φ é uma fórmula de 1º ordem. Essa extensão está bem definida. É o que garante a seguinte proposição.

2.1 Proposição: Considere R' um corpo real fechado contendo o corpo real fechado R. Se ψ é uma sentença (fórmula sem variáveis livres) com coeficientes em R então

$$\psi \text{ é } verdade\ em\ R \ \Leftrightarrow \text{ é } verdade\ em\ R'$$

Demonstração. Ver [8], Teorema 2.80.

Tomando agora $f: S \longrightarrow T$ uma aplicação semialgébrica, podemos estender seu gráfico $G \subset S \times T \subset R^{n+m}$ e assim obter uma extensão da aplicação f a R'. Esta extensão é, portanto, definida como a função cujo gráfico é a extensão de G, $G_{\mathrm{R}'}$. Para ver que $G_{\mathrm{R}'}$ trata-se realmente de um gráfico note que a afirmação de G ser um gráfico pode ser expressa pela seguinte sentença

$$\forall x\ (\phi(x) \Rightarrow \big(\exists y \Gamma(x,y)\big) \wedge \big(\forall y \Gamma(x,y)\big) \Rightarrow$$
$$\psi(y)) \wedge (\forall y \forall y' \big(\Gamma(x,y) \wedge \Gamma(x,y')\big) \Rightarrow y = y')$$

Onde $S = \{x \in \mathbb{R}^m | \phi(x)\}$, $T = \{y \in \mathbb{R}^n | \psi(x)\}$ e $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n} | \Gamma(x, y)\}$.

Vale ressaltar que injetividade e sobrejetividade de aplicações semialgébricas sobre R são propriedades que podem ser descritas por fórmulas de 1ª ordem e, portanto estendidas a qualquer corpo real fechado contendo R (Ver [5], subseção 1.3.1).

3. Triangulação

A decomposição cilíndrica de espaços semialgébricos traz um caráter indutivo para argumentos sobre estes. Em particular o teorema de triangulação é provado usando este raciocínio.

Vamos enunciar este resultado:

3.1 Proposição: Para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ semialgébrico fechado e limitado existe um complexo simplicial finito $\mathcal{K} = \{\sigma_i\}_{i=1,\dots,q}$ e um homeomorfismo semialgébrico $\psi: |\mathcal{K}| \longrightarrow A$. Além disso, é possível escolher tal complexo de forma que dada uma família $\{A_j\}_{i=1,\dots,p}$ de subconjuntos semialgébricos em A, cada A_j é a imagem por ψ da união de simplexos abertos em $\mathcal{K}$.

Demonstração. Ver [1], Teorema 9.2.1.

Dispondo então de uma triangulação e considerando A conjunto semialgébrico em $\mathbb{R}^n$ podemos definir os grupos de homologia simplicial tal como é feito a poliedros no espaço euclidiano. Temos o complexo de cadeias j-dimensionais $\mathcal{C}_j|\mathcal{K}|$:

$$\mathcal{C}|\mathcal{K}|: \cdots \mathcal{C}_q|\mathcal{K}| \longrightarrow \mathcal{C}_{q-1}|\mathcal{K}| \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{C}_1|\mathcal{K}| \longrightarrow \mathcal{C}_0|\mathcal{K}| \longrightarrow 0$$

que permite definir usualmente os grupos de homologia simplicial

$$\mathcal{H}_q(A) = \mathcal{H}_q(|\mathcal{K}|) = \mathcal{Z}_q(|\mathcal{K}|)/\mathcal{B}_q(|\mathcal{K}|).$$

Sobre o espaço euclidiano, sabemos que tais grupos são invariantes topológicos e sua demonstração é feita através do método de subdivisão baricêntrica. Esta demonstração depende, em particular, do seguinte resultado:

3.2 Proposição: Dado um complexo simplicial finito $\mathcal{K}$ e um $\varepsilon > 0$, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que todos os simplexos de $\mathcal{K}^{(n)}$ possui diâmetro $< \varepsilon$.

Isto garante que qualquer aplicação contínua $f: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ possui uma aproximação simplicial $\mathcal{K}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{L}$ para um n suficientemente grande. Isto não vale para um corpo real fechado arbitrário, pois considerando $R\{\{t\}\}$ (ver exemplo 1.1), a proposição acima não funciona.

De toda forma, fixada uma triangulação $\mathcal{K}$ de um semialgébrico $A \subset R^n$ não é difícil mostrar que existe $\mathcal{K}' \simeq \mathcal{K}$ tal que $\mathcal{K}'$ possui coordenadas racionais em seus vértices.

Isto é importante para nossos objetivos, analisando a seguinte proposição:

3.3 Proposição: Seja K um corpo real fechado. Uma sentença φ com coeficientes em $\mathbb{Q}$ é verdade em K se, e somente se, é verdade em qualquer corpo real fechado.

Demonstração. K_{alg} é o fecho real de Q, isto é, a menor extensão real fechada (e algébrica) contendo Q. Logo, qualquer corpo real fechado R contém K_{alg}. Portanto pelo príncipio de transferência de Tarski-Seindenberg:

$$\varphi \text{ é verdade em } K \Leftrightarrow \text{ é verdade em } K_{alg} \Leftrightarrow \text{ é verdade em } R. \blacksquare$$

Agora, descrevendo os objetos que caracterizam grupos de homologia (tais como simplexos, operador bordo e cadeias) com fórmulas de 1ª ordem com coeficientes em $\mathbb{Q}$, temos como consequência desta proposição que

3.4 Corolário: Para todo corpo real fechado R, vale que

$$H_*(A_R) \approx H_*(A_{\mathbb{R}}).$$

Podemos assim estabelecer a invariância topológica:

3.5 Teorema: Sejam $\mathcal{K}$ e L dois complexos simpliciais cujos vértices possuam coordenadas racionais. Se $\mathcal{K}_R$ e L_R são extensões em R de $\mathcal{K}$ e L semialgebricamente homeomorfas então $H_*(|\mathcal{K}|_R) \approx H_*(|L|_R)$.

A demonstração deste teorema é essencialmente baseada na Proposição 2.1 e depende da seguinte afirmação que consideraremos como lema:

3.6 Lema: Existe um homeomorfismo semialgébrico

$$f_1\colon |\mathcal{K}|_{\mathbb{R}_{alg}} \longrightarrow |L|_{\mathbb{R}_{alg}}$$

se, e somente se, existe um homeomorfismo semialgébrico

$$f_2\colon |\mathcal{K}|_R \longrightarrow |L|_R$$

Para qualquer corpo real fechado R.

Com este lema, já temos por hipótese que existe um homeomorfismo semialgébrico $f_1\colon \mathcal{K}_R \longrightarrow L_R$ e assim existe $f_2\colon |\mathcal{K}|_{\mathbb{R}_{alg}} \longrightarrow |L|_{\mathbb{R}_{alg}}$. Portanto, existe $f_3\colon |\mathcal{K}|_{\mathbb{R}} \longrightarrow |L|_{\mathbb{R}}$. Logo $H_*(|\mathcal{K}|_{\mathbb{R}}) \approx H_*(|L|_{\mathbb{R}})$. Segue-se então do corolário 3.4 que $H_*(|\mathcal{K}|_R) \approx H_*(|L|_R)$.

Sobre a prova do lema:

Pelo que vimos, é fácil ver que dado um homeomorfismo semialgébrico$f_1\colon |\mathcal{K}|_{\mathbb{R}_{alg}} \longrightarrow |L|_{\mathbb{R}_{alg}}$ já se tem uma bijeção semialgébrica $f_1\colon |\mathcal{K}|_{\mathbb{R}_{alg}} \longrightarrow |L|_{\mathbb{R}_{alg}}$ bem definida. Fica restando verificar se esta extensão é, de fato, um homeomorfismo.

Isto é possível, pois bolas abertas são semialgébricos e a imagem inversa de semialgébricos é semialgébrico. Portanto, com o uso de quantificadores pode-se descrever a continuidade de f_1 e f_1^{-1}, sem muitos problemas.

O fato talvez não trivial seja a implicação contrária. Primeiramente, o gráfico de um homeomorfismo semialgébrico $f_2\colon |\mathcal{K}|_R \longrightarrow |L|_R$ (R corpo real fechado qualquer) pode ser, possivelmente, descrito por elementos que não estão em R_{alg}. A estratégia consiste então em adicionar variáveis (em número finito) obtendo uma fórmula de 1ª ordem ψ com coeficientes em $\mathbb{Q}$.

Chamando $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ tais variáveis, por hipótese, existe $b \in \mathbb{R}^n$ tal que b satisfaz ψ, ou seja, fornece um homeomorfismo $g\colon |\mathcal{K}|_R \longrightarrow |L|_R$. Da descrição da injetividade, sobrejetividade, continuidade de g e continuidade da inversa, obtemos a fórmula

$$\phi_g(Y) = \phi_1(Y) \wedge \phi_2(Y) \wedge \phi_3(Y) \wedge \phi_4(Y).$$

Agora a sentença $\exists Y \phi_g(Y)$ é verdadeira em R e usando a Proposição 2.1 é verdadeira em $\mathbb{R}_{alg}$. Com isso verifica-se a existência de um homeomorfismo entre $|\mathcal{K}|_{\mathbb{R}_{alg}}$ e $|L|_{\mathbb{R}_{alg}}$.

Referências Bibliográficas

[1] BOCHNACK, J.; COSTE, M.; ROY, M-F. *Real algebraic geometry*. Berlin: Springer-Verlag, 1998. 430 p.

[2] BIANCONI, R. *Teorias o-minimais e geometria algebrica real*. 2010. 14 p.

[3] JOSWIG, M. *Lectures 2: Puiseux series and tropicalization*. Berlin: Mathematical School, Summer, 2009.

[4] COSTE, M. *An introduction to semialgebraic geometry*. Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa. Istituti Editoriali e Poligraci Internazionali, 2000, 78 p.

[5] PEREIRA, R. M. *Homologia Semialgébrica sobre corpos reais fechados*. Dissertação de Mestrado, UFC 2012.

[6] HARTSHORNE, R. *Algebraic geometry*. Berlin: Springer-Verlag, 1977. 499 p.

[7] BHATTACHARYA, P.B., JAIN, S. K.; NAGPAUL, S. R. *Basic abstract algebra*. 2nd ed. New York: Cambridge University, c1994. 487 p.

[8] BASU, S.; POLLACK, R.; ROY, M-F. *Algorithms in real algebraic geometry*. 2nd ed. Berlin: Springer, 2006. 662 p.

[9] DELFS, H.; KNEBUSCH, M. *On the homology of algebraic varieties over real closed fields.* 163 p.

[10] MUNKRES, James R. *Elements of algebraic topology*. Menlo Park, Calif.: Addison-Wesley, c1984. 454 p.

[11] SHAFAREVICH, I. R. *Basic algebraic geometry*. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

Prof. Rodrigo Mendes Pereira

Instituto Federal do Ceará

Campus Sobral

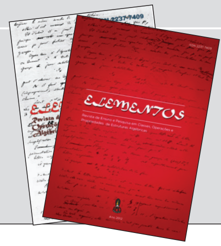
Av. Dr. Guarani, 317, Derby Clube

CEP 62.040-730 – Sobral – CE

Fone: (88) 3112.8100

Revista Elementos • 2ª edição • ano 2012 • 62-79

Revista
ELEMENTOS



Uma Breve Introdução à Teoria Das Categorias

Fernando Pereira Paulucio Reis
Universidade Federal do Espirito Santo

Maico Felipe Silva Ribeiro
Universidade Federal do Espirito Santo

Resumo

Desenvolvida por Samuel Eilenberg e Saunders MacLane no final da primeira metade do século XX, a Teoria das Categorias é uma ramificação da Matemática pura que trata de maneira uniforme modelos matemáticos distintos, (cada qual representado através de uma categoria) formalizando as relações entre eles. Ela nos fornece ambientes e mecanismos adequados para o estudo e unificação de estruturas matemáticas, bem como um ferramental com alto potencial de aplicabilidade às diversas áreas pertinentes ao conhecimento humano. No presente trabalho, faremos uma introdução à Teoria das Categorias, apresentando alguns conceitos e resultados.

Abstract

Developed by Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane late in the first half of the twentieth century, Category Theory is a branch of pure mathematics that deals uniformly different mathematical models, (each represented by one category) formalizing the relationships between them. It provides the environment and appropriate for the study of mathematical structures and unification, as well as a tool with high potential for applicability to various areas relevant to human knowledge. In this paper, we an introduction to Category Theory, featuring some of the concepts and results.

Palavras chaves: Teoria das Categorias, Morfismos, Objetos, Funtores.

1. Introdução

Em matemática é comum organizar objetos em estruturas como Espaços Vetoriais, Grupos, Anéis, Módulos, Espaços de Medida, Variedades Diferenciáveis e muitas outras. Um dos principais interesses nessa organização é compreender melhor o comportamento, propriedades e resultados mais gerais sobre classes de objetos pertinentes a uma mesma estrutura, que por sua vez está contida em alguma área da Matemática como Álgebra, Análise, Topologia, etc. A Teoria das Categorias, ramificação da Matemática Pura desenvolvida por Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane em 1945, é sem sombra de dúvidas um ambiente adequado para tratar formalmente relações existentes entre diferentes estruturas matemáticas.

Apesar de ser uma teoria relativamente recente se comparada a outras teorias matemáticas, a brevidade de sua história não configura um empecilho ao seu alto potencial de aplicabilidade às mais variadas áreas do conhecimento humano. O caráter de nova teoria oferece um vasto espaço para pesquisa, e uma série de desafios a serem transpostos.

Este trabalho tem como objetivo propagar as ideias introdutórias da referida teoria, proporcionando um contato inicial a estudantes e pesquisadores, aumentando assim, a base de conhecedores. O seu poder de expressão, o constante exercício da capacidade de abstração, e, para muitos, a tarefa de reestruturação da base lógica e matemática, já seriam condições suficientes para justificar o esforço em absorvê-la.

Iniciamos este trabalho introduzindo conceitos centrais em Teoria das Categorias, estreitamos, através de exemplos, o relacionamento entre Estruturas Algébricas e a linguagem categorial. Enunciamos e demonstramos alguns resultados que expressam o poder da Teoria das Categorias no processo de unificação de diferentes estruturas matemáticas.

2. Preliminares

Começamos estabelecendo a definição de Categoria.

Definição 2.1 *Uma categoria* $C = \langle Ob_C, Mor_C \rangle$ *consiste de um* ***conjunto***[1] *de objetos* Ob_C *e um conjunto de* ***Morfismos*** *ou* ***Setas*** Mor_C, *que satisfazem as seguintes condições:*

i) A cada morfismo $f \in Mor_C$, *estão associados dois objetos* $A, B \in Ob_C$ *chamados* ***Domínio*** *e* ***Codomínio*** *de f, respectivamente, e denotados* $A = dom(f)$ *e* $B = cod(f)$. *Neste caso, escrevemos* $f: A \to B$ *e definimos o conjunto* $Mor_C(A, B)$ *pondo*

$$Mor_C(A, B) = \{f \in Mor_C \mid A = dom(f) \text{ e } B = cod(f)\}$$

ii) Dados três objetos $A, B, C \in Ob_C$ *existe uma operação*

$$\circ: Mor_C(B, C) \times Mor_C(A, B) \to Mor_C(A, C);$$

chamada ***Composição****. Escrevemos* $\circ < g, f > = g \circ f$ *para* $g \in Mor_C(B, C)$ *e* $f \in Mor_C(A, B)$.

iii) Para cada $A \in Ob_C$, *existe um morfismo* $1_A \in Mor_C(A, A)$ *chamado* ***Identidade***[2] *de A.*

Ainda, a operação de composição categorial satisfaz as seguintes propriedades:

p.1) A composição é associativa; isto é, dados $f \in Mor_C(A, B)$, $g \in Mor_C(B, C)$ *e* $h \in Mor_C(C, D)$, *tem-se*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

p.2) Fixado $A \in Ob_C$, *para cada* $B \in Ob_C$, $f \in Mor_C(A, B)$ *e* $g \in Mor_C(B, A)$ *tem-se*

$$f \circ 1_A = f \quad e \quad 1_A \circ g = g.$$

Observação 2.2

i) Sempre que for possível, vamos denotar a categoria $\mathrm{C} = \langle \mathrm{Ob_C}, \mathrm{Mor_C} \rangle$ simplesmente por C.

ii) O conjunto $\mathrm{Mor_C(A, B)}$ pode ser denotado de uma das seguintes formas: $\mathrm{C(A, B) = hom_C(A, B) = hom(A, B) = (A, B) = (A, B)_C}$.

[1] Neste trabalho, quando usarmos o termo "conjunto" podemos estar nos referindo a conjuntos pequenos ou a classes segundo definição dada em [1].

[2] O propriedade (p.2) afirma que o morfismo identidade 1_A de cada objeto A, atua como elemento neutro para operação de composição sempre que isso faz sentido.

A partir de agora, iremos adotar a primeira notação.

Na definição que segue, lembramos que nem toda classe é um conjunto pequeno (para maiores detalhes, veja §6 do Capítulo I de [1])

Definição 2.3 *Uma categoria C é pequena se os conjuntos Ob_C e Mor_C são conjuntos pequenos e é grande se Ob_C e Mor_C são classes.*

Exemplo 2.4 *Categoria* ***Set****.*

$Set =< Ob_{Set}, Mor_{Set} >$, definida como segue, constitui uma categoria grande:

a) Ob_{Set} é o conjunto de todos os conjuntos pequenos;

b) Mor_{Set} é o conjunto de todas as funções entre conjuntos pequenos;

c) Dados $A, B, C \in Ob_{Set}$, a operação de composição categorial

$$\circ: Set(B, C) \times Set(A, B) \to Set(A, C),$$

é a operação de composição de funções;

d) Dado $A \in Ob_{Set}$, o morfismo $1_A \in Set(A, A)$ é a função identidade $id_A: A \to A$.

