Revista Elementos • 2ª edição • ano 2012 • 27-41

Revista
ELEMENTOS

Sequências que Definem o Grau de uma Função

Dedicado ao 81º aniversário de meu pai

José Ivan da Silva Ramos
Universidade Federal do Acre

Resumo

Por comparação objetos matemáticos podem ser identificados dentro de universos mais simples. A existência de uma correspondência biunívoca entre o conjunto das sequencias quase nulas e um subconjunto do conjunto das funções reais permite que se faça uma defesa do conceito de grau de determinadas funções.

Abstract

By comparison mathematical objects can be identified within universes simpler. The existence of one-one correspondence between the set of sequences near zero and a subset of the set of real functions allows you to make a defense of the concept of degree of certain functions.

Palavras Chaves: Sequências, funções, polinômios, isomorfismos e grau.

Introdução: Justificativa e Objetivos

Comecei a carreira do magistério nas últimas séries do ensino ginasial (hoje denominado de ensino fundamental). Depois de um ano passei a atuar também no 2º grau (hoje chamado de ensino médio). De lá para cá já são 26 anos procurando desenvolver minhas habilidades e ensinar com certa responsabilidade os temas relacionados com a Matemática. A opção pela abstração da Álgebra apareceu muito cedo e junto as mais diversas angústias.

Tão necessário como é a padronização da linguagem matemática, constituída de símbolos, fórmulas e proposições, que se acumulam ao longo do tempo, é a interpretação de tudo aquilo que podemos apreciar e "saborear" ao lermos um texto de Matemática. Leitura que imprescindivelmente deve ser feita corretamente, em obediência às regras gramaticais do português, do inglês ou de qualquer outra língua em que ele se traduz.

Muitas vezes, nas variadas tentativas de justificarmos as regras ou propriedades inerentes aos objetos matemáticos podemos, por empirismo, formalizar conceitos distantes do rigor que essa ciência exige.

A proximidade dos alunos dos cursos de graduação e pós-graduação, especialmente aqueles cursos ligados à Matemática e às Tecnologias, nos faz participar de várias realizações como, por exemplo, o sucesso dos alunos em uma disciplina mais específica da Matemática ou de angústias como as "confusões" que certas orientações de leitura ou uso indevido de notação podem provocar. Uma discussão que presenciei se refere a um grupo de alunos por não estarem aceitando o fato de que "zero é um número par". A justificativa dada, inclusive por pessoas mais experientes, era de que "esse número inteiro não é nada". Uma afirmação descuidada. Outra girava em torno de que vale a igualdade $\sqrt{16} = -4$, já que $(-4)^2 = 16$, mais uma confusão com claras definições matemáticas.

Atualmente leciono uma disciplina de Álgebra Básica no 1º período de um Curso de Licenciatura em Matemática e outra disciplina de Álgebra em um Curso de mestrado em Matemática. Esse último, uma ação conjunta entre a UFAC e a UFAM. Isso permite que eu faça constantes avaliações quanto à forma de abordar e dosar os conteúdos relacionados com essas disciplinas.

Numa das aulas da graduação, onde o objeto de estudo era o conjunto das funções reais, após definir a adição de funções, usei uma função específica, chamando-a de "função do 2º grau". Educadamente um dos alunos fez um questionamento, inclusive dizendo que também se sentia privado do "direito" de usar esse "nome" para uma função que, para ele era assim chamada e que, agora, na Universidade, foi aconselhado a chamá-la de "função quadrática". Uma "boa justificativa" para isso era a ausência de resposta para a natural pergunta: se essa função tem grau, então qual é o grau da função exponencial, por exemplo? Depois de uma breve conversa a respeito de como essa informação chegou para a turma, pude constatar que a mesma não foi feita de forma irresponsável. Havia uma motivação para que isso fosse realmente colocado para os alunos. Mesmo assim, resolvi intervir. Adiantei aos alunos que assim, por comparação com os outros elementos desse conjunto de funções, poderíamos realmente ser levados a divulgar que seria incorreto insistir no uso desse termo. Mas, como os polinômios em breve seriam tocados em nossas aulas, poderíamos em breve fazer uma defesa da permanência da relação do grau com determinadas funções reais. Essa é a principal motivação para eu ter me dedicado a escrever esse pequeno relato.

A descrição do conjunto $\mathbb{P}$ dos polinômios e o conceito de homomorfismo serão colocados em nossa 3ª seção de modo a darmos a exata justificativa em defesa de que podemos considerar o grau de certas funções reais.

Fundamentos Teóricos - Metodológicos

Apesar das várias vertentes metodológicas é preciso entender que, independentemente do que elas recomendam, o estudo dos vários conceitos matemáticos hoje já sistematizados depende incondicionalmente da uniformização de uma linguagem universal.