Note que, dados $\in Set(A, B), g \in Set(B, C), h \in Set(C, D)$ e $a \in A$, tem-se que:

$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))) = h(g \circ f(a)) = (h \circ (g \circ f))(a)$.

Portanto, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Ainda, se $w \in Set(B, A)$, tem-se que:

$$(f \circ 1_A)(a) = f(1_A(a)) = f(a),$$

$$(1_A \circ w)(a) = 1_A(w(a)) = w(a).$$

Assim, $f \circ 1_A = f$ e $1_A \circ w = w$, o que mostra que Set é de fato uma categoria. Por outro lado, Set é uma categoria grande pois, Ob_{Set}, o conjunto de todos os conjuntos pequenos é uma classe própria, isto é, não é um conjunto pequeno.[3]

Definição 2.5 *Um conjunto M munido de uma operação binária associativa $\bigoplus$ e de um elemento neutro e_M, tal que para qualquer $a \in M$, tem-se que*

$$a \bigoplus e_M = e_M \bigoplus a = a,$$

é chamado um Monóide, e é denotado por $< M, \bigoplus, e_M >$.

Definição 2.6 *Dados dois monóides $< M, \bigoplus_M, e_M >$ e $< N, \bigoplus_N, e_N >$, uma função $h: M \to N$ é um homomorfismo se*

$$h(e_M) = e_N \text{ e } h(x \bigoplus_M y) = h(x) \bigoplus_N h(y), \text{ para todo } x, y \in M.$$

[3] Caso contrário, teríamos $Ob_{Set} \in Ob_{Set}$, contrariando o axioma da regularidade. Veja §6 do Capítulo I de [1].

Exemplo 2.7 *Considere um monóide* $< M,\oplus, e_M >$

$\mathcal{M}_{<M,\oplus,e_M>} =< Ob_{\mathcal{M}_{<M,\oplus,e_M>}}, Mor_{\mathcal{M}_{<M,\oplus,e_M>}} >$, *definida como segue, constitui uma categoria pequena:*

a) $Ob_{\mathcal{M}_{<M,\oplus,e_M>}} = \{M\}$;

b) $Mor_{\mathcal{M}_{<M,\oplus,e_M>}} = M$,

c) A operação de composição categorial

$$\circ : \mathcal{M}_{<M,\oplus,e_M>}(M,M) \times \mathcal{M}_{<M,\oplus,e_M>}(M,M) \to \mathcal{M}_{<M,\oplus,e_M>}(M,M)\,,$$

é a operação binária $\oplus$;

d) O morfismo $1_M \in \mathcal{M}_{<M,\oplus,e_M>}(M,M)$ *é o elemento neutro* e_M, *isto é* $1_M = e_M$.

Note que, dados $f, g \in \mathcal{M}_{<M,\oplus,e_M>}(M,M)$, *tem-se que:*

$$g \circ f = g \oplus f \in \mathcal{M}_{<M,\oplus,e_M>}(M,M).$$

Ainda, se $h \in \mathcal{M}_{<M,\oplus,e_M>}(M,M)$, *tem-se que:*

$$(h \circ g) \circ f = (h \oplus g) \oplus f = h \oplus (g \oplus f) = h \circ (g \circ f)$$

e,

$$f \circ 1_M = f \oplus e_M = f = e_M \oplus f = 1_M \circ f.$$

Portanto, $\mathcal{M}_{<M,\oplus,e_M>}$ *é de fato uma categoria. Por outro lado,* $\mathcal{M}_{<M,\oplus,e_M>}$ *é uma categoria pequena pois,* $Ob_{\mathcal{M}_{<M,\oplus,e_M>}}$ *e* $Mor_{\mathcal{M}_{<M,\oplus,e_M>}}$ *são conjuntos pequenos.*

O exemplo anterior mostra que um monóide $< M,\oplus, e_M >$ pode ser visto como uma categoria $\mathcal{M}_{<M,\oplus,e_M>}$. Por outro lado, uma categoria pequena, com apenas um objeto, gera um monóide, no qual a composição de morfismos é a operação binária, isto materializa a possibilidade de usarmos linguagem categorial para descrever uma estrutura algébrica.

O próximo exemplo, mostra como podemos utilizar linguagem categorial para relacionar conjuntos estruturados.

Exemplo 2.8 *Categoria* ***Mon.***

Mon=<Ob_{Mon}, Mor_{Mon}>, *definida como segue, constitui uma categoria grande:*

a) Ob_{Mon} *é o conjunto de todos os monóides;*

b) Mor_{Mon} *é o conjunto de todos os homomorfismos entre monóides;*

c)Dados $A \doteq< A,\oplus_A, e_A >, B \doteq< B,\oplus_B, e_B >, C \doteq< C,\oplus_C, e_C >\in Ob_{Mon}$, *a operação de composição categorial*

$$\circ: Mon(B, C) \times Mon(A, B) \rightarrow Mon(A, C),$$

é a operação de composição de funções;

d) Dado $A \doteq < A, \bigoplus_A, e_A > \in Ob_{Mon}$, *o morfismo* $1_A \in Mon(A, A)$ *é a função identidade* $\mathrm{id}_A: A \rightarrow A$.

A demonstração de que ***Mon*** *é de fato uma categoria, segue diretamente da associatividade da composição de funções e do fato de que a composição de dois homomorfismos de monóides resulta em um homomorfismo de monóides*.

A seguir, listamos outras importantes categorias de conjuntos estruturados.

Categorias	Objetos	Morfismos
Poset	Conjuntos parcialmente ordenados	Funções Monótonas
Rings	Anéis	Homomorfismos de Anéis
Grp	Grupos	Homomorfismos de Grupos
Vect	Espaços vetoriais	Transformações lineares
Top	Espaços topológicos	Funções contínuas
RGr	Grafos reflexivos	Homomorfismos de grafos reflexivos
$\boldsymbol{Prov_L}$	Conjunto de todas as proposições de uma lógica L	$\Pi \in Prov_L(\beta, \alpha) \Leftrightarrow \Pi$ é uma prova de α a partir de β

Os dois últimos exemplos de categorias são amplamente utilizados em Ciência da Computação, para mais detalhes, veja capítulo 3 em [2].

O próximo exemplo explicita a existência de categorias simples, sem uma estrutura matemática.

Exemplo 2.9 *Categoria **2**.*

2 $=< Ob_2, Mor_2 >$, *definida como segue, constitui uma categoria pequena:*

a) $Ob_2 = \{A, B\}$;

b) $Mor_2 = \{1_A, 1_B, f: A \rightarrow B\}$;

*A categoria **2** é uma das menores categorias em termos de objetos e morfismos.*

Uma importante característica em Teoria das Categorias é a possibilidade de se construir categorias a partir de categorias existentes. Em muitos casos, a categoria construída herda importantes propriedades e resultados.

Definição 2.10 (Subcategoria) *Uma subcategoria* $S = < Ob_S, Mor_S >$ *de uma categoria* C *é uma categoria na qual:*

a) $Ob_S \subseteq Ob_C$*;*

b) Dados $A, B \in Ob_S$*, tem-se que:*

$$S(A,B) \subseteq C(A,B)$$

c) A composição e a identidade em S *são as mesmas de* C*, restritas aos morfismos e objetos de S.*

Exemplo 2.11 *Seja* S *definida como segue:*

a) Ob_S *é o conjunto de todos os conjuntos finitos;*

b) Mor_S *é o conjunto de todas as funções bijetoras;*

c) A composição e a identidade de S *são as mesmas de* Set*.*

S *é claramente uma subcategoria de* Set*.*

Definição 2.12 (Categoria Dual) *Seja* C *uma categoria. A categoria* ***dual*** *de* C*, denotada por* $C^{op} = < Ob_{C^{op}}, Mor_{C^{op}} >$*, é definida da seguinte forma:*

a) $Ob_{C^{op}} = Ob_C$*;*

b) Dados $A, B \in Ob_{C^{op}}$*, tem-se que* $f^{op} \in C^{op}(A,B) \Leftrightarrow f \in C(B,A)$*. Quando não houver risco de ambiguidade, denotaremos* f^{op} *simplesmente por f.*

c) Dados três objetos $A, B, C \in Ob_{C^{op}}$ *a operação de composição categorial dual*

$$\circ^{op}: Mor_{C^{op}}(B,C) \times Mor_{C^{op}}(A,B) \to Mor_{C^{op}}(A,C),$$

e tal que $g \circ^{op} f \doteq f \circ g$*;*

d) Dado $A \in Ob_{C^{op}}$ *tem-se que* $(1_A)^{op} = 1_A$.

A categoria dual de uma categoria é basicamente a inversão do sentido das suas setas.

A seguir, daremos um exemplo interessante de categoria dual.

Exemplo 2.13 *Seja* P *um conjunto finito, dotado de uma relação de ordem parcial* $\preccurlyeq$*. Vamos definir uma categoria* $\wp_{(P,\preccurlyeq)}$*, pondo para objetos dessa categoria os elementos de* P*, isto é,* $Ob_{\wp_{(P,\preccurlyeq)}} = P$*. Sejam* $x, y \in Ob_{\wp_{(P,\preccurlyeq)}}$*. Se* $x \preccurlyeq y$ *então diremos que existe em* $\wp_{(P,\preccurlyeq)}$*, um único morfismo entre* x *e* y *e representaremos esse morfismo por* $(x, y): x \to y$*. Dessa forma, podemos definir o conjunto dos morfismos de* $\wp_{(P,\preccurlyeq)}$*, pondo*

$$Mor_{\wp_{(P,\preccurlyeq)}} = \{(x,y): x \to y\ ; \quad x, y \in Ob_{\wp_{(P,\preccurlyeq)}}\ e\ x \preccurlyeq y\}.$$

Em alguns casos, iremos escrever apenas (x,y) para representar o morfismo $(x, y): x \to y$*. Vamos mostrar que* $\wp_{(P,\preccurlyeq)} =< Ob_{\wp_{(P,\preccurlyeq)}}, Mor_{\wp_{(P,\preccurlyeq)}} >$*, é, de fato, uma categoria. Para cada* $x, y \in Ob_{\wp_{(P,\preccurlyeq)}}$ *definimos o conjunto*

$$\wp_{(P,\preccurlyeq)}(x,y) = \begin{cases} (x,y): x \to y, & se\ x \preccurlyeq y \\ \emptyset, & se\ x\ e\ y\ \text{não}\ se\ relacionarem\ \text{através}\ de\ \preccurlyeq. \end{cases}$$

Sejam $x, y, z \in Ob_{\wp_{(P,\preccurlyeq)}}$ *tais que* $\wp_{(P,\preccurlyeq)}(x,y) \neq \emptyset$ *e* $\wp_{(P,\preccurlyeq)}(y,z) \neq \emptyset$*. A operação de composição categorial*

$$\circ_{\wp}: \wp_{(P,\preccurlyeq)}(y,z) \times \wp_{(P,\preccurlyeq)}(x,y) \to \wp_{(P,\preccurlyeq)}(x,z)$$

é a transitividade de $\preccurlyeq$*, isto é,*

$$(y,z) \circ_{\wp} (x,y) \doteq (x,z).$$

Dado $x \in Ob_{\wp_{(P,\preccurlyeq)}}$*, o morfismo* $(x,x): x \to x$ *é o morfismo identidade* 1_x *caracterizado pela propriedade reflexiva de* $\preccurlyeq$*. Notemos que, se* $(x,y), (y,z) \in Mor_{\wp_{(P,\preccurlyeq)}}$*, pela transitividade de* $\preccurlyeq$*, temos* $x \preccurlyeq z$ *e portanto,* $(x,z) \in Mor_{\wp_{(P,\preccurlyeq)}}$*. Além disso, se* $w \in Ob_{\wp_{(P,\preccurlyeq)}}$ *é tal que* $\wp_{(P,\preccurlyeq)}(z,w) \neq \emptyset$*, então*

$$((z,w) \circ_{\wp} (y,z)) \circ_{\wp} (x,y) = (y,w) \circ_{\wp} (x,y) = (x,w)$$

e

$$(z,w) \circ_{\wp} ((y,z) \circ_{\wp} (x,y)) = (z,w) \circ_{\wp} (x,z) = (x,w).$$

Assim,

$$(z,w) \circ_{\wp} ((y,z) \circ_{\wp} (x,y)) = ((z,w) \circ_{\wp} (y,z)) \circ_{\wp} (x,y).$$

Finalmente, dado $w \in Ob_{\wp_{(P,\preccurlyeq)}}$ *tal que* $\wp_{(P,\preccurlyeq)}(w,x) \neq \emptyset$*, então*

$$(x,y) \circ_{\wp} 1_x = (x,y) \circ_{\wp} (x,x) = (x,y)$$

e,

$$1_x \circ_{\wp} (w,x) = (x,x) \circ_{\wp} (w,x) = (w,x).$$

Isso prova que $\wp_{(P,\preccurlyeq)}$ *é uma categoria.*

Considere agora, a seguinte relação em P*: para* $x, y \in P$ *definimos*

$y \succcurlyeq x$ *sempre que* $x \preccurlyeq y$.

É fácil verificar que $\succcurlyeq$ *é uma ordem parcial em* P. *Portanto, a correspondente categoria dual* $\wp_{(P,\preccurlyeq)}^{op}$ *é o conjunto parcialmente ordenado* $(P, \succcurlyeq)$, *visto como a categoria* $\wp_{(P,\succcurlyeq)}$.

3. Funtores[4]

Nesta seção introduzimos o conceito de Funtor. Aqui, fazemos uso dessa ferramenta para descrever a passagem de um tipo de estrutura matemática para outro, exprimindo na forma de exemplos, o poder do conceito de Funtores no processo de unificação de estruturas matemáticas.

Definição 3.1 *Sejam* C *e* D *categorias. Um* ***funtor Covariante*** F, *ou simplesmente, funtor* F *com domínio* C *e codomínio* D, *denotado por* $F: C \to D$ *é um par de funções* $F =< F_O, F_{\mathcal{M}} >$ *(chamadas função objeto e função morfismo respectivamente), tais que:*

- *i)* $F_O: Ob_C \to Ob_D$ *associa a cada objeto* $A \in Ob_C$ *um objeto* $F_O(A) \in Ob_D$*;*
- *ii)* $F_{\mathcal{M}}: Mor_C \to Mor_D$ *associa a cada morfismo* $f \in C(A, B)$ *um morfismo* $F_{\mathcal{M}}(f) \in D(F_O\,(A), F_O B))$ *satisfazendo:*
  - *a.* $F_{\mathcal{M}}(g \circ f) = F_{\mathcal{M}}(g) \circ F_{\mathcal{M}}(f)$, *quaisquer que sejam* $f \in C(A, B)$*e* $g \in D(B, C)$*;*
  - *b.* $F_{\mathcal{M}}(1_A) = 1_{F_O\,(A)}$, *para todo* $A \in Ob_C$.

Exemplo 3.2 *Considere a categoria* ***Set****. Definimos* $F: Set \to Set$ *pondo* $F =< F_O, F_{\mathcal{M}} >$ *onde:*

i) $F_O: Ob_{Set} \to Ob_{Set}$ *é tal que* $F_O(A) = P(A)$ *é o conjunto de todos os subconjuntos* $S \subset A$.

ii) $F_{\mathcal{M}}: Mor_{Set} \to Mor_{Set}$ *associa a cada função* $f \in Set(A, B)$, *à função* $F_{\mathcal{M}}(f) \in Set(P(A), P(B))$ *dada por* $F_{\mathcal{M}}(f)(S) = f(S) \subset B$, *para cada* $S \subset A$.

Note que dados $f \in Set(A, B), g \in Set(B, C)$ *e* $S \subset X$ *tem-se:*

[4] Em resumo, um Funtor é uma função entre duas categorias, que leva objetos em objetos, morfismo em morfismos, preservando domínios, codomínios, identidade e composições.

$$F_{\mathcal{M}}(g \circ f)(S) = (g \circ f)(S) = g\big(f(S)\big) = F_{\mathcal{M}}(g)\big(f(S)\big) =$$
$$= F_{\mathcal{M}}(g)(F_{\mathcal{M}}(f)(S)) = F_{\mathcal{M}}(g) \circ F_{\mathcal{M}}(f)(S).$$

Portanto, $F_{\mathcal{M}}(g \circ f) = F_{\mathcal{M}}(g) \circ F_{\mathcal{M}}(f)$. *Ainda, dados* $X \in Set$ *e* $S \subset X$, *tem-se:*

$$F_{\mathcal{M}}(1_X)(S) = 1_X(S) = S = 1_{F_O(X)}(S)$$

ou seja, $F_{\mathcal{M}}(1_X) = 1_{F_O(X)}$. *Assim,* $F: Set \to Set$ *é um funtor.*

Doravante, sempre que não houver risco de ambiguidade, usaremos apenas o símbolo F para indicar as funções $\mathrm{F}_{\mathcal{O}}$ *e* $\mathrm{F}_{\mathcal{M}}$.

Exemplo 3.3 *Considere as categorias* $\mathcal{M}_{<M,\oplus,e_M>}$ *e* $\mathcal{N}_{<N,\circledast,e_N>}$. *Um funtor* $F: \mathcal{M}_{<M,\oplus,e_M>} \to \mathcal{N}_{<N,\circledast,e_N>}$ *é essecialmente um homomorfismo de monóides.*

Exemplo 3.4 *Considere as categorias* $\wp_{(P,\preccurlyeq_P)}$ *e* $\wp_{(Q,\preccurlyeq_Q)}$. *Um funtor* $F: \wp_{(P,\preccurlyeq_P)} \to \wp_{(Q,\preccurlyeq_Q)}$ *é simplesmente, uma função monótona* $F \in \boldsymbol{Poset}((P,\preccurlyeq_P),(Q,\preccurlyeq_Q))$.

Exemplo 3.5 *Seja* C *uma categoria. Considere o par de operações* $1_C: C \to C$ *definido por:*

i) $1_C: Ob_C \to Ob_C$ *é tal que* $1_C(A) = A$ *para todo* $A \in Ob_C$*;*

ii) $1_C: Mor_C \to Mor_C$ *associa a cada morfismo* $f \in C(A,B)$, *o morfismo* $1_C(f) = f \in C(A,B)$. 1_C *é um funtor, conhecido como funtor identidade*[5].

Definição 3.6 *Sejam* $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ *categorias,* $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *e* $G: \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *funtores. A composição de* G *com* F, *denotada por* $GF: \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ *é dada por*

$$GF(X) = G(F(X)), \qquad se\ X \in Ob_{\mathcal{A}}$$

e,

$$GF(f) = G(F(f)),\ se\ f \in Mor_{\mathcal{A}}\ .$$

Proposição 3.7 *Composição de funtores é um funtor.*

[5] Se S é uma subcategoria de C, então o par de operações $I_C: S \to C$ definidas de maneira análoga, definem o funtor Inclusão.

Exemplo 3.8 *Categoria* ***Cat***.

$Cat =< Ob_{Cat}, Mor_{Cat} >$, definida como segue, constitui uma categoria:

a) Ob_{Cat} é o conjunto de todas as categorias pequenas;

b) Mor_{Cat} é o conjunto de todos os funtores entre categorias pequenas;

c) Dados $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in Ob_{Cat}$ a operação de composição categorial

$$\circ: Cat(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \times Cat(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to Cat(\mathcal{A}, \mathcal{C}),$$

é a operação de composição de funtores;

d) Dado $\mathcal{A} \in Ob_{Cat}$, o morfismo $1_{\mathcal{A}} \in Cat(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ é o funtor identidade $1_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Note que, dados $F \in Cat(\mathcal{A}, \mathcal{B}), G \in Cat(\mathcal{B}, \mathcal{C}), H \in Cat(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, $X \in Ob_{\mathcal{A}}$ e $f \in Mor_{\mathcal{A}}$, tem-se que:

$$(HG)F(X) = H(G(F(X))) = H(GF(X)) = H(GF)(X),$$

e,

$$(HG)F(f) = H(G(F(f))) = H(GF(f)) = H(GF)(f).$$

Portanto, $(HG)F = H(GF)$. Ainda, se $W \in Cat(\mathcal{B}, \mathcal{A})$, tem-se que:

$$F1_{\mathcal{A}}(X) = F(1_{\mathcal{A}}(X)) = F(X)$$

$$1_{\mathcal{A}}W(X) = 1_{\mathcal{A}}(W(X)) = W(X).$$

Assim, $F1_{\mathcal{A}} = F$ *e* $1_{\mathcal{A}}W = W$, *o que mostra que Cat é de fato uma categoria.*[6]

Vamos finalizar este trabalho apresentando uma pequena aplicação da linguagem categorial: vamos definir formalmente um diagrama d em uma categoria C, para tanto vamos precisar de algumas definições auxiliares.

Definição 3.9 (Grafo) *Um* ***grafo*** $G =< N, S, Og, Dt >$ *consiste de um conjunto de* ***objetos*** *N, um conjunto de* ***setas*** *S, e duas funções* $Og, Dt: S \to N$, *que satisfazem a seguinte condição:*

- *A cada seta* $f \in S$, *estão associados dois objetos* $X = Og(f)$ *e* $Y = Dt(f)$ *chamados origem e destino de f. Neste caso, assim como em categorias, escrevemos* $f: X \to Y$.

Os objetos de N são chamados ***nós*** *ou* ***vértices*** *e as funções* Og *e* Dt *são chamadas função* ***origem*** *e* ***destino***, *respectivamente.*

[6] **Poset** e **Mon** são exemplos de subcategorias de Cat.

Definição 3.10 *Sejam* $G =< N_G, S_G, Og_G, Dt_G >$ *e* $H =< N_H, S_H, Og_H, Dt_H >$ *grafos. Um homomorfismo de grafos* α *com domínio* G *e codomínio* H*, denotado por* $\alpha: G \to H$ *é um par de operações* $\alpha =< \alpha_N, \alpha_S >$*, tais que:*

i) $\alpha_N: N_G \to N_H$*, associa a cada nó* $X \in N_G$*, um nó* $\alpha_N(X) \in N_H$*;*

ii) $\alpha_S: S_G \to S_H$ *associa a cada seta* $f: X \to Y$ *de* S_G *uma seta*

$$\alpha_S(f): \alpha_N(X) \to \alpha_N(Y) \text{ de } S_H;$$

iii) $Og_H \circ \alpha_S = \alpha_N \circ Og_G$ *e* $Dt_H \circ \alpha_S = \alpha_N \circ Dt_G$.

Definição 3.11 *Sejam* $G =< N_G, S_G, Og_G, Dt_G >, H =< N_H, S_H, Og_H, Dt_H >$ *e* $L =< N_L, S_L, Og_L, Dt_L >$ *grafos,* $\alpha: G \to H$, *e* $\beta: H \to L$ *homomorfismo. A composição de* β *e* α*, denotada por* $\beta\alpha: G \to L$*, é dada por* $\beta\alpha =< (\beta\alpha)_N, (\beta\alpha)_S >=< \beta_N \circ \alpha_N, \beta_S \circ \alpha_S >$.

Proposição 3.12 *A composição de homomorfismos de grafos é um homomorfismo de grafos.*

Prova *Sejam* $G =< N_G, S_G, Og_G, Dt_G >, H =< N_H, S_H, Og_H, Dt_H >$ *e* $L =< N_L, S_L, Og_L, Dt_L >$ *grafos,* $\alpha: G \to H$, *e* $\beta: H \to L$ *homomorfismos e* $\beta\alpha: G \to L$A *a composição de* β *e* α*. Tem-se que:*

i) Dado $X \in N_G$*, segue que* $\alpha_N(X) \in N_H$*. Portanto,*

$$(\beta\alpha)_N(X) = (\beta_N \circ \alpha_N)(X) = \beta_N(\alpha_N(X)) \in N_L;$$

ii) Se $f: X \to Y \in S_G$ *então* $\alpha_S(f): \alpha_N(X) \to \alpha_N(Y)$ *é uma seta de* S_H*. Assim,*

$$\begin{aligned} (\beta\alpha)_S(f) &= (\beta_S \circ \alpha_S)(f) \\ &= \beta_S(\alpha_S(f)): \beta_N(\alpha_N(X)) \to \beta_N(\alpha_N(Y)) \end{aligned}$$

é uma seta de S_L.

iii) Finalmente,

$$\begin{aligned} Og_L \circ (\beta\alpha)_S &= Og_L \circ (\beta_S \circ \alpha_S) \\ &= (Og_L \circ \beta_S) \circ \alpha_S \\ &= (\beta_N \circ Og_H) \circ \alpha_S \\ &= \beta_N \circ (Og_H \circ \alpha_S) \\ &= \beta_N \circ (\alpha_N \circ Og_G) \\ &= (\beta_N \circ \alpha_N) \circ Og_G \\ &= (\beta\alpha)_N \circ Og_G. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} Dt_L \circ (\beta\alpha)_S &= Dt_L \circ (\beta_S \circ \alpha_S) \\ &= (\beta_N \circ \alpha_N) \circ Dt_G \\ &= (\beta\alpha)_N \circ Dt_G. \end{aligned}$$

Portanto, $\beta\alpha$ é um homomorfismo de grafo.

Exemplo 3.13 *Categoria* $\boldsymbol{GR}$

$GR =< Ob_{GR}, Mor_{GR} >$, *definido como segue, constitui uma categoria:*

a) Ob_{GR} *é o conjunto de todos os grafos;*

b) Mor_{GR} *é o conjunto de todos os homomorfismos de grafos;*

c) Dados $G =< N_G, S_G, Og_G, Dt_G >, H =< N_H, S_H, Og_H, Dt_H >$ *e*

$L =< N_L, S_L, Og_L, Dt_L >$ *grafos, a operação de composição categorial*

$$\circ: GR(L, H) \times GR(G, H) \to GR(G, L),$$

é a operação de composição de homomorfismos de grafos;

d) Dado $G =< N_G, S_G, Og_G, Dt_G > \in Ob_{GR}$, *o morfismo* $1_G \in GR(G, G)$ *é o homomorfismo* $1_G =< (1_G)_N, (1_G)_S >$, *onde:*

i) $(1_G)_N: N_G \to N_G$, *é tal que* $(1_G)_N(X) = X$, *para todo* $X \in N_G$;

ii) $(1_G)_S: S_G \to S_G$ *associa a cada seta* $f: X \to Y$ *de* S_G *a seta* $(1_G)_S(f) = f$ *de* S_G.

A demonstração de que GR *é de fato uma categoria segue do fato de que a composição de homomorfismo de grafos é associativa e de que o homomorfismo* $1_G =< (1_G)_N, (1_G)_S >$, *satisfaz a propriedade p.2 da definição 2.1.*

Exemplo 3.14 *Considere as categorias* Cat *e* GR. *Definimos o par de operações* $F_e: Cat \to GR$ *da seguinte forma:*

i) $F_e: Ob_{Cat} \to Ob_{GR}$ *é tal que* $F_e(C) = G_C$, *onde* $G_C =< Ob_C, Mor_C, Og_C, Dt_C >$ *com* $Og_C(f) = dom(f)$ *e* $Dt_C(f) = cod(f)$;

ii) $F_e: Mor_{Cat} \to Mor_{GR}$ *associa a cada funtor* $T =< T_{\mathcal{O}}, T_{\mathcal{M}} > \in Cat(C, D)$, *com*

$$T_{\mathcal{O}}: Ob_C \to Ob_D \ \text{ e } T_{\mathcal{M}}: Mor_C \to Mor_D,$$

o par de operações

$$F_e(T) =< T_{\mathcal{O}}, T_{\mathcal{M}} >.$$

Note que

$$F_e(T): F_e(C) \to F_e(D)$$

é um homomorfismo de grafos. De fato, se $f \in C(A,B)$, *então* $T_{\mathcal{M}}(f) \in D(T_{\mathcal{O}}(A), T_{\mathcal{O}}(B))$. *Daí,*

$$\begin{aligned}(Og_D \circ T_{\mathcal{M}})(f) &= Og_D(T_{\mathcal{M}}(f)) \\ &= dom((T_{\mathcal{M}})(f)) = T_{\mathcal{O}}(A) \\ &= T_{\mathcal{O}}(Og_C(f)) = (T_{\mathcal{O}} \circ Og_C)(f),\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}(Dt_D \circ T_{\mathcal{M}})(f) &= Dt_D(T_{\mathcal{M}}(f)) = cod(T_{\mathcal{M}}(f)) \\ &= T_{\mathcal{O}}(B) = T_{\mathcal{O}}(Dt_C(f)) \\ &= (T_{\mathcal{O}} \circ Dt_C)(f)\end{aligned}$$

Assim, $F_e(T) \in GR(G_C, G_D)$. *Agora, dados* $T \in Cat(C,D)$ *e* $R \in Cat(D,H)$, *tem-se:*

$$F_e(RT) = RT = F_e(R)F_e(T).$$

Ainda, dado $C \in Ob_{Cat}$,

$$F_e(1_C) = 1_C = 1_{G_C} = 1_{F_e(C)}.$$

Portanto F_e *é um funtor*[7].

Definição 3.15 (Diagrama) *Considere* $C = \langle Ob_C, Mor_C \rangle$ *uma categoria,* $G =< N, S, Og, Dt >$ *um grafo e o funtor* $F_e: Cat \to GR$. *Um morfismo* $d \in GR(G, F_e(C))$, *isto é,* $d: G \to G_C$ *é chamado um* ***diagrama d em C***.

Definição 3.16 (Diagrama comutativo) *Um diagrama* d *em* C *é* ***comutativo*** *se, fixados arbitrariamente* $A, B \in N_G$, *para quaisquer* $C, D \in N_G$, $f: A \to B$, $h: A \to D$, $g: C \to B$ *e* $w: D \to B$ *setas de* A_G, *tem-se que* $d_S(g) \circ_C d_S(f) = d_S(w) \circ_C d_S(h)$.

Os diagramas são muito utilizados em Álgebra, na simplificação de enunciados dos mais variados resultados e no entendimento de suas demonstrações, por vezes, demasiadamente complicadas.

Exemplo 3.17 (Categoria dos morfismos sobre *C*) *Seja* C *uma categoria qualquer.* $C^{\to} =< Ob_{C^{\to}}, Mor_{C^{\to}} >$, *definida como segue, constitui uma categoria*

a) $Ob_{C^{\to}} = Mor_C$;

[7] O Funtor F_e é conhecido como funtor esquecimento. Existem outros funtores esquecimento.

b) O conjunto $Mor_{C^{\to}}$ *é determinado da seguinte forma: sejam* $f \in C(A,B)$ *e* $g \in C(C,D)$ *objetos de* $C^{\to}$*, então* $(\alpha_1, \alpha_2) \in C^{\to}(f,g)$ *se, e somente se, o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

(*isto é* $\alpha_2 \circ f = g \circ \alpha_1$).

c) Dados $a \in C(A,B), b \in C(C,D)$ *e* $c \in C(E,F)$ *a operação de composição categorial*

$$\circ_{C^{\to}}: C^{\to}(b,c) \times C^{\to}(a,b) \to C^{\to}(a,c)$$

é tal que $(\gamma_1, \gamma_2) \circ (\alpha_1, \alpha_2) = (\gamma_1 \circ \alpha_1, \gamma_2 \circ \alpha_2)$*, onde* $(\alpha_1, \alpha_2) \in C^{\to}(a,b)$ *e* $(\gamma_1, \gamma_2) \in C^{\to}(b,c)$.

d) Dado $a \in C(A,B)$*, o morfismo* $1_a \in C^{\to}(a,a)$ *é o morfismo* $1_a = (1_A, 1_B)$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & B \\ \downarrow{\scriptstyle 1_A} & & \downarrow{\scriptstyle 1_B} \\ A & \xrightarrow{a} & B \end{array}$$

No exemplo anterior utilizamos diagramas na simplificação do enunciado.

Funtores, cálculos funtoriais e todo ferramental a ser desenvolvido em Teoria das Categorias, proporcionam um ambiente adequado para tratar de maneira uniforme modelos matemáticos distintos, consolidando o processo de unificação de algumas estruturas matemáticas através de mapeamentos categoriais, potencializando assim, seu campo de aplicações às diversas áreas do conhecimento.

Referências Bibliográficas

[1] MacLane, S. Categories for the working mathematician. Springer-Verlag, 1971.

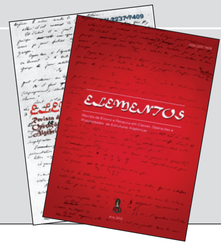
[2] Menezes, P. B. & e Haeuler, E. H. Teoria das Categorias para Ciência da Computação. Editora Sagral Luzzato, 2006.

Fernando Pereira Paulúcio Reis
Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil
E-mail address: fernandoppreis@gmail.com
URL: www.ufes.br

Maico Felipe Silva Ribeiro
Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil
E-mail address: mfsr83@gmail.com
URL: www.ufes.br

Revista Elementos • 2ª edição • ano 2012 • 78-86

Revista
ELEMENTOS



Sobre o Anel dos Germes de Funções Holomorfas

Leandro Nery de Oliveira
Universidade Federal do Acre

Resumo

Neste artigo de revisão, faremos uma breve explanação sobre as propriedades de funções holomorfas, de várias variáveis complexas, em torno da origem em $\mathbb{C}^n$. Veremos como relacioná-lo ao anel dos germes de funções holomorfas $\mathcal{O}_n$ e as principais propriedades deste anel.

Abstract

In this review article, we will make a brief explanation about the properties of holomorphic functions of several complex variables, around the origin in $\mathbb{C}^n$. We will see how to relate it to the ring of the germ of holomorphic functions $\mathcal{O}_n$ and the main properties of this ring.

Palavras chaves: Funções Holomorfas. Anel local.

Introdução

Neste artigo de revisão, pretendemos dar uma visão geral sobre as funções holomorfas e o seu anel local associado, como estrutura algébrica. Esperamos que um aluno em final de graduação possa ter a maturidade suficiente para entender os conceitos, definições e demais resultados que serão enunciados. Por isso, alguns conceitos mais elementares – embora sejam bem conhecidos para alguns – serão apresentados.

Iniciaremos com a definição de funções holomorfas, apresentando o conjunto das funções holomorfas que tem a estrutura de um anel. Mas estaremos mais interessados no anel dos germes de funções holomorfas e em suas propriedades.

1. Funções holomorfas de várias variáveis complexas.

Denotamos por $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, respectivamente, os corpos dos números reais e complexos. Denotamos por $\mathbb{C}^n$ o produto cartesiano de n cópias de $\mathbb{C}$, isto é,

$$\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) | z_i \in \mathbb{C}\}.$$

Para um ponto $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ em $\mathbb{C}^n$ e uma n-upla $\rho = (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n)$ de números reais positivos ρ_i, $1 \le i \le n$, definimos

$$\Delta(a, \rho) = \{z \in \mathbb{C}^n || z_i - a_1| < \rho_i\}$$

como o poli-disco com centro a e raio ρ. Também para uma n-upla $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ de inteiros não negativos v_i, $1 \le i \le n$, definimos

$$z^v = {z_1}^{v_1} {z_2}^{v_2} \cdots {z_n}^{v_n}, \qquad |v| = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \;\; e \;\; v! = v_1!\, v_2! \cdots v_n!.$$

Se, para cada v, existe um número complexo correspondente c_v, então chamamos a soma formal

$$\sum_{|v| \ge 0} c_v = \sum_{v_1, v_2, \cdots, v_n = 0}^{\infty} c_{v_1 v_2 \cdots v_n}$$

de uma multi-série.