Por questão de liderança de uma pessoa ou Instituto, poderíamos adotar uma corrente filosófica como a da Escola Pitagórica. Não existiria chance alguma para questionamentos que conflitam com uma ideia já colocada. Mas, assim, a manutenção de uma boa proposição matemática poderia estar em risco mediante o ceticismo de pensadores que se dedicassem a suscitar dúvidas, substituindo o mérito e o rigor de uma verdade matemática por um consenso filosófico.

Muitas tentativas de formulações Matemáticas nos levam a realizar pequenos testes. Em geral, perguntas simples nos levam a concluir resultados mais gerais. Porém, um "descuido" pode ser o caminho para a construção de formulações absurdas.

Segundo o suíço Jean Piaget, o principal objetivo da educação é criar indivíduos capazes de fazer coisas novas e não simplesmente repetir o que as outras gerações fizeram, dado que as estruturas operatórias da inteligência não são inatas. Porém, em se tratando da Matemática, caminhamos mais rápido na repetição e aprendizado dos conceitos já postos do que na formalização de um conceito científico novo.

Os conhecimentos e conceitos científicos se desenvolvem a partir de propriedades mais complexas dos objetos matemáticos e se manifestam através do caráter consciente e da voluntariedade, convertendo-se em experiências pessoais e situações concretas.

O desenvolvimento das Ciências, principalmente o desenvolvimento daquelas ciências que, em essência, primam pela generalização, pela abstração e pelo investimento em novas descobertas, é impulsionado por correntes filosóficas do pensamento matemático como o construtivismo, o formalismo e o logicismo. Seguindo ou não uma dessas correntes de pensamento, não podemos ignorar as mais variadas formas de vermos e relacionarmos os objetos matemáticos.

Ações Desenvolvidas

Antes de organizar este relato em defesa da manutenção do fato de podermos atribuir um "grau" para certas funções reais, procurei organizar os argumentos de forma que os conceitos matemáticos que fossem abordados fossem direto à questão que motivou a discussão que está sendo relatada aqui.

Fiz algumas consultas a respeito de o termo "grau" ser atribuído a uma função real. Alguns colegas devolveram a pergunta, certos de que isso é algo velho e já aceito desde as últimas séries do ensino fundamental. Outros, já informados de uma nova forma de discurso a esse respeito, além de aceitarem as novas recomendações: **função não tem grau**, explicaram que o que teria levado eles a aceitarem essa ideia é o fato de que não podemos atribuir um grau a cada uma das funções reais. Qual seria, por exemplo, o grau da função real definida por *senx*? Essa pergunta me foi feita com o intuito de por fim à conversa. Porém, entendi que ela deveria encerrar esse o assunto. Cada vez que eu abordava um colega de estudo procurava falar dos homomorfismos bijetores, começando com aqueles que identificam cada número complexo com um vetor de $\mathbb{R}^2$ ou com uma matriz quadrada de ordem 2. Por fim, lembrava-os de que os polinômios, de fato, são as (funções) sequências quase nulas e que poucas vezes eu vi os colegas professores fazerem essa abordagem. Minhas explicações eram dadas de forma clara, apoiadas nas descrições que faço a seguir.

1. O Conjunto $\mathbb{P}_n\ (x)$ dos polinômios de grau no máximo n

Um polinômio pode ser identificado como uma *sequência de elementos em* $\mathbb{R}$ (o corpo dos números reais) ou $\mathbb{C}$ (o corpo dos números complexos). Essa sequência é formada pelas transformadas de uma função que age de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1. Definição: Denominamos de *sequência real* (*numérica*) ou *complexa* a toda função f que possui domínio $D(f) = \mathbb{N}$ e contra domínio $CD(f) = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.2. Exemplos:

1. A função $\begin{aligned} g\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto g(n) = (-1)^n \end{aligned}$ tem como *conjunto imagem*, $\mathrm{Im}(g) = g(\mathbb{N}) = \{g(n)/n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$

2. Também é uma função $\begin{aligned} l\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto l(n) = \tfrac{1}{n+1} \end{aligned}$. Aqui, temos que $Im(l) = l(\mathbb{N}) = \{l(n)/n \in \mathbb{N}\} = \left\{\dots, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

Ao definir uma sequência **iremos considerar** os valores que a função produz quando atua em $\mathbb{N}$. Em geral, denotamos por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

No exemplo 2, podemos escrever $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$. No exemplo 1, $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, \dots)$.

1.3. Definições:

i) Se para uma seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ temos que $a_n = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$, dizemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *sequência nula*.

ii) Se para $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vale que $a_n = r \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $\forall\, n \in \mathbb{N}$, dizemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *sequência constante*.

iii) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $a_n \neq 0$ para algum $n \leq m \in \mathbb{N}$ e $a_n = 0, \forall\, n > m$, dizemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *sequência quase nula*.

iv) Duas sequencias $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são *iguais* se, e só se, $a_i = b_i, \forall\, i \in \mathbb{N}$.