1.1 Definição: Uma série $\sum c_v$ converge para um número complexo c se, para qualquer ε positivo, existe um número natural N tal que se $N_i > N$, então

$$\left| \sum_{v_1=1}^{N_1} \sum_{v_2=1}^{N_2} \cdots \sum_{v_n=1}^{N_n} c_v - c \right| < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos $c = \sum c_v$ e o chamamos de soma da série.

Dizemos que a série $\sum c_v$ é absolutamente convergente se a série $\sum |c_v|$ converge.

Note que se uma série é convergente, então sua soma é determinada de maneira única. Se a série é absolutamente convergente, então ela é convergente.

A seguir consideremos séries cujos termos são funções. Seja D um aberto de $\mathbb{C}^n$. Suponha que temos, para cada v, uma função complexa f_v definida em D.

1.2 Definição: Seja D um conjunto aberto em $\mathbb{C}^n$ e f uma função valorização complexa em D. Dizemos que f é *holomorfa* (ou *analítica*) num ponto a em D se existe uma série

$$\sum_{v_1, v_2, \cdots, v_n = 0} c_{v_1 v_2 \cdots v_n} (z_1 - a_1)^{v_1} \cdots (z_n - a_n)^{v_n}$$

que converge absolutamente em cada ponto numa vizinhança $U_a \subset D$ de a. Dizemos que f é *holomorfa* (ou *analítica*) em D se for holomorfa em cada ponto de D. O conjunto de todas as funções holomorfas em D será denotado por $\mathcal{H}_D$.

Observe que quando $n = 1$, a função f é holomorfa se existe a derivada df/dz e é analítica se for expressa como uma série de potências convergente. Isso implica que uma função holomorfa é infinitamente diferenciável e que pode ser descrita mediante sua série de Taylor.

O seguinte resultado pode ser provado para o caso de uma variável. A demonstração pode ser vista em [1], pág. 6.

1.3 Teorema ("Unicidade da Continuação Analítica" ou "Identidade"): Seja $D \subset \mathbb{C}^n$ um aberto conexo e sejam f e g funções holomorfas em D. Se existe um conjunto aberto $U \subset D$ tal que $f = g$ em U, então $f = g$ em D.

1.4 Teorema (Lema de Osgood): Se uma função complexa f é contínua num aberto $D \subset \mathbb{C}^n$ e é holomorfa em cada variável separadamente, então ela é holomorfa em D.

Para a demonstração deste teorema consulte [1], pág. 2.

Uma consequência do Lema de Osgood é uma extensão das conhecidas equações de Cauchy-Riemann, como um critério para analiticidade de f. Com uma notação conveniente, introduzimos os operadores de uma equação diferencial parcial

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx_j} - i\frac{d}{dy_j}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx_j} + i\frac{d}{dy_j}\right)$$

onde $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$.

O teorema a seguir estabelece um critério para saber se uma função é holomorfa ou não num aberto $D \subset \mathbb{C}^n$. A demonstração pode ser vista em [1].

1.5 Teorema (Critério de Cauchy-Riemann): Uma função complexa f, definida num aberto $D \subset \mathbb{C}^n$, ao qual é continuamente diferenciável nas coordenadas reais em $\mathbb{C}^n$, é holomorfa em D se, e somente se, satisfaz o sistema de equações diferenciais parciais

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f(z) = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, n.$$

Agora temos as ferramentas corretas para mostrar que $\mathcal{H}_D$ é um anel com a soma e o produto usuais.

1.6 Teorema: Seja D um subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$. Então $\mathcal{H}_D$ é um anel com as operações

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z), \quad (fg)(z) = f(z)g(z).$$

Demonstração: Note que, pelo **Critério de Cauchy-Riemann**, sendo $f, g \in \mathcal{H}_D$, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(f+g)(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f(z) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} g(z) = 0$$

Portanto, $f + g \in \mathcal{H}_D$. Do mesmo modo,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(fg)(z) = f\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} g(z) + g\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f(z) = f \cdot 0 + g \cdot 0 = 0$$

Assim, $fg \in \mathcal{H}_D$. Isso mostra que a soma e a multiplicação de duas funções holomorfas são também holomorfas. Observando que a soma e o produto de funções holomorfas são as usuais e que o conjunto $\mathcal{H}_D$ das funções holomorfas é fechado para estas operações é imediato o cumprimento das propriedades de um anel. ■

2. O Anel dos Germes de Funções Holomorfas

Seja $\mathcal{H}$ o conjunto das funções holomorfas em alguma vizinhança da origem. Definimos a relação $\sim$ em $\mathcal{H}$ como segue: dados f e g em $\mathcal{H}$, $f \sim g$ se existe uma vizinhança U da origem tal que a restrição de f e g em U são idênticas. Verifica-se facilmente que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{H}$. A classe de equivalência da função f é chamada de ***germe*** de f em 0, que também será denotada por f, isto é

$$f = \{g : f \sim g, g \in \mathcal{H}\}.$$

Seja o conjunto $\mathcal{O}_n = {}^{\mathcal{H}}/_{\sim}$. Tal conjunto tem a estrutura de um anel comutativo com respeito às operações induzidas de adição e multiplicação de funções. Tem a unidade ao qual é a classe de equivalência da função constante igual a 1. Contém o corpo $\mathbb{C}$ como os germes das funções constantes.

Denotamos por $\mathbb{C}\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ o conjunto das séries de potências que convergem absolutamente em alguma vizinhança da origem, este conjunto tem a estrutura de um anel. Assim, como no caso de uma variável, $f \sim g$ se, e somente se, f e g tem a mesma expansão da série de potências. Podemos identificar $\mathcal{O}_n$ com $\mathbb{C}\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$.

Seja R um anel comutativo com unidade. Um divisor de zero em R é um elemento a em R tal que existe um elemento $b \neq 0$ em R com $ab = 0$. Um anel $R \neq 0$ é um ***domínio integral*** se não existem divisores de zero não nulos, isto é, $ab = 0$, para $a, b \in R$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

2.1 Proposição: O anel $\mathcal{O}_n$ é um domínio integral.

Demonstração: Suponha $fg = 0$ para elementos f e g de $\mathcal{O}_n$. Então existe uma vizinhança U da origem tal que $f(z)g(z) = 0$ para todo z em U. Se $f \neq 0$, então existe um ponto z tal que $f(z) \neq 0$. Pela continuidade de f, podemos encontrar uma vizinhança V de z tal que $f(z') \neq 0$ para todo z' em V. Como a restrição de g em V é identicamente nula então $g = 0$ pelo Teorema 1.3. ■

Podemos formar o corpo quociente de $\mathcal{O}_n$, ao qual denotaremos por $\mathcal{M}_n$. Cada elemento pode ser expresso como f/g e duas expressões f/g e f'/g' representam o mesmo elemento se, e somente se, $fg' = f'g$. Chamamos um elemento de $\mathcal{M}_n$ um germe de ***função meromorfa*** numa vizinhança da origem em $\mathbb{C}^n$.

Dizemos que um elemento u em um anel R é uma ***unidade*** se existe um elemento v em R tal que $uv = 1$.

2.2 Proposição: Um germe u em $\mathcal{O}_n$ é uma unidade se, e somente se, é o germe de uma função u com $u(0) \neq 0$.

Demonstração: Considere u uma função holomorfa numa vizinhança da origem com $u(0) \neq 0$ então $v = 1/u$ também é uma função holomorfa numa vizinhança da origem. Assim, o germe de u é uma unidade em $\mathcal{O}_n$ (pois $uv = 1$). A recíproca é óbvia. ■

Denotamos por $\mathfrak{m}$ o conjunto das não unidades em $\mathcal{O}_n$. Note que este conjunto é um ideal de $\mathcal{O}_n$. Além disso, temos a seguinte proposição.

2.3 Proposição: O ideal $\mathfrak{m}$ é o único ideal maximal em $\mathcal{O}_n$.

Este resultado é óbvio, uma vez que se considerarmos I um ideal arbitrário em $\mathcal{O}_n$ temos que se I contém uma unidade, então $I = \mathcal{O}_n$. Por outro lado, se I não contém uma unidade, então $I \subseteq \mathfrak{m}$.

Um anel com um único ideal maximal é chamado de *anel local*.

Analisamos a estrutura do anel $\mathcal{O}_n$. Para um germe f em $\mathcal{O}_n$ escrevemos $f = \sum_{|v|\geq 0} a_v z^v$. Dizemos que a ordem de f é k, se $a_v = 0$ para todo v com $|v| < k$ e $a_{v_0} \neq 0$ para algum v_0 com $|v_0| = k$. Definimos a ordem do germe nulo como $+\infty$.

Dizemos que a ordem de f em z_n é k, se a ordem de $f(0, \cdots, 0, z_n)$, como uma série de potências em z_n, é k. Neste caso, se k é finito, também dizemos que f é regular em z_n, de ordem k.

Consideramos o anel $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ dos polinômios em z_n com coeficientes em $\mathcal{O}_{n-1}$: $\mathcal{O}_{n-1}[z_n] = \{f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{k-1} z_n^k + a_k z_n^k\ ;\ a_i \in \mathcal{O}_{n-1}\}$.
Assim, $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ é um subanel de $\mathcal{O}_n$ que contém o subanel $\mathcal{O}_{n-1}$.

Um *polinômio de Weierstrass* em z_n de grau k é um elemento h de $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ da forma $h = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{k-1} z_n^k + z_n^k$, onde k é um inteiro positivo e $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1} \in \mathcal{O}_{n-1}$.

Apresentaremos a seguir dois teoremas importantes, cuja prova será omitida (ver, [2], cap. 2, para uma demonstração).

2.4 Teorema da Divisão de Weierstrass: Se h um polinômio de Weierstrass em z_n de grau k. Para qualquer germe f em $\mathcal{O}_n$, existem elementos unicamente determinados q em $\mathcal{O}_n$ e r em $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ com grau$(r) < k$ tal que

$$f = qh + r.$$

Mais ainda, se f pertence a $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ então q também pertence. Assim, temos também um teorema da divisão para a $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.

2.5 Teorema da Preparação de Weierstrass: Seja f um germe em $\mathcal{O}_n$ ao qual é regular em z_n de ordem k. Então existe um único polinômio de Weierstrass h em z_n de grau k tal que $f = uh$, sendo u uma unidade em $\mathcal{O}_n$.

Agora podemos discutir algumas propriedades importantes do anel $\mathcal{O}_n$ que são consequências dos teoremas acima.

Seja R um domínio integral. Um elemento a em R é irredutível se a não é uma unidade e se a identidade $a = bc$ para elementos b e c em R implica que b ou c é uma unidade. Dizemos que R é um domínio de fatorização única, ou simplesmente um DFU, se todo elemento a em R que não seja 0 ou uma unidade pode ser expresso como o produto de elementos irredutíveis em R e a expressão é única. Por exemplo, o anel $\mathbb{Z}$ dos inteiros é um DFU. Um corpo é um DFU e qualquer de seus elementos ou é 0 ou uma unidade. Sabe-se que se R é um DFU então o anel de polinômios na variável X $R[X]$ é também um DFU (Teorema de Gauss).

2.6 Teorema: O anel $\mathcal{O}_n$ é um domínio de fatorização única.

Prova: Daremos uma ideia da prova. Faremos por indução sobre n. Inicialmente, note que $\mathcal{O}_0 = \mathbb{C}$ é um domínio de fatorização única. Assuma que $\mathcal{O}_{n-1}$ seja um DFU. Considere f um elemento de $\mathfrak{m}\backslash\{0\}$. Podemos assumir que f é regular em z_n, mudando o sistema de coordenadas se necessário. Pelo Teorema da Preparação de Weierstrass existe uma unidade u em $\mathcal{O}_n$ tal que uf é um polinômio de Weierstrass em $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, ao qual é um DFU, pela hipótese de indução. Uma vez que uf não é 0 nem uma unidade, podemos expressá-lo como um produto de elementos irredutíveis em $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Usando o Teorema da Divisão e o Teorema da Preparação de Weierstrass, podemos mostrar que um elemento em $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ é irredutível em $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ se, e somente se, é irredutível em $\mathcal{O}_n$. ∎

Dizemos que um anel R é Noetheriano se todo ideal em R tem um número finito de geradores. Em outras palavras, se I é um anel de R então existe um número finito de elementos $a_1, a_2, \dots, a_r$ em I tal que todo elemento a em I é escrito como $a = \sum_{i=1}^{r} x_i a_i$ com $x_i \in R$. Por exemplo, o anel $\mathbb{Z}$ é Noetheriano. Um corpo é Noetheriano, uma vez que qualquer de seus ideais ou é o ideal nulo ou ele mesmo. Sabe-se que se R é Noetheriano então $R[X]$ também o é (Teorema das Bases de Hilbert, ver [2], pág. 26).

2.7 Teorema: O anel $\mathcal{O}_n$ é um anel Noetheriano.

Prova: Novamente daremos uma ideia da prova. Faremos por indução sobre n. Temos $\mathcal{O}_0 = \mathbb{C}$, que é Noetheriano. Suponha que $\mathcal{O}_{n-1}$ seja Noetheriano. Tome I um ideal arbitrário de $\mathcal{O}_n$. Se $I = 0$ então nada temos a provar. Se $I \neq 0$, então escolha um elemento não nulo $h \in I$. Podemos assumir que f é regular em z_n, mudando o sistema de coordenadas, se necessário. Pelo Teorema da Preparação de Weierstrass, podemos assumir que h é um polinômio de Weierstrass. Assim h está em $I \cap \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Já que $I \cap \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ é um ideal em $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, que é Noetheriano pela hipótese de indução, então tem um número finito de geradores $g_1, g_2, \dots, g_r$. Mostremos que eles também geram o ideal I sobre $\mathcal{O}_n$. Tome qualquer elemento f em I. Então pelo Teorema da Divisão de Weierstrass, podemos escrever $f = qh + r$, para algum $q \in \mathcal{O}_n$ e $r \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Uma vez que f e h estão em I, então r também está. Assim $r \in I \cap \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Sendo que h e r podem ser escritos como uma combinação linear de $g_1, g_2, \dots, g_r$ sobre $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, f é escrito como uma combinação linear sobre $\mathcal{O}_n$. ∎

Assim, o anel dos germes de funções holomorfas $\mathcal{O}_n$ tem a estrutura de um anel comutativo com unidade. Além disso, $\mathcal{O}_n$ é um domínio de fatorização única e é um anel Noetheriano.

Referências Bibliográficas

[1] Gunning, R. and Rossi, H. *Analitic Functions of Several Complex Variables.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.

[2] Hefez, A. *Irreducible Plane Curve Singularities. In Real and Complex Singularities*. D. Mond and M. J. Saia, Editors, Lecture Notes in Pure and Applied Math. Vol. 232, Marcel Dekker, 1-120, 2003.

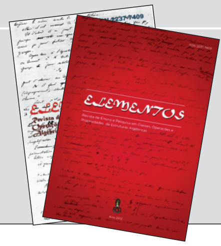
[3] Matsumura, H. *Commutative Algebra.* Benjamin/Cummings, 1980.

[4] Zariski, O. and Samuel, P. *Commutative Algebra*. Vol. I, II, Graduate Texts in Mathematics 28, 29, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1960.

Leandro Nery de Oliveira
Universidade Federal do Acre, Rio Branco - AC, Brasil
E-mail address: leandroner@gmail.com
URL: www.ufac.br

Revista Elementos • 2ª edição • ano 2012 • 87-99

Revista
ELEMENTOS



Sobre FC – grupos, BFC – grupos e Generalizações

Sérgio Brazil Júnior
Universidade Federal do Acre

Resumo

Um grupo G é chamado um FC - grupo se a classe de conjugação x^G é finita, para todo $x \in G$. Se x^G é finita e limitada por uma constante m, para todo $x \in G$, dizemos que G é um BFC – *grupo*. O menor dentre os limites dessas classes é denominado, nesse contexto, o *índice* do BFC – grupo. Seja G_w o conjunto constituído por todos os w-valores $w(g_1, \dots, g_k) = {g_1}^{l_1} \dots {g_k}^{l_k}$, onde $g_1, \dots, g_k \in G$ e $l_1, \dots, l_k$, $k \in \mathbb{N}$. O subgrupo de G gerado por G_w é chamado o subgrupo verbal de G determinado pela palavra w e é anotado por $w(G)$. Em [5], *S. Franciosi, F. de Giovanni e P. Shumyatsky* generalizam o conceito de FC – grupo relacionando-o com uma palavra w: *Um grupo G é dito um $FC(w)$ – grupo, se x^{G_w} é finita, para todo $x \in G$*. Se x^{G_w} é finito e limitado por uma constante m, para todo $x \in G$, dizemos que G é um $BFC(w)$ – grupo. O menor dentre os limites dessas classes é denominado, nesse contexto, o *índice* do BFC(w) – grupo. Apresentaremos, neste texto, uma generalização dos BFC – grupos, relacionando-os com as palavras centrais inferiores γ_k, cujo principal resultado é: *Se G é um $BFC(\gamma_k)$ – grupo com índice m, então $|x^{\gamma_k(G)}|$ é* finito *limitada por uma função que depende somente dos parâmetros* k *e* m, *para todo $x \in G$*.

Abstract

A group G is called a FC - grupo if the conjugacy class x^G is finite, for all $x \in G$. If x^G is finite and limited by a constant m, for all $x \in G$, we say that G is a BFC - group. The minor amongst the limits of these classes is called, in this context, the index of the BFC - group. Let G_w the set consisting of all w-values $w(g_1, \dots, g_k) = {g_1}^{l_1} \dots {g_k}^{l_k}$, where $g_1, \dots, g_k \in G$ and $l_1, \dots, l_k$, $k \in \mathbb{N}$. The subgroup of G generated for G_w is called the verbal subgroup of G determined by the word w and is noted by (G). In [5], S. Franciosi, F. of Giovanni and P. Shumyatsky generalize the concept of FC - group relating it with a word w: *A group G is said a $FC(w)$ - group, if x^{G_w} is finite, for all $x \in G$*. If x^{G_w} is finite and limited for a constant m, for all $x \in G$, we say that G is a $BFC(w)$ - group. The minor amongst the limits of these classes is called, in this context, the index of the $BFC(w)$ - group. We will present, in this text, a generalization of the BFC - groups, relating them with the lower central words γ_k, whose main resulted it is: *If G is one $BFC(\gamma_k)$ - group with index m, then $\left|x^{\gamma_k(G)}\right|$ is finite and limited by a function that only depends on parameters k and m, for all $x \in G$.*

Palavras Chaves: FC – grupos, BFC – grupos, $FC(w)$ – grupos, $BFC(\gamma_k)$ – grupo.

1. Introdução

Um grupo G é dito um FC – grupo, se a classe de conjugação x^G é finita, para todo $x \in G$, isto é, se $|G: C_G(x)|$ é finito, para todo $x \in G$, ou equivalentemente, se $|G: C_G(x^G)|$ é finito, para todo $x \in G$. Se x^G é finita e limitada por uma constante m, para todo $x \in G$, dizemos que G é um BFC – grupo. O menor dentre os limites dessas classes é denominado de *índice* do BFC – grupo. O Conceito de FC – grupo foi introduzido, em 1948, por *R. Baer* [1]. Posteriormente, outros matemáticos estudaram esses grupos, entre eles *B. H. Neumann* [6], *S. N. Cernikov* [4]. Esses grupos podem ser pensados como uma generalização de grupos abelianos, uma vez que todo elemento de um FC – grupo tem "poucos conjugados" e algumas propriedades importantes da classe dos grupos abelianos são ainda respeitadas na classe dos FC – grupos.

Seja G_w o conjunto constituído por todos os w -valores $w(g_1, \dots, g_k) = g_1{}^{l_1} \dots g_k{}^{l_k}$, onde $g_1, \dots, g_k \in G$ e $l_1, \dots, l_k$ e $k \in \mathbb{N}$. O subgrupo de G gerado por G_w é chamado o subgrupo verbal de G determinado pela palavra w e é anotado por $w(G)$. Uma palavra w é dita concisa, se a finitude de G_w implicar na finitude de $w(G)$. Em [5], *S. Franciosi, F. de Giovanni e P. Shumyatsky* generalizam o conceito de FC – grupo relacionando-o com uma palavra w. Um grupo G é dito um $FC(w)$ – grupo, se x^{G_w} é finita, para todo $x \in G$. Se x^{G_w} é finita e limitada por uma constante m, para todo $x \in G$, dizemos que G é um $BFC(w)$ – grupo. O menor dentre os limites dessas classes é denominado de índice do $BFC(w)$ – grupo G. Nesse artigo, esses autores mostram alguns resultados relevantes sobre $FC(w)$ – grupos, quando a palavra é concisa.

No trabalho de Turner- Smith [11] foi mostrado que muitas palavras relevantes são concisas, entre elas as palavras centrais inferiores, definidas pelas equações $\gamma_1(x) = x$ e $\gamma_{k+1} = [\gamma_k, \gamma_1]$. Anotaremos por G_{γ_k} o conjunto de todos os comutadores simples de peso k e, se G é um grupo tal que $x^{G_{\gamma_k}}$ é finita e limitada por uma constante m, para todo $x \in G$, diremos que G é um $BFC(\gamma_k)$ – grupo com índice m. Nosso objetivo no presente trabalho é apresentar alguns resultados sobre esses grupos. Alguns deles, embora concebidos na elaboração da Tese de Doutorado citada em [2], ainda não haviam sido publicados.

2. Importantes resultados sobre FC, BFC e $FC(w)$ – grupos

A seguir destacaremos alguns resultados clássicos dos FC – grupos, BFC – grupos e $FC(w)$ – grupos, cujas demonstrações podem ser vistas em [2].

– *"Os FC – grupos de torção são exatamente os grupos localmente normais - finitos."*

– *"Se G' é finito, então G é um FC – grupo. Em particular, se $G/Z(G)$ é finito, então G é um FC – grupo."*

–"(B. H. Neumann) Se *G é um FC – grupo, então $T(G)$, o conjunto dos elementos de torção de G, é um subgrupo (característico) de G que contém G'. Particularmente, $T(G)$ é localmente normal - finito."*

–"(B. H. Neumann) Se *G é um FC – grupo finitamente gerado e H é um subgrupo de G, então H é finitamente gerado. Particularmente, $T(G)$ é finito."*

–"(Baer) *Se G é um FC – grupo, então $G/Z(G)$ é residualmente finito e de torção."*

–"(Baer) *Se G é um FC – grupo, então $G/Z(G)$ é localmente finito."*

–"(D. Polovickii) *Seja G um grupo. Então, G é um FC – grupo se, e somente se, $< x^G >$ é uma extensão de um grupo finito por um grupo cíclico, para todo $x \in G$."*

O resultado mais importante sobre os BFC – grupos é a seguinte caracterização dada, em 1954, por *B. H. Neumann* [7]:

–"*G é um BFC – grupo se, e somente se, seu subgrupo derivado G' é finito."*

Em 1956 *J. Wiegold* [13] estabelece um limite para a ordem de G' em termo do índice m de um BFC – *grupo* G e faz a seguinte conjectura:

– *"Se G é um BFC – grupo a ordem de G' é no máximo $m^{(1/2)\,(1+log_2 m)}$."*

M. R. Vaughan-Lee [12], em 1974, mostra que esta conjectura possui resposta positiva, desde que o grupo seja nilpotente.

Em 1977, *P. M. Neumann* e *M. R. Vaughan-Lee* [8, Teorema 1], também limitam a ordem do subgrupo derivada de um BFC – *grupo,* em função do seu índice:

– *"Se G é um BFC – grupo com índice m, então a ordem de G' é no máximo $m^{(1/2)\,(3+5log_2 m)}$."*

Esse limite é melhorado, em 1984, por *M. Cartwrigth* [3], que mostra (usando a classificação dos grupos simples finitos) que a ordem de G' é no máximo $m^{(1/2)\,(41+log_2 m)}$.

Mais recentemente, em 1999, *D. Segal e A. Shalev* [9] mostram que a ordem de G' é no máximo $m^{(1/2)\,(13+log_2 m)}$. Este é o resultado que mais se aproxima da conjectura feita por *Wiegold.*

Outro resultado relevante mostrado em [8, Teorema 3] é:

– *"Se* G *é um* BFC *– grupo com índice* m*, solúvel de comprimento derivado* d*, então* $d < (8/3)log_2 log_2 m + 7$*."*

Em [5], *S. Franciosi, F. de Giovanni e P. Shumyatsky* generalizam o conceito de FC – grupo relacionando-o com uma palavra w. Um grupo G é dito um $FC(w)$ – grupo, se x^{G_w} é finita, para todo $x \in G$. Se x^{G_w} é finita e limitada por uma constante m, para todo $x \in G$, dizemos que G é um $BFC(w)$ – grupo. O menor dentre os limites dessas classes é denominado de índice do $BFC(w)$ – grupo G. Nesse artigo, o principal resultado apresentado é o seguinte:

– *"Seja* w *uma palavra concisa. Então* G *é dito um* $FC(w)$ *– grupo se, e somente se,* $x^{w(G)}$ *é finito, para todo* $x \in G$*."*

3. Sobre os $BFC(\gamma_k)$ – grupo

Definição 1: Sejam G um grupo e $x_1, x_2, \dots, x_k$ elementos de G. Definimos G_{γ_k} como sendo o conjunto dos comutadores simples de peso k em G, isto é,

$$G_{\gamma_k} = \{[\, x_1, x_2, \dots, x_k\,];\ \ x_1, x_2, \dots, x_k\ \in \mathrm{G}\}$$

Observamos que em geral G_{γ_k} não é um subgrupo de G, uma vez que o produto de dois elementos de G_{γ_k} não necessariamente pertence a G_{γ_k}. Mas G_{γ_k} é um subconjunto simétrico de *G*: se $x = [x_1, x_2, \dots, x_k]$; então $x^{-1} = [x_k, [x_1, \dots, x_{k-1}]] = [x_1, \dots, x_{k-1,} x_k^{-1}]^{x_k} \ \in G_{\gamma_k}$. Além disso, temos que $\gamma_k(G)$, o k- ésimo termo da série central descendente de G, é gerado por G_{γ_k}.

Definição 2: Um grupo G é dito um $BFC(\gamma_k)$ – grupo, se e somente se, existe um inteiro positivo m, tal que $|x^{G_{\gamma_k}}| \leq m$, para todo $x \in G$. Se m é minimal com tal propriedade, diremos que G é um $BFC(\gamma_k)$ – grupo com índice m

Exemplos de $BFC(\gamma_k)$ – grupos com índice m são todos os grupos G tais que $|\gamma_k(G) : C_{\gamma_k(G)}(x)| \leq m$, para todo $x \in G$.

Definição 3: Sejam G um grupo e H um subgrupo de $\gamma_k(G)$. Dizemos que H tem γ_k - índice finito, se existem elementos $g_1, g_2, \dots, g_m \in \gamma_k(G)$, tais que

$$G_{\gamma_k} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} Hg_i.$$

Se m for minimal com tal propriedade, dizemos que H tem γ_k – índice finito m.

A seguir apresentaremos alguns resultados relevantes sobre $BFC(\gamma_k)$ – grupos que foram concebidos na elaboração da Tese de Doutorado do autor deste texto, em 2004, na Universidade de Brasília – UnB, sob a orientação do Professor Pavel Shumyatsky.

Nos resultados a seguir, a expressão "$\{k, m\}$*-limitado"* significa: limitado por uma função que depende somente dos parâmetros k e m.

Lema 1: Seja G um grupo. Se $H_1, H_2, \dots, H_t$ são subgrupos de $\gamma_k(G)$ *com* γ_k *– índices* $m_1, m_2, \dots, m_t$*, respectivamente, então a intersecção*

$$\bigcap_{i=1}^{t} H_i$$

tem γ_k *– índice* $m_1 m_2 \dots m_t$.

Lema 2: *Sejam* G *um grupo nilpotente e* H *um subgrupo de* $\gamma_k(G)$ *com* γ_k *– índice finito* m. *Então* $|\gamma_k(G) : H|$ *é* $\{k, m\}$*-limitado.*

As demonstrações dos Lemas 1 e 2 podem ser vistas em [2].

Proposição 1: *Seja* G *um* $BFC(\gamma_k)$ *– grupo com índice* m. *Se* G *é nilpotente, então* $\left|x^{\gamma_k(G)}\right|$ *é* $\{k, m\}$*- limitada, para todo* $x \in G$.

Demonstração: Desde que G é um $BFC(\gamma_k)$ – grupo com índice m, temos que $|x^{G_{\gamma_k}}| \leq m$, para todo $x \in G$. Assim, $C_{\gamma_k(G)}(x)$ tem γ_k – índice no máximo m, para todo $x \in G$. Como G é nilpotente temos, por meio do Lema 2 que $|\gamma_k(G) : C_{\gamma_k(G)}(x)|$ é $\{k, m\}$-limitado, para todo $x \in G$. Portanto $\left|x^{\gamma_k(G)}\right|$ é $\{k, m\}$- limitada, para todo $x \in G$. ■

Lema 3 : *Seja* G *um* $BFC(\gamma_k)$ *– grupo finito com índice* m. *Suponha que* G *é simples não abeliano. Então,* $|G|$ *é* $\{k, m\}$*-limitada.*

Demonstração: Sabemos que todo grupo simples é 2-gerado (J. G. Thompson [10]). Logo, podemos considerar $G = < a, b >$. Por outro lado, $|x^{G_{\gamma_k}}| \leq m$, para todo $x \in G$, isto é, $C_{\gamma_k(G)}(x)$ tem γ_k – índice no máximo m, para todo $x \in G$. Desde que G é simples não abeliano, temos $Z(G) = 1$ e $G = \gamma_k(G)$. Como $C_{\gamma_k(G)}(a) \cap C_{\gamma_k(G)}(b) = 1$, temos, de acordo com o Lema 1, que $\{1\}$ tem γ_k – índice $\leq m^2$, isto é, $|G_{\gamma_k}| \leq m^2$, logo por Turner- Smith [11], temos $|G| = |\gamma_k(G)|$ é finita e $\{k, m\}$- limitada.■

Lema 4: *Seja G um $BFC(\gamma_k)$ – grupo finito com índice m. Suponha que*

$$G = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_r$$

onde os $S_i{}'s$ são grupos simples não abelianos . Então, vale que $r \leq m$.

Demonstração: Sejam $1 \neq a_i \in S_i, i \in \{1, \ldots, r\}$ e considere $a = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ em G. Temos

$$C_G(a) = \prod_{i=1}^{r} C_{S_i}(a_i).$$

Existe $x_i \in (S_i)_{\gamma_k}$ e $x_i \notin C_{S_i}(a_i)$, $i \in \{1, \ldots, r\}$. Se todo elemento em $(S_i)_{\gamma_k}$ centralizasse a_i, teríamos $a_i \in Z(S_i) = 1$, o que é uma contradição com a escolha dos $a_i{}'s$. Assim, pelo menos r comutadores em $\gamma_k(G)$, por exemplo, os $x_i{}'s$, não estão em $C_G(a)$. Ainda, se $C_G(a)x_i = C_G(a)x_j$, teríamos $x_i x_j^{-1} \in C_G(a)$ e, dessa forma, $x_i \in C_{S_i}(a_i)$, uma contradição. Logo, $C_G(a)$ tem γ_k – índice pelo menos r. Assim, $r \leq m$.■

Lema 5: *Seja G um $BFC(\gamma_k)$ – grupo com índice m. Suponha que G é nilpotente. Então o comprimento derivado de G é $\{k, m\}$-limitado.*

Demonstração: De acordo com a proposição 1, temos que $\left|x^{\gamma_k(G)}\right|$ *é $\{k, m\}$-limitada, para todo $x \in G$*. Logo, por [8, Teorema 3], temos que o comprimento derivado de $\gamma_k(G)$ é $\{k, m\}$-limitado, isto é, existe um inteiro $f = f(k, m)$ tal que $\gamma_k(G)^{(f)} = 1$. Por outro lado, temos $G^{(k)} \leq \gamma_k(G)$ e, daí, $G^{(f+k)} \leq {G^{(k)}}^{(f)} \leq \gamma_k(G)^{(f)} = 1$, isto é, o comprimento derivado de G é $\{k, m\}$-limitado.■

Na demonstração do Lema 9 abaixo, usaremos os seguintes resultados, cujas demonstrações podem ser vistas em [2]:

Lema 6: *Sejam x, y, z elementos de um grupo G. Então:*

i) $[x, y] = [y, x]^{-1}$;

ii) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$;

iii) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$;

iv) $[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1$;

Lema 7: *Sejam G um grupo, H um subgrupo normal e abeliano de G e $x \in G$. Suponhamos que*

$$[H, \underbrace{x, \dots, x}_{k\ vezes}] = 1$$

Então, $< H, x >$ é nilpotente de classe no máximo k.

Lema 8: *Sejam G um grupo finito e $y \in G$ tal que y centraliza todo fator principal não abeliano e $< M, y >$ é nilpotente, para todo M fator principal abeliano. Então, $y \in F(G)$, onde $F(G)$ é o subgrupo de Fitting de G.*

Lema 9: *Seja G um $BFC(\gamma_k)$ – grupo finito com índice m. Então, existe um inteiro $e = e(k, m)$, tal que G^e é nilpotente.*

Demonstração: Seja $M = H/K$ qualquer fator principal de G e x um elemento arbitrário de G. Temos $M = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_r$, onde os $S_i{}'s$ são grupos simples não abelianos isomorfos ou M é um p-grupo abeliano elementar. Suponha primeiro que $M = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_r$, onde os $S_i{}'s$ são grupos simples não abelianos isomorfos. Conforme os Lemas 3 e 4, segue que $|M|$ é finita e $\{k, m\}$ -limitada. Consequentemente, o grupo de automorfismo de M é finito de ordem $\{k, m\}$-limitada. Desde que cada elemento de G induz um automorfismo de M, temos que existe $e_1 = e_1\ (k, m)$, tal que x^{e_1} centraliza M. Agora, Suponha que M é um p-grupo abeliano elementar e considere

$$T = [M, \underbrace{x, \dots, x}_{(k-1) vezes}].$$

Desde que M é abeliano e normal em G/K, temos, usando o Lema 6 (iii), que $T \subseteq (G/K)_{\gamma_k}$. Assim, $|T/C_T\ (x)| = |x^T| \leq \left|x^{(G/K)_{\gamma_k}}\right| \leq \left|x^{G_{\gamma_k}}\right| \leq m$. Dessa forma, existe $e_2 = e_2(k,m)$, tal que x^{e_2} centraliza $T/C_T\,(x)$, isto é, $[T, x^{e_2}] \leq C_T(x)$ e daí $[T, x^{e_2}, x]$ =1 e, assim, $[T, x^{e_2}, x^{e_2}]$ =1, ou seja,

$$[M, \underbrace{x, \dots, x, x^{e_2}, x^{e_2}}_{(k+1)vezes}] = 1.$$

Por outro lado, mais uma vez usando o fato de M ser abeliano e normal em G/K, juntamente com o Lema 6 (ii) e (iii), temos

$$[M, \underbrace{x^{e_2}, \dots, x^{e_2}}_{(k-1)vezes}] \subseteq T.$$

Assim,

$$[M, \underbrace{x^{e_2}, \dots, x^{e_2}}_{(k+1)vezes}] = 1$$

e então, segundo o Lema 7, $< M, x^{e_2} >$ é nilpotente. Seja $e = e_1 e_2$. De acordo com o Lema 8, $x^e \in F(G)$. Como $x \in G$ é arbitrário, temos $G^e \leq F(G)$ e, por isso, é nilpotente. ■

As demonstrações dos Lemas a seguir também podem ser vistas em [2].