1.4. Observação: Consideremos o conjunto

$$\mathbb{P} = \{\, (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \,/ a_i \in \mathbb{R};\, i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ e } n \in \mathbb{N}\},$$

das sequências quase nulas, juntamente com a sequencia nula. Então, em $\mathbb{P}$ estão bem definidas as seguintes operações: $\forall\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{P}$:

$+$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_m)_{m\in\mathbb{N}} = (c_t)_{t\in\mathbb{N}}$, tal que $c_t = a_t + b_t, \forall\, t \in \mathbb{N}$.

$\cdot$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_m)_{m\in\mathbb{N}} = (d_l)_{l\in\mathbb{N}}$, onde $d_l = \sum_{l=k+j} a_k b_j$, $\forall\, l \in \mathbb{N}$.

1.5. Exemplos:

1. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 0, 2, 0, 0, \cdots)$ e $(b_m)_{m\in\mathbb{N}} = (2, 2, 2, 2, 2, 0, \dots)$, temos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_m)_{m\in\mathbb{N}} = (c_t)_{t\in\mathbb{N}} = (1, 2, 4, 2, 2, 0, 0, \dots)$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_m)_{m\in\mathbb{N}} = (d_l)_{l\in\mathbb{N}}$, onde

$$d_0 = a_0 b_0 = 2$$

$$d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = -2$$

$$d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 2$$

$$d_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = -2 + 0 + 4 + 0 = 2$$

$$d_4 = a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0 = -2 + 0 + 4 + 0 + 0 = 2 \text{ e}$$

$$d_5 = a_0 b_5 + a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1 + a_5 b_0 = 0 + 0 + 4 + 0 + 0 + 0 = 4.$$

Continuando com esses cálculos, vemos que $d_6 = d_5 = 4$ e $d_7 = d_8 = \cdots = 0$. Logo, $(d_l)_{l\in\mathbb{N}} = (-2, -2, 2, 2, 2, 4, 4, 0, 0, \dots)$.

2. Considerando as sequências

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) = (-1)^n + 3 \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} g: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto g(n) = \begin{cases} n(n-1)(n-2); se\ n \leq 3 \\ 0, se\ n > 3 \end{cases} \end{aligned}.$$

temos

$$f+g:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$n\longmapsto(f+g)(n)=f(n)+g(n)=\begin{cases}(-1)^n+3+n(n-1)(n-2);\,se\ n\leq 3\\(-1)^n+3;\,n>3\end{cases}.$$

Essa função determina a sequência $(4,2,4,8,4,2,4,2,\dots)$, cujo 7º termo é o número 4. **De outra forma:** Tomando a sequência $(4,2,4,2,\dots)$ definida por f e a sequência $(0,0,0,6,0,0,\dots)$ definida por g, temos a soma $(4,2,4,8,4,2,4,2,\dots)$ que é a sequência definida pela função $f+g$.

Cuidado: Considerando a função produto (comumente definida no Cálculo),

$$f.g:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$n\longmapsto(f.g)(n)=f(n).g(n)=\begin{cases}((-1)^n+3).n(n-1)(n-2);\,se\ n\leq 3\\((-1)^n+3).0=0;\,n>3\end{cases},$$

obtemos a sequência $(0,0,0,12,0,0,\dots)$. Enquanto que calculando conforme a definição em 1.4 temos

$$(4,2,4,2,\dots).(0,0,0,6,0,0,\dots)=(0,0,0,24,12,24,12,\dots)$$

que é claramente diferente de $(0,0,0,12,0,0,\dots)$.

Para as operações de adição e multiplicação definidas em $\mathbb{P}$, valem e são de fácil verificação as seguintes propriedades: $\forall\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}};\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}};\ (c_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{P}$,

$\boldsymbol{A_1}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}+[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}+(c_n)_{n\in\mathbb{N}}]=[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}+(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]+(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\boldsymbol{A_2}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}+(b_n)_{n\in\mathbb{N}}=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}+(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\boldsymbol{A_3}$: $\exists\ 0=(0)_{n\in\mathbb{N}}=(0,0,0,0,\dots)\in\mathbb{P}$ e $0+(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}+0=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\boldsymbol{A_4}$: $\exists-(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{P}$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}+[-(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]=-(a_n)_{n\in\mathbb{N}}+(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=0$

$\boldsymbol{M_1}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}.(c_n)_{n\in\mathbb{N}}]=[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.(b_n)_{n\in\mathbb{N}}].(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\boldsymbol{M_2}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.(b_n)_{n\in\mathbb{N}}=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}.(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\boldsymbol{M_3}$: $\exists\ 1=(1,0,0,0,\dots)\in\mathbb{P}$ tal que $1.(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.1=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\boldsymbol{D}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}+(c_n)_{n\in\mathbb{N}}]=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.(b_n)_{n\in\mathbb{N}}+(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.6. Definição: O conjunto $\mathbb{P}$ munido das operações de adição e multiplicação aqui definidas, é chamado de *conjunto dos polinômios de grau no máximo m*.