Lema 10: *Sejam G um grupo e H um subgrupo de $\gamma_k(G)$ com γ_k – índice finito m. Suponha que $\gamma_k(G)$ seja localmente finito de expoente n. Então $|\gamma_k(G){:}\,H|$ é finito e $\{k,m,n\}$-limitado.*

Lema 11: *Sejam G um grupo e H um subgrupo de $\gamma_k(G)$ com γ_k – índice finito m. Suponha que G contenha um subgrupo normal L solúvel de comprimento derivado d. Se $|\gamma_k(G/L){:}\, HL/L| = i$, então $|\gamma_k(G){:}\,H|$ é $\{d,i,k,m\}$-limitado.*

Agora vamos mostrar o principal resultado deste trabalho, para o caso em que o $BFC(\gamma_k)$ – grupo G é finito.

Teorema 1: *Seja G um $BFC(\gamma_k)$ – grupo finito com índice m. Então $\left|x^{\gamma_k(G)}\right|$ é $\{k,m\}$- limitada, para todo $x \in G$.*

Demonstração: Sejam x um elemento arbitrário de G e $H = C_{\gamma_k(G)}(x)$. Conforme o Lema 6, existe um inteiro $e = e(k,m)$, tal que G^e é nilpotente. Considere o grupo quociente G/G^e. Por hipótese H tem γ_k – índice finito no máximo m. Assim a imagem de H em G/G^e tem γ_k – índice finito no máximo m. Desde que G/G^e é um grupo finito de expoente $\{k,m\}$ -limitado, temos, pelo Lema 10, que $|\gamma_k(G/G^e){:}\, HG^e/G^e\,|$ é $\{k,m\}$- limitado e, pelo Lema 11, que $|\gamma_k(G){:}\,H|$ é $\{k,m\}$-

limitado. Agora, voltando ao grupo G, temos, de acordo com o Lema 5, que o subgrupo normal G^e é solúvel de comprimento derivado $\{k, m\}$- limitado. Desde que $H = C_{\gamma_k(G)}(x)$ e x é arbitrário em G, temos o que queríamos demonstrar. ■

O Caso em que o $BFC(\gamma_k)$ – grupo G é localmente finito, segue abaixo.

Corolário 1: *Seja G um $BFC(\gamma_k)$ – grupo com índice m. Suponha que G seja localmente finito. Então $\left|x^{\gamma_k(G)}\right|$ é $\{k, m\}$-limitada, para todo $x \in G$.*

Demonstração: O Teorema 1 nos diz que, se o grupo G é um $BFC(\gamma_k)$ – grupo finito com índice m, então existe uma função $M = M(k, m)$, dependendo somente de k e de m, tal que $\left|x^{\gamma_k(G)}\right| \leq M$, para todo $x \in G$. Mostraremos que a função limitante M tem a mesma serventia se o $BFC(\gamma_k)$ – grupo G for localmente finito. Suponha que existam $x \in G$ e $y_1, \dots, y_s \in \gamma_k(G)$, tal que $|\{x^{y_1}, \dots, x^{y_s}\}| > M$. Desde que $y_i \in \gamma_k(G)$, para todo $i \in \{1, \dots, s\}$, temos que cada y_i pode ser escrito como produto de um número finito de comutadores de peso k. Logo, existe um subgrupo finitamente gerado H de G, tal que $y_i \in \gamma_k(H)$, para todo $i \in \{1, \dots, s\}$. Como G é localmente finito, temos que H é finito. Também $|x^{H_{\gamma_k}}| \leq |x^{G_{\gamma_k}}| \leq m$ e, daí, pelo Teorema 1, temos que $\left|x^{\gamma_k(H)}\right| \leq M$. Mas, por outro lado, $|\{x^{y_1}, \dots, x^{y_s}\}| \leq \left|x^{\gamma_k(H)}\right| \leq M$, o que é uma contradição. ■

4. Teorema principal

Este parágrafo é dedicado ao caso mais geral. Para demonstrá-lo enunciaremos mais alguns lemas que também estão detalhados em [2].

Lema 12: Seja w uma palavra concisa e seja G um $FC(w)$-grupo. Então, o subgrupo $[G, w(G)]$ é localmente finito.

Lema 13: *Sejam G um grupo e H um subgrupo de $\gamma_k(G)$ com γ_k – índice finito m. Suponha que $\gamma_k(G)$ é abeliano. Então $|\gamma_k(G): H|$ é finito e $\{k, m\}$-limitado.*

Teorema 2 : *Seja* G *um* $BFC(\gamma_k)$ *– grupo com índice* m. *Então* $\left|x^{\gamma_k(G)}\right|$ *é finita e* $\{k,m\}$*-limitada, para todo* $x \in G$.

Demonstração: Desde que G é um $BFC(\gamma_k)$ – grupo com índice m, temos, conforme o Lema 12, que

$$R = \gamma_{k+1}(G) = [G, \gamma_k(G)]$$

É localmente finito. Logo do Corolário 1, segue que $\left|y^{\gamma_k(R)}\right|$ *é* $\{k,m\}$*-limitada, para todo* $y \in R$. Dessa forma, $\gamma_k(R)$ é um BFC – grupo com índice $\{k,m\}$-limitado e, daí, por [13, Teorema 4.7], segue que $|\gamma_k(R)'|$ é $\{k,m\}$-limitada. Passando ao quociente $G/\gamma_k(R)'$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\gamma_k(R)' = 1$ (uma vez que todas as hipóteses valem nesse quociente), isto é, podemos assumir que $\gamma_k(R)$ é abeliano. Sejam x um elemento arbitrário de G e $H = C_{\gamma_k(G)}(x)$. Por hipótese, H tem γ_k – índice no máximo m. Dessa maneira, considerando o subgrupo R, segue que $H \cap \gamma_k(R)$ possui γ_k – índice no máximo m. Desde que $\gamma_k(R)$ é abeliano, segue a partir do Lema 13 que $|H\gamma_k(R): H|$ é $\{k,m\}$ - limitado. Por outro lado, considerando o grupo quociente G/R, temos que a imagem de H em G/R tem γ_k – índice no máximo m e, ainda, $\gamma_k(G/R)$ é abeliano, logo, a partir do Lema 13, segue que $|\gamma_k(G): HR|$ é $\{k,m\}$ - limitado. Observando o grupo quociente $G/\gamma_k(R)$, vemos que a imagem de H em $G/\gamma_k(R)$ tem γ_k – índice no máximo m. Claramente, a imagem de R em $G/\gamma_k(R)$ é um subgrupo normal nilpotente de classe no máximo k, logo solúvel de comprimento derivado $\{k\}$-limitado. Sendo $|\gamma_k(G): HR|$ é $\{k,m\}$-limitado, o Corolário 1 nos mostra que $|\gamma_k(G): H\gamma_k(R)|$ é $\{k,m\}$ - limitado. Sendo $|H\gamma_k(R): H|$ $\{k,m\}$ - limitado, temos que $|\gamma_k(G): H|$ é também $\{k,m\}$ - limitado, isto é, $\left|x^{\gamma_k(G)}\right|$ é $\{k,m\}$ - limitada. Como x é arbitrário, temos o que queríamos demonstrar. ■

Corolário 2 : *Seja* G *um* $BFC(\gamma_k)$ *– grupo com índice* m. *Então* $G^{(k+1)}$ *é finito de ordem* $\{k,m\}$*- limitada.*

Demonstração: Segundo o Teorema 2, temos que $\gamma_k(G)$ é um BFC – grupo com índice $\{k,m\}$- limitado. Dessa forma, [13, Teorema 4.7], temos que $\gamma_k(G)'$ é finito de ordem $\{k,m\}$ - limitada. Desde que $G^{(k)} \leq \gamma_k(G)$, temos que $G^{(k+1)}$ é finito de ordem $\{k,m\}$- limitada. ■

O Corolário acima nos diz que todo $BFC(\gamma_k)$ – grupo é uma extensão de um grupo finito por um grupo solúvel.

5. Considerações Finais

Ressaltamos que o teorema principal desse trabalho, constante do parágrafo 4, foi publicado em 2006, no Journal of Group Theory (9), 127-137, sofrendo algumas alterações em sua demonstração. Os resultados apresentados no presente texto estão em sua forma original, isto é, na forma que foram concebidos quando da elaboração de [2].

6. Referências Bibliográficas

[1] Baer, R., Finiteness Properties of Groups. Duke Math. J. 15, 1021-1032 (1948).

[2]Brazil, S. J., Grupos com Classes de Conjugação Verbal Limitadas, Tese de Doutorado, UnB, (2004).

[3] Cartwrigth, M.,The Order of the Derived Group of a BFG-group, J. London Math. Soc. (2) 30 (1984), 227-243.

[4] Cernikov, S.N., On The Structure of Groups With Finite Classes of Conjugates Elements, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 115, 60-63 (1957)

[5] Franciosi, S., de Giovanni, F. and Shumyatsky, P., On Groups With Finite Verbal Conjugacy Classes. Houston Journal of Mathematics, v. 28 (4), p. 683-689, 2002.

[6]Neumann, B.H., Groups With Finite Classes of Conjugate Elements, Proc. London Math. Soc. (3) 1, 178-187 (1951).

[7]Neumann, B.H., Groups Covered by Permutable Subsets, J. London Math. Soc. 29 (1954) 236-248.

[8] Neumann, P.M. and Vaughan-Lee, M.R., An Essay on BFC groups. Proc. London Math. Soc. (3) 35 (1977) 213-237.

[9] Segal, D. and Shalev,A., On Groups With Bounded Conjugacy Classes, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 50 (1999), 200, 505-516.

[10] Thompson, J. G. Nonsolvable Finite Groups All of Whose Local Subgroups Are Solvable, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968) 383-437.

[11] Turner- Smith, R. F., Finiteness Conditions for Verbal Subgroups, J. London Math. Soc. 41 (1966), 166-176.

[12] Vaughan-Lee, M. R., Breadth and Commutator Subgroups of p-groups, J. Algebra 32 (1974) 278-285.

[13] Wiegold, J., Groups With Boundedly Finite Classes of Conjugate Elements, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 238 (1956) 389-401.

Sérgio Brazil Júnior

Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas

Universidade Federal do Acre

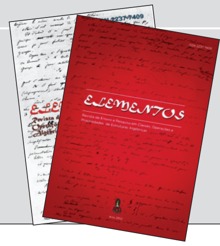
Rio Branco - Acre

sbrazil@ufac.br

(68)9984-1022

Revista Elementos • 2ª edição • ano 2012 • 100-109

Revista
ELEMENTOS



O Radical Localmente Policíclico

Dedicado à minha família

José Ivan da Silva Ramos
Universidade Federal do Acre

Resumo

A existência do *radical de Hirsch-Plotkin* motiva esta investigação que fazemos a respeito da classe dos grupos localmente policíclicos. Nossas principais considerações nos levam a concluir que: *em qualquer grupo G um subgrupo H ascendente localmente policíclico está contido em $R_{\mathcal{L}\mathfrak{P}}(G)$, o maior subgrupo normal localmente policíclico de G*. Provaremos que a existência desse radical do tipo Hirsch-Plotkin é uma consequência do fato de que o produto de dois subgrupos normais localmente policíclicos de um grupo é também um subgrupo (normal) localmente policíclico.

Abstract

The existence of *radical Hirsch-Plotkin* motivates this research we do about the class of polycyclic groups locally. Our main considerations lead to conclude that: *for any group G a subgroup H ascending locally polycyclic is contained in $R_{\mathcal{L}\mathfrak{P}}(G)$, the largest locally polycyclic normal subgroup of G*. We prove that the existence of this type of radical Hirsch-Plotkin is a consequence of the fact that the product of two normal subgroups of a locally polycyclic group is also a subgroup (normal) locally polycyclic.

Palavras Chaves: Propriedades de grupos, Condição maximal, Grupos policíclicos, radical e séries ascendentes.

1. Introdução

Dizemos que $\mathfrak{X}$ é uma classe ou propriedade de grupos se para todo grupo G podemos decidir se G possui ou não a propriedade $\mathfrak{X}$, ou seja, se pode ser decidido se $G \in \mathfrak{X}$ ou $G \notin \mathfrak{X}$. Comumente dizemos que G é um $\mathfrak{X}$-grupo se G possui a propriedade $\mathfrak{X}$. São exemplos de classes de grupos: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{N}$ e $\mathfrak{P}$, respectivamente as classes (ou propriedades) dos grupos *abelianos*, *solúveis*, *nilpotentes* e *policíclicos*.

Definição1: Seja $\mathfrak{X}$ uma classe ou propriedade de grupos.

i) Dizemos que G é um grupo *poli* - $\mathfrak{X}$ se, e somente se, em G existe uma cadeia subnormal $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_{n-1} \trianglelefteq G_n = G$; onde $n \in \mathbb{N}$ e cada quociente G_i/G_{i-1} é um $\mathfrak{X}$-grupo; para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

ii) Um grupo G é dito *localmente* $\mathfrak{X}$ se, e somente se, todo subgrupo de G finitamente gerado é um $\mathfrak{X}$-grupo.

iii) Se G é um grupo, denotamos por *radical localmente* $\mathfrak{X}$ *de* G, o subgrupo $R_{\mathfrak{L}\mathfrak{X}}(G)$, o maior subgrupo normal de G que é localmente $\mathfrak{X}$.

Exemplo 1: Se G é localmente policíclico, então todo subgrupo finitamente gerado P de G é policíclico; ou seja, em cada subgrupo finitamente gerado P de G existe uma cadeia subnormal $1 = P_0 \trianglelefteq P_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq P_{n-1} \trianglelefteq P_n = P$; onde $n \in \mathbb{N}$ e cada quociente P_i/P_{i-1} é um grupo cíclico; para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Se G é um grupo, $\wp(G) = 2^G = \{W / W \subset G\}$ é o conjunto das partes de G. Todo subconjunto F de $\wp(G)$ é denominado de uma *família* de subconjuntos de G.

Por $\mathfrak{X}G = \{H \leq G / H \in \mathfrak{X}\}$ denotamos a família dos $\mathfrak{X}$-subgrupos de G; isto é, a família dos subgrupos de G que possuem a propriedade $\mathfrak{X}$.

Definição 2: Sejam G um grupo e $\mathcal{C} \subset \wp(G)$ uma família de (subconjuntos de) G. Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma *cadeia* se, e somente se, valem as condições:

i) $\mathcal{C} \neq \Phi$;

ii) $\forall\ X, Y \in \mathcal{C}$, vale que $X \subset Y$ ou $X \subset Y$.

Definição 3: Dizemos que uma família F de subconjuntos de um grupo G é *indutivamente ordenada* se, e somente se, F sempre contém $\bigcup_{W \in \mathcal{C}(G)} W$, a união dos termos de qualquer cadeia $\mathcal{C}$ dentro de F.

Exemplo 2: Sejam G um grupo e

$$(L\mathfrak{P})\aleph G = \{H / \ H \text{é um subrupo normal localmente policíclico de G}\}$$

a família dos subgrupos normais localmente policíclicos de G. Para qualquer cadeia $\mathcal{C}\big((L\mathfrak{P})\aleph G\big)$, consideremos a união $L = \bigcup_{A \in \mathcal{C}((L\mathfrak{P})\aleph G)} A$. Decorre de breves argumentos que L é um subgrupo normal de G. Agora, dados finitos elementos $l_1, l_2, \dots, l_k \in L$, com $k \in \mathbb{N}$, vale que, na pior das hipóteses, cada $l_i \in A_i$, onde cada A_i é um elemento da cadeia $\mathcal{C}\big((L\mathfrak{P})\aleph G\big)$; para todo para $i = 1, 2, \dots, k$. Portanto, vale que $l_1, l_2, \dots, l_k \in A_j$, para um algum $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Como $A_j \in (L\mathfrak{P})\aleph G$, temos que o subgrupo $\langle l_1, l_2, \dots, l_k \rangle$ é policíclico. Segue então que $L \in (L\mathfrak{P})\aleph G$ e a família $(L\mathfrak{P})\aleph G$ é indutivamente ordenada.

Para investigarmos grupos mais gerais, por exemplo, grupos não finitos, podemos, em muitos casos, usar um importante resultado que é o

Lema de Zorn: Toda família de subconjuntos indutivamente ordenada possui um elemento maximal.

Pelo lema de Zorn, olhando novamente no exemplo 2 acima, temos $m((L\mathfrak{P})\aleph G) = \{M / M \text{ é um elemento maximal em } (L\mathfrak{P})\aleph G\} \neq \Phi$, ou seja, em todo grupo G podemos considerar ***"um" maior subgrupo normal localmente policíclico***. Nossos argumentos na seção 3 permitem corrigir a frase em negrito acima para ***"o" maior subgrupo normal localmente policíclico***.

A definição a seguir é uma generalização de subnormalidade.

Definição 4: (Ver [2]; pág. 358) Uma *série ascendente* em um grupo G é uma família de subgrupos de G indexados por ordinais menores que um ordinal β. Digamos $S = \{H_\alpha \ / \ H_\alpha \leq G \text{ e } \alpha < \beta\}$. De modo que:

i) $H_{\alpha_1} \leq H_{\alpha_2}$, se $\alpha_1 \leq \alpha_2$;

ii) H_0 =1 e $G = \bigcup_{\alpha<\beta} H\ \alpha$;

iii) $H_\alpha \lhd H_{\alpha+1}$;

iv) $H_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} H_\alpha$; se λ é um limite ordinal finito.

Comumente escrevemos 1= $H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_\beta = G$ para denotar uma série ascendente; onde cada H_α é um *termo* e cada ${}^{H_\alpha}/_{H_{\alpha+1}}$ é um *fator* da série. Aqui β é um comprimento do tipo ordinal. Se β é finito temos uma série de comprimento finito que é um objeto familiar. Nesse caso, indexamos os termos da série (ou cadeia) por números naturais.

Dizemos que H é um *subgrupo ascendente* se ele ocorre em uma série ascendente de um grupo G.

Definição 5: Dizemos que um grupo G é NOETHERiano (ou satisfaz a condição maximal para subgrupos) se ocorre(m) uma (todas) das (as) propriedades seguintes:

i) Toda família não vazia de subgrupos de G possui um elemento maximal;

ii) Toda cadeia ascendente $H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n \leq \cdots$ de subgrupos de G é finita;

iii) Todo subgrupo de G é finitamente gerado.

Exemplo 3: Se G é um grupo abeliano, temos que G é policíclico se, e somente se, G é NOETHERiano (Ver [1]; pág. 4).

No capítulo 12 de [2] podemos ver algumas generalizações de resultados estabelecidos para os grupos nilpotentes e os grupos solúveis. O radical de Hirsch-Plotkin, o maior subgrupo normal localmente nilpotente de um grupo, decorre do fato de que o produto de dois subgrupos normais localmente nilpotente é também um subgrupo (normal) localmente nilpotente. É conhecido que esse fato não se verifica para subgrupos normais localmente solúveis (ver [4], § 8.1). Portanto, em geral, não poderíamos esperar que existisse $R_{\mathfrak{L}\mathfrak{S}}\ (G)$, o radical localmente solúvel de um grupo G.

Existe uma relação de proximidade entre as classes $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{P}$. Claramente temos que $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{S}$ e, sob certas condições, podemos concluir que elas são iguais.

Esse fato de $\mathfrak{P}$ ser uma classe "menor" que $\mathfrak{S}$, implicando que policiclicidade é uma propriedade mais forte que solubilidade, certamente motivou os esforços na investigação de uma maneira de se provar a existência do radical localmente policíclico.

A segunda seção de nosso trabalho foi reservada para a apresentação de alguns resultados relativos à classe $\mathfrak{P}$ dos grupos policíclicos. Nela mostramos que a classe $L\mathfrak{P}$, dos grupos localmente policíclicos, é fechada a extensões.

Na seção 3 damos uma demonstração da existência de um radical análogo ao de Hirsch-Plotkin quando $\mathcal{L}\mathfrak{P}$ é a classe considerada.

2. Apresentação de resultados

Os resultados desta seção fazem parte dos resultados utilizados na dissertação de mestrado citada em nossa referência [1]. Embora sejam conhecidos, entendemos que eles poderiam fazer parte deste trabalho e que suas demonstrações também deveriam ser incluídas.

Observação 1: Seja G um grupo, $H \leq G$ e $N \trianglelefteq G$. Então, valem:

i) Se G é policíclico, ambos, H e G/N são policíclicos.

ii) Se, N e G/N são policíclicos, G é policíclico.

Demonstração: i) Suponhamos que $G \in \mathfrak{P}$. Então, existe em G uma cadeia $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_{n-1} \trianglelefteq G_n = G$; onde cada G_i/G_{i-1} é cíclico; para $i = 1, 2, \ldots, n$. Podemos considerar em H a cadeia $1 = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = H$; onde $H_i = H \cap G_i$. Vale que $H_i/H_{i-1} = H_i/H \cap G_{i-1} = H_i/(H \cap G_i) \cap G_{i-1}$; já que vale a inclusão $G_{i-1} \trianglelefteq G_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Por isomorfismo concluímos que $H_i/H_{i-1} = H_i/H_i \cap G_{i-1} \cong G_{i-1}H_i/G_{i-1} \leq G_i/G_{i-1}$ é cíclico para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Daí H é policíclico.

Agora, $N/N = G_0N/N \trianglelefteq G_1N/N \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_{n-1}N/N \trianglelefteq G_nN/N = G/N$ é uma cadeia tal que, $\dfrac{G_iN/N}{G_{i-1}N/N} \cong G_iN/G_{i-1}N = G_i\,(G_{i-1}N)\,/G_{i-1}N$, usando novamente isomorfismos de grupos e a inclusão $G_{i-1} \trianglelefteq G_i$. Novamente Por isomorfismo, $G_i\,(G_{i-1}N)\,/G_{i-1}N \cong G_i/G_{i-1}\,N \cap G_i \cong \dfrac{G_i/G_{i-1}}{G_{i-1}N \cap G_i/G_{i-1}}$ é um grupo cíclico, o que mostra que cada ${}^{G_iN/N}\!\big/_{G_{i-1}N/N}$ é cíclico para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Daí G/N é policíclico.

ii) Como $N \in \mathfrak{P}$, existe uma cadeia $1 = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq N_{r-1} \trianglelefteq N_r = N$ com N_i/N_{i-1} cíclico; para $i = 1, 2, \dots, r$. Também temos $G/N \in \mathfrak{P}$, portanto, existe $N/N = L_0/N \trianglelefteq L_1/N \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq L_{t-1}/N \trianglelefteq L_t/N = G/N$, uma cadeia onde $t \in \mathbb{N}$ e cada quociente ${}^{L_j/N}\!\big/_{L_{j-1}/N} \cong L_j/L_{j-1}$ é cíclico; para $j = 1, 2, \dots, t$. Segue então que $1 = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq N_{r-1} \trianglelefteq N_r = N = L_0 \trianglelefteq L_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq L_{t-1} \trianglelefteq L_t = G$ é uma cadeia em G cujos fatores são cíclicos e por isso G é policíclico.

Observação 2: Seja G um grupo e N um subgrupo normal de G. Então G é NOETHERiano se, e somente se, N e G/N são NOETHERianos.

Demonstração: Consideremos uma cadeia ascendente $H_1 \leq H_2 \leq \cdots \leq H_i \leq \cdots \leq G$. Se N e G/N possuem condição maximal, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $H_i \cap N = H_n \cap N$ e $H_iN/N = H_nN/N$; ou seja, $H_i \cap N = H_n \cap N$ e $H_iN = H_nN$; $\forall\, n \leq i \in \mathbb{N}$. Isso mostra que $H_i = H_i \cap (H_iN) = H_i \cap (H_nN) = H_n(H_i \cap N) = H_n(H_n \cap N) = H_n$; $\forall\, n \leq i \in \mathbb{N}$; ou seja, essa cadeia é finita. Portanto, G possui condição maximal.

No outro sentido é evidente. Se G é NOETHERiano não podemos ter cadeias ascendentes infinitas em N e G/N.

Observação 3: Seja G um grupo. Então, são equivalentes:

i) G é policíclico;

ii) G é solúvel e satisfaz a condição maximal.

Demonstração: Suponhamos primeiramente que G é policíclico. Nesse caso, existe uma cadeia $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_{n-1} \trianglelefteq G_n = G$; onde cada quociente G_i/G_{i-1} é um grupo cíclico; para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Portanto G é solúvel. Além disso, pelo item i) da observação 1, o grupo G_{n-1} é policíclico. Por indução sobre o comprimento da cadeia acima, temos que G_{n-1} satisfaz a condição maximal. Como G/G_{n-1} é (cíclico) finitamente gerado, concluímos, pela observação 2, que G satisfaz a condição maximal.

Suponhamos agora que G solúvel com condição maximal. Podemos considerar a série $1 = G^{(s)} \trianglelefteq G^{(s-1)} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G^{(1)} \trianglelefteq G^{(0)} = G$ das derivadas de G ;

onde cada quociente $G^{(i-1)}/G^{(i)}$ é abeliano; para $i = 1, 2, \dots, s$. Como G possui condição maximal, pela observação 1, cada quociente desses também possui. Portanto são grupos abelianos finitamente gerados. Pelo exemplo 3 de nossa seção 1, segue que cada quociente $G^{(i-1)}/G^{(i)}$ é policíclico; para $i = 1, 2, \dots, s$. Pelo item ii) da observação 1, temos que G é policíclico.

A observação abaixo será utilizada para demonstrarmos o teorema 1. Nós omitiremos a sua demonstração, mas indicamos a página 124 de nossa referência [2] caso haja interesse em mais detalhes das proposições que ela apresenta.

Utilizando a ideia do conjugado de um elemento de um grupo G, de forma bastante natural, podemos considerar $X \subset G$ e $H \leq G$ e definir o *fecho normal* de X em G como sendo o conjunto $X^H = \langle x^h = h^{-1}xh \ / \ x \in X \text{ e } h \in H \rangle$. Claro que temos $X \subset X^H \lhd \langle X, H \rangle$ e assim, vale que $X^H = X^{\langle X, H \rangle}$.

Observação 4: Sejam G um grupo; $H, \mathrm{K} \leq G$ e $M, N \subset G$. Então, valem as igualdades:

i) $M^K = \langle M, [M, \mathrm{K}] \rangle$.

ii) $[M, \mathrm{K}]^K = [M, \mathrm{K}]$.

iii) $[M, N]^K = [M, K]$, se $K = \langle N \rangle$.

iv) $[H, K] = [M, N]^{HK}$, se $H = \langle M \rangle$ e $K = \langle N \rangle$.

Teorema 1: Sejam H e K subgrupos normais localmente policíclicos de um grupo G. Então $J = HK$ é (um subgrupo normal de G) localmente policíclico.

Demonstração: Seja $L = \langle h_1k_1, h_2k_2, \cdots, h_nk_n \rangle$ um subgrupo finitamente gerado de J. Podemos considerar os subgrupos $X = \langle h_1, h_2, \cdots, h_n \rangle$ e $Y = \langle k_1, k_2, \cdots, k_n \rangle$ de modo que tenhamos $L \leq \langle X, Y \rangle = Z$. Provaremos, e é suficiente, que Z é um grupo policíclico.

Consideremos o conjunto $C = \{[h_i, k_j] / \ i, j = 1, 2, \dots, n\}$. Como H e K são normais em G, vale que $C \subset H \cap K$. Portanto, $\langle X, C \rangle$ é um subgrupo finitamente gerado de H e por isso é policíclico. Pela observação 3, $\langle X, C \rangle$ possui condição maximal e, $C^X = \langle C, [C, \mathrm{X}] \rangle$ pelo item i) da observação 4, contido em $\langle X, C \rangle$, é finitamente gerado. Seguindo, temos $Y, C^X \subset K = K^X$ e assim $\langle Y, C^X \rangle$ é um subgrupo finitamente gerado de K. Logo $\langle Y, C^X \rangle$ é policíclico. Pelos itens i) e iv) da observação anterior, segue que $\langle Y, C^X \rangle = \langle Y, C^{XY} \rangle = \langle Y, [X, Y] \rangle = Y^X$ é policíclico.

Argumentando de maneira análoga a partir do subgrupo $\langle Y, C\rangle$, chegaremos à conclusão que também $X^Y = \langle X, C^{Y}\rangle$ é policíclico.

Por fim, temos que $Y^X, X^Y \trianglelefteq \langle X, Y\rangle = Z$. Pelo item ii) da observação 1, temos que $Y^X X^Y$ é um subgrupo (normal) policíclico de $\langle X, Y\rangle = Z$. Mas claramente temos $Y^X X^Y = Z$, o que mostra que $J = HK$ é um subgrupo (normal) localmente policíclico de G.

A demonstração acima pode ser mais visível se definirmos $H_1 = \{h_1, h_2 \cdot, \cdots, h_n\}$ e $K_1 = \{k_1, k_2 \cdot, \cdots, k_n\}$ de modo que tenhamos $C = [H_1, K_1]$. Mas com um pouco de paciência é possível entender a aplicação do item iv) da observação 4, na conclusão de que Y^X e X^Y são policíclicos.

3. O Radical localmente policíclico

Apresentaremos essencialmente dois resultados que consideramos a parte central deste pequeno trabalho. O esforço feito aqui é orientado pelas discussões feitas com relação à classe $L\mathfrak{N}$ dos grupos localmente nilpotentes, no capítulo 12 de nossa referência [2]. Essencialmente respondemos ao problema colocado na seção 12.5, que já afirma a existência desse radical.

Teorema 2: Seja G um grupo. Então:

i) Em G existe um único subgrupo normal localmente policíclico maximal. Tal subgrupo, indicado por $R_{\mathcal{L}\mathfrak{P}}(G)$, contém todos os subgrupos normais localmente policíclicos de G.

ii) Se M é um subgrupo localmente policíclico maximal de G, vale que o subgrupo normalizador de M em G é autonormalizante: $\aleph_G(\aleph_G(M)) = \aleph_G(M)$.

Demonstração: i) Combinando os argumentos usados no exemplo 2 da seção 1 com o lema de Zorn, vemos que cada subgrupo normal localmente policíclico de G está contido em um subgrupo normal localmente policíclico maximal de G. Além disso, se H e K são subgrupos normais localmente policíclicos maximais de G, pelo teorema 1, HK é um subgrupo normal localmente policíclico de G. Como $H \leq HK$ e $K \leq HK$, vale que $HK = H = K$; já que H e K são maximais. Segue que $H = K = R_{\mathcal{L}\mathfrak{P}}(G)$ é o único subgrupo normal localmente policíclico maximal de G.

ii) Claro é que $\aleph_G(M) \leq \aleph_G(\aleph_G(M))$. Para verificarmos a outra inclusão, consideremos qualquer elemento x em $\aleph_G(\aleph_G(M))$. Vale que $M^x \trianglelefteq \aleph_G(M)$ e por isso temos que M e M^x são subgrupos normais localmente policíclicos em $\aleph_G(M)$. Pelo teorema 1, temos que MM^x é localmente policíclico com $M \leq MM^x$. Pela maximalidade de M, vemos que $M = MM^x$ e por isso temos $M^x \subset M$. Pela generalidade na escolha de x, vale também a inclusão $M^{x^{-1}} \subset M \Leftrightarrow M \subset M^x$. Isso mostra que $M^x = M$. Consequentemente, $x \in \aleph_G(M)$.

Teorema 3: Seja G um grupo e H um subgrupo localmente policíclico ascendente em G. Então, vale que $H \leq R_{\mathcal{L}\mathfrak{P}}(G)$.

Demonstração: Por hipótese, existe uma série $H = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_\beta = G$. Definindo $\overline{H_\alpha} = H^{H_\alpha}$, obtemos a série ascendente $H = \overline{H_1} \lhd \overline{H_2} \lhd \cdots \lhd \overline{H_\beta} = G$. Provaremos, e é suficiente, que cada $\overline{H_\alpha}$ é localmente policíclico. Assim teremos que $\overline{H_\beta} = H^G$ é um subgrupo normal localmente policíclicos de G e, pelo item i) do teorema 2, $H \leq \overline{H_\beta} = H^G \leq R_{\mathcal{L}\mathfrak{P}}(G)$.

Procederemos por indução transfinita sobre o comprimento ordinal da série $H = \overline{H_1} \lhd \overline{H_2} \lhd \cdots \lhd \overline{H_\beta} = G$. Se $\beta = 1$, temos $H = \overline{H_1} \trianglelefteq G$, com H localmente policíclico, e assim $H \leq R_{\mathcal{L}\mathfrak{P}}(G)$.

Suponhamos agora que existe um primeiro ordinal α tal que $\overline{H_\alpha}$ não seja localmente policíclico. Temos dois casos para analisar.

<u>1º caso</u>: *α é um limite ordinal.*

Temos então $\bigcup_{\gamma<\alpha} \overline{H_\gamma} = \overline{H_\alpha}$. Pela escolha de α, temos $\overline{H_\gamma}$ localmente policíclico para todo $\gamma < \alpha$. Como $(L\mathfrak{P})G = \{H / H \leq G \text{ e } H \in L\mathfrak{P}\}$ é indutivamente ordenada (reveja o exemplo 2 em nossa introdução), vale que $\bigcup_{\gamma<\alpha} \overline{H_\gamma} = \overline{H_\alpha} \in (L\mathfrak{P})G$. Uma contradição!

<u>2º caso</u>: *α não é um limite ordinal.*

Sendo $\alpha - 1 < \alpha$, vale que $\overline{H_{\alpha-1}}$ é localmente policíclico. Além disso, temos que $(\overline{H_{\alpha-1}})^{H_\alpha} = (H^{H_{\alpha-1}})^{H_\alpha} = H^{H_\alpha} = \overline{H_\alpha}$ o que mostra que $(\overline{H_{\alpha-1}})^x \lhd (\overline{H_\alpha})^x = \overline{H_\alpha}$; $\forall\, x \in H_\alpha$. Consequentemente, $\overline{H_\alpha}$ é igual ao produto de subgrupos normais localmente policíclicos. Pelo teorema 1, concluímos que $\overline{H_\alpha}$ é localmente policíclico. Outra contradição! Então cada $\overline{H_\alpha}$ é localmente policíclico. Por conseguinte, $\overline{H_\beta} = H^G$ é um subgrupo normal localmente policíclico de G e $H \leq R_{\mathcal{L}\mathfrak{P}}(G)$.

4. Considerações finais

As discussões feitas sobre essas particulares classes de grupos nos levam a imaginar questões mais amplas ao considerarmos $\mathfrak{X}$ uma classe ou propriedade mais geral de grupos. Uma exigência mínima sobre $\mathfrak{X}$ poderia ser o fechamento para subgrupos, quocientes e extensões. Também poderia ser exigido que: Se H e K são $\mathfrak{X}$-subgrupos normais de um grupo G; então $J = HK$ é um $\mathfrak{X}$-subgrupo (normal) de G. A não existência de $R_{\mathcal{L}\mathfrak{S}}(G)$, o radical localmente solúvel de um grupo G, mencionada em nossa introdução, mostra que é preciso exigir mais sobre a classe $\mathfrak{X}$ para que se possa concluir que existe $R_{\mathfrak{X}}(G)$, *o maior subgrupo normal localmente* $\mathfrak{X}$ *de* G.

O estudo dos *Grupos radicais*, grupos nos quais existe uma série ascendente cujos fatores são localmente nilpotentes, é motivado pela existência do radical de Hirsch-Plotkin. Isso poderia também embalar nossa imaginação para tentar investigar conceitos mais gerais. Podemos pensar em grupos $\mathfrak{X}$-radicais: grupos nos quais exista uma série ascendente cujos fatores sejam localmente $\mathfrak{X}$-grupos. Nesse contexto grupos radicais seriam denominados *grupos* $L\mathfrak{N}$*-radicais*.

5. Bibliografia

[1] Ramos, J. Ivan. S.; *Supersolubilidade em grupos noetherianos*; Dissertação de mestrado; Universidade de Brasília; Brasília-DF-Brasil (1993);

[2] Robinson, D. J. S.; *A course in the theory of groups*; Springer Verlag; New York-Berlim-Heidelberg (1996);

[3] Robinson, D. J. S.; *Finiteness conditions and generalized soluble groups*; Part 1; Springer Verlag; New York-Berlim-Heidelberg (1972);

[4] Robinson, D. J. S.; *Finiteness conditions and generalized soluble groups*; Part 2; Springer Verlag; New York-Berlim-Heidelberg (1972);

José Ivan da Silva Ramos

Rua Maranhão, nº 133 – Bairro Bosque – Rio Branco – Acre

CEP: 69908-240

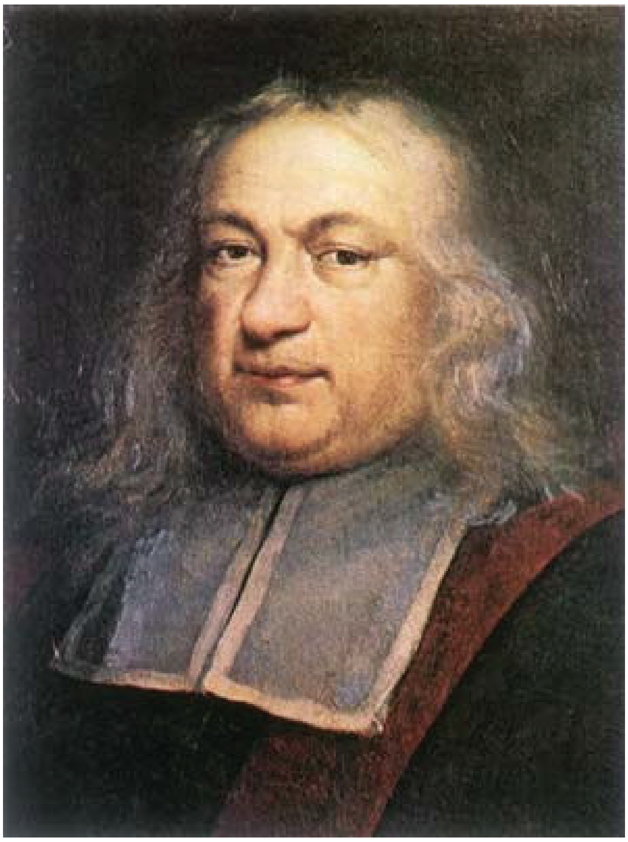
ivanr@ufac.br

Tels.: 0xx68-3301-1416 e 0xx68-84067712.

Revista Elementos • 2ª edição • ano 2012 • 110-114

Revista
ELEMENTOS

Nota Histórica



Pierre de Fermat

*17 de agosto de 1601, em Beaumont-de-Lomagne, França.

✝12 de janeiro de 1665, em Castres, França.

O pai de **Pierre Fermat** era um próspero comerciante de couro e segundo cônsul de Beaumont-de-Lomagne. Fermat tinha um irmão e duas irmãs, e foi quase certamente criado em sua cidade de nascimento. Embora haja pouca evidência acerca de sua educação, é quase certo que tenha estudado no monastério Franciscano local.

Ele esteve na Universidade de Toulouse antes de se mudar para Bordeaux na segunda metade dos anos 1620. Em Bordeaux ele começou suas primeiras pesquisas matemáticas sérias e em 1629 ele deu uma cópia de sua restauração do trabalho de Apolônio - *Planos* - a um dos matemáticos da instituição. Certamente em Bordeaux ele esteve em contato com Beaugrand e durante este período ele produziu importantes trabalhos sobre máximos e mínimos, dados a Etienne d'Espagnet, que claramente compartilhava com Fermat o interesse pela Matemática.

De Bordeaux, Fermat foi para Orléans, onde estudou direito na Universidade. Ele formou-se advogado civil e comprou um escritório no parlamento, em Toulouse. Então, em 1631 Fermat era advogado e oficial do governo em Toulouse e por causa de seu escritório, mudou seu nome para **Pierre de Fermat**.

Pelo resto de sua vida ele viveu em Toulouse, mas além de trabalhar lá, também trabalhou em sua cidade natal e em Castres. Sua carreira foi meteórica, em parte por tempo de serviço e idade, em parte porque a praga levou a maioria dos mais velhos. Ele mesmo foi atingido pela doença e ficou tão mal que sua morte foi prematuramente anunciada.

Naturalmente Fermat estava preocupado com Matemática, senão não estaria nesta página! Ele manteve sua amizade com Beaugrand mesmo depois de mudar-se para Toulouse, mas lá ele encontrou um novo amigo em Matemática, Carcavi. Fermat conheceu Carcavi por força de profissão, pois eram colegas como advogados em Toulouse. Mas também compartilhavam o amor pela Matemática e Fermat contou a Carcavi sobre suas descobertas.

Em 1636 Carcavi foi a Paris na condição de bibliotecário real e fez contato com Mersenne e seu grupo. O interesse de Mersenne foi cultivado pelas descrições de Carcavi sobre o trabalho de Fermat acerca de corpos em queda. Carcavi escreveu a Fermat, que respondeu em 26 de abril de 1636, e, além de contar a Messenne sobre erros que ele acreditava ter encontrado nos trabalhos de Galileu sobre queda livre, ele também contou a Mersenne sobre seus trabalhos em espirais e sobre a restauração do *Planos*. Seu trabalho em espirais foi motivado pela consideração do caminho descrito por corpos em queda livre e ele usou métodos generalisados a partir de *Sobre espirais*, de Arquimedes. Fermat escreveu:

> "*Eu também encontrei diversos tipos de análises para problemas vários, tanto numéricos como geométricos, nos quais a análise de Viète não seria suficiente. Eu repartirei tudo com você quando você o desejar e o faço sem ambição, da qual eu sou mais livre e estou mais distante do que qualquer homem no mundo.*"

É irônico que este contato inicial com Fermat e a comunidade científica tenha sido através de seu estudo sobre queda livre, já que Fermat tinha pouco interesse em aplicações físicas da Matemática. Mesmo com seus resultados em queda livre ele estava muito mais interessado em provar teoremas sobre Geometria do que em sua relação com o mundo real. Nesta primeira carta, contudo, havia dois problemas sobre máximos que Fermat pediu a Mersenne que fossem passados aos matemáticos de Paris. Aliás, este era o estilo de Fermat: desafiar outros a obter resultados que ele já havia obtido.

Roberval e Mersenne acharam que os problemas propostos por Fermat nesta primeira (e em subseqüentes) carta eram extremamente difíceis e usualmente insolúveis usando as técnicas correntes. Eles pediram a Fermat para divulgar seus métodos e Fermat mandou seu *Método para determinar Máximos e Mínimos e Tangentes a Linhas Curvas,* sua restauração de *Planos* e sua aproximação algébrica à Geometria *Introdução aos Planos e Sólidos* aos matemáticos de Paris.

Sua reputação como um dos maiores matemáticos do mundo veio rapidamente, mas tentativas de publicar seus trabalhos falhavam, principalmente porque Fermat de fato nunca quis por seus trabalhos em uma forma apresentável. Contudo, alguns de seus métodos foram publicados, como por exemplo no trabalho de Hérigone, *Cursus mathematicus*, que continha um suplemento com os métodos de Fermat para encontrar máximos e mínimos.

Esta sua maneira de desafiar outros matemáticos logo contribuiu para o acúmulo de inimizades. Uma dessas controvérsias envolveu Descartes. Beaugrand enviou para Fermat o trabalho de Descartes intitulado *La Dioptrique* para avaliação, mas Fermat deu pouca atenção, dado que estava no meio de uma correspondência com Roberval e Pascal sobre métodos de integração e centros de massa. Diante da insistência de Mersenne, Fermat emitiu a seguinte opinião sobre *La Dioptrique*: tateando nas sombras.

Ele afirmava que Descartes não deduziu corretamente sua lei de refração, já que era inerente às suas hipóteses. Dizer que Descartes ficou desagradado é um eufemismo. Rapidamente Descartes encontrou uma razão para ficar ainda mais furioso, ao perceber que o trabalho de Fermat sobre máximos, mínimos e tangentes poderia ofuscar aquele que considerava seu trabalho mais importante, *La Geómétrie*.

Descartes atacou os métodos de Fermat para máximos, mínimos e tangentes. Roberval e Etienne Pascal envolveram-se na discussão e eventualmente também Desargues, a quem Descartes indicou como árbitro. Fermat mostrou-se correto e eventualmente Descartes admitiu isto escrevendo:

> *"... vendo o último método que você usa para encontrar tangentes à linhas curvas, posso avaliá-lo de uma única maneira, afirmando que é de fato muito bom e que, se você o tivesse explicado deste jeito no princípio, eu não teria contradito em hipótese alguma."*

Várias razões contribuíram para que entre 1643 e 1654 Fermat ficasse fora de contato com seus colegas em Paris. Primeiramente, a pressão do trabalho, que o impedia de dedicar tempo à Matemática. Segundo, uma guerra civil em 1648 que afetou Toulouse. Finalmente, a praga em 1651, que quase levou Fermat à morte. Contudo, foi neste período que Fermat trabalhou em teoria dos números.

Fermat é melhor lembrado quando associado a seu trabalho em teoria dos números, em particular pelo Último Teorema de Fermat. Este teorema diz que

$$x^n + y^n = z^n$$

não tem solução inteira não-nula para x, y e z quando $n > 2$. Fermat escreveu, na margem da tradução de Bachet para *Aritmética Diofantina*:

> *"Descobri uma demonstração realmente memorável, mas esta margem é muito pequena para contê-la."*

Atualmente acredita-se que a dita "prova" de Fermat estava errada, embora não se possa ter certeza completa. Em 1993 o matemático Inglês Andrew Wiles disse ter provado o teorema, mas, após uma revisão cuidadosa, no final de 1994 sua prova foi aceita.

Tentativas malsucedidas de provar este teorema nos últimos 300 anos, levaram a várias descobertas matemáticas, como por exemplo, a teoria dos anéis comutativos.

Fermat voltou a se corresponder com os matemáticos franceses em 1654, quanto Blaise Pascal - filho de Etienne Pascal - escreveu-lhe para confirmar suas idéias sobre probabilidade. A curta correspondência entre os dois serviu de fundação para a teoria das probabilidades e, por causa disso, eles são atualmente considerados fundadores do assunto.

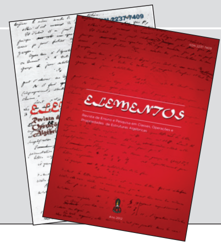
Neste mesmo período, um dos alunos de Descartes estava organizando sua correspondência para publicação e pediu ajuda a Fermat a respeito de sua correspondência com Descartes. Isto fez com que Fermat repensasse os argumentos por ele usados 20 anos antes, sobre suas objeções à óptica de Descartes. Em particular, ele estava insatisfeito com as descrições de Descartes para a refração da luz e então aproveitou a deixa e estabeleceu um princípio que de fato resultou na lei dos senos para a refração que Snell e Descartes propuseram. Fermat deduziu esta lei a partir de um princípio fundamental por ele proposto, o de que a luz sempre percorre o menor caminho possível. O princípio de Fermat, hoje uma das mais básicas leis da óptica, não foi muito bem recebido pelos matemáticos da época.

Fermat também deixou grandes contribuições em Teoria dos Números, que na época não era muito bem vista. Por causa disso, e também por sua desorganização com os escritos, suas idéias sobre Teoria de Números acabaram não sendo discutidas com outros matemáticos da época.

Referência para esta nota: The MacTutor History of Mathematics archive; *link original:* ***www.ime.unicamp.br/~calculo/history/fermat/fermat.html***

Revista Elementos • 2ª edição • ano 2012 • 115-116

Revista
ELEMENTOS



Notícia Ruim Eu Não Dou

Sérgio Brazil Júnior
Universidade Federal do Acre

Depois do Primeiro ano de mestrado em Matemática, na Universidade de Brasília, todos os alunos são submetidos a um exame de qualificação. São quatro provas escritas, aplicadas em dias alternados, elaboradas por uma equipe pré-estabelecida de Professores Doutores. É bastante estressante. Se aprovado, o aluno escolhe (ou a comissão de pós-graduação escolhe por ele) um professor para orientá-lo em sua pesquisa até o término do curso. Senão, esse aluno, depois de seis meses, tem mais uma chance. Uma segunda reprovação significa ser desligado do programa de Mestrado.

O Fato que irei narrar ocorreu com uma turma de alunos que entrou após a minha. O exame de qualificação foi aplicado para essa turma no início do ano de 1997 e um dos membros da equipe elaboradora das provas era um professor estrangeiro, cujo nome e nacionalidade irei omitir por motivos éticos. Seu nome fictício será Mustafa. Mustafa era um senhor de cabelos branco, bastante ranzinza e com um tom de voz baixo e enrolado.

Uma semana após o término do dito exame, saiu o tão esperado resultado. Nesse momento, três alunos que estavam no ambiente do Departamento de Matemática, ao verem Mustafa saindo por uma das portas de acesso, se aproximaram dele!

O primeiro aluno, nervoso, mas confiante, pergunta:

___ Professor, Eu passei?

Mustafa, com sua voz baixa e enrolada, pergunta o nome do aluno, olha na lista e responde:

__ Ok! Você passou, parabéns. Pode tomar cerveja.

O segundo aluno, nervoso, pergunta:

__ E Eu professor, Passei?

Mustafa faz o mesmo procedimento e responde:

__ Você também passou. Pode tomar cerveja.

Apreensivo o Terceiro aluno pergunta a Mustafa;

__ Professor, e eu?

Mustafa pergunta-lhe o nome, olha para a lista dos aprovados, faz uma pausa e diz:

__ Meu jovem procure outra pessoa para lhe dar o resultado, pois **notícia ruim eu não dou.**

Sérgio Brazil Júnior
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Universidade Federal do Acre
sbrazil@ufac.br
(68)9984-1022

Revista
ELEMENTOS

PROFMAT

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA-PROFMAT

O PROFMAT é um programa de pós-graduação gratuito, reconhecido pelo MEC/CAPES e que conduz ao grau de Mestre. As vagas são para professores de escola pública e pessoas da comunidade em geral. Este ano a rede do PROFMAT foi ampliada, oferecendo cerca de 1.500 vagas distribuídas por mais de 65 pólos em todos os Estados e no Distrito Federal do Brasil.

Informações a respeito desse mestrado podem ser obtidas no seguinte endereço eletrônico: www.profmat-sbm.org.br/.

impa

Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio - PAPMEM

UFAC

Este programa visa oferecer treinamento gratuito para professores de Matemática do Ensino Médio de todo o país. É realizado, sob diversas formas, desde 1990, abordando assuntos relativos às três séries do Ensino Médio. Atualmente, este programa tem recebido apoio para sua realização da CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

A Universidade Federal do Acre aderiu a este programa em 2012, tendo sido realizada duas edições. Em 2013, haverá mais um encontro entre os dias 21 e 25 de janeiro, na UFAC.

toujours le même nombre de permutations.

Mais il est curieux de savoir si le degré peut s'abaisser.

Et d'abord il ne peut s'abaisser plus bas que p, puisqu'une équation de degré moindre que p, ne peut avoir p pour facteur dans le nombre des permutations de son groupe.

Voyons donc si l'équation de degré $p+1$ dont les racines x_k s'indiquent en donnant à k toutes les valeurs y compris l'infini et dont le groupe a pour substitutions

$$x_k \qquad x_{\frac{ak+b}{ck+d}} \qquad ad-bc \text{ étant un carré}$$

peut s'abaisser au degré p.

Or il faut pour cela que le groupe se décompose (improprement, s'entend) en p groupes de $(p+1)\frac{p-1}{2}$ permutations chacun.

Soient 0 et ∞ deux lettres conjointes dans l'un de ces groupes. Les substitutions qui ne font pas changer 0 et ∞ de place seront de la forme

$$x_k \qquad x_{m^2 k}$$

Donc si M est la lettre conjointe de 1 la lettre conjointe de m^2 sera $m^2 M$. Quand M est un carré on aura donc $M^2=1$. Mais cette simplification ne peut avoir lieu que pour $p=5$.

Pour $p=7$ on trouve un groupe de $(p+1)\frac{p-1}{2}$ permutations où $\infty\ 1\ 2\ 4$ ont respectivement pour lettres conjointes $0\ 3\ 6\ 5$.

Ce groupe a ses substitutions de la forme

$$x_k \qquad x_{a\frac{k-b}{k-c}}$$

b étant la lettre conjointe de c et a une lettre qui est à la fois résidu ou non résidu en même temps que c.

Pour $p=11$ les mêmes substitutions auront lieu avec les mêmes notations,

$\infty\ 1\ 3\ 4\ 5\ 9$ ayant respectivement pour conjointes $0\ 2\ 6\ 8\ 10\ 7$

Ainsi, pour les cas de $p=5, 7, 11$, l'équation modulaire s'abaisse au degré p.

elementos@ufac.br

En toute rigueur, cette réduction n'est pas possible dans les cas plus élevés.