Os elementos de $\mathbb{P}$ serão representados por letras minúsculas de nosso alfabeto. Além disso, para $f=(a_0,a_1,a_2,\dots,a_m,0,0,\dots)=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $a_n=0\ se\ n>m$, temos que:

i) Se $a_m\neq 0$, então a_m é o *coeficiente dominante* de f.

ii) Se a_m é o coeficiente dominante de f, dizemos que m é o *grau* do polinômio f.

iii) Por $\partial f = m$ denotamos o grau do polinômio *f*.

iv) Não se define o grau do polinômio nulo $0 = (0, 0, 0, \dots)$, já que não existe $a_n \neq 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos em $\mathbb{P}$ o elemento $x = (0, 1, 0, 0, \dots)$. Este elemento é denominado de *identidade*. Precisamente, a identidade x é um polinômio de grau um, cujo coeficiente dominante é um.

Valem os seguintes cálculos

$x^0 = 1 = (1, 0, 0, \dots)$

$x^1 = x = (0, 1, 0, 0, \dots)$

$x^2 = x.x = (0, 1, 0, 0, \dots).(0, 1, 0, 0, \dots) = (0, 0, 1, 0, 0, \dots)$

$x^3 = x^2.x = (0, 0, 1, 0, 0, \dots).(0, 1, 0, 0, \dots) = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$

$x^n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$, onde 1 é o coeficiente dominante e aparece na posição *n* (é o $(n + 1)$-ésimo termo da sequência).

1.7. Observação: O conjunto $\mathcal{C} = \{f \in \mathbb{P}/f = (r, 0, 0, \dots)$ com $r \in \mathbb{R}$ ou $\partial f = 0\}$, munido das operações de a adição e a multiplicação, definidas em $\mathbb{P}$, é denominado de conjunto dos *polinômios constantes*. Podemos identificar cada elemento de $\mathcal{C}$ como um elemento de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Isso pode ser feito assim: $(0, 0, 0, \dots) \equiv 0$, $(1, 0, 0, \dots) \equiv 1$ e $\left(-\sqrt{2}, 0, 0, \dots\right) \equiv -\sqrt{2}$. Em geral, $\forall\, r \in \mathbb{R}$, pomos $(r, 0, 0, \dots) \equiv r$.

1.8. Definição: Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathbb{P}$ o conjunto de polinômios definido em 1.6. Para todo $f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0{,}0, \dots) \in \mathbb{P}$ e $\forall\, t \in \mathbb{R}$, podemos definir: $\cdot$: $t.f = t.(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, \dots) = (ta_0, ta_1, ta_2, \dots, ta_n, 0, \dots) \in \mathbb{P}$.

Valem as seguintes propriedades: $\forall\, r, s \in \mathbb{R}$ e $\forall\, f, g \in \mathbb{P}$,

$\boldsymbol{P_1}$: $r.(f.g) = (r.f).g = f.(r.g)$

$\boldsymbol{P_2}$: $(r.s).f = r.(s.f)$

$\boldsymbol{P_3}$: $(r + s).f = r.f + s.f$

$\boldsymbol{P_4}$: $r.(f + g) = r.f + r.g$

Essa multiplicação (externa) de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{P}$ permite escrever um polinômio de outra forma: para todo $f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0{,}0, \dots) \in \mathbb{P}$, vale que

$f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0{,}0, \dots) =$

$$= (a_0, 0,0, \dots) + (0, a_1, 0,0, \dots) + \cdots + (0, 0, \dots, a_n, 0,0, \dots)$$
$$= a_0(1, 0,0, \dots) + a_1(0, 1, 0,0, \dots) + \cdots + a_n(0, 0, \dots, 1, 0,0, \dots)$$
$$= a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n.$$

Essa é a *forma algébrica* do polinômio f.

1.9. Observação: Sejam $\mathbb{P}$ o conjunto dos polinômios e f qualquer elemento em $\mathbb{P}$. Então, a forma algébrica de f é única.

Demonstração: Consideremos a definição no item 4) de 1.3: se tivermos as igualdades $f = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n = b_0x^0 + b_1x^1 + \cdots + b_nx^n$, vale que $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0,0, \dots) = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, 0,0, \dots)$. Equivalentemente, temos $a_i = b_i, \forall\, i = 0, 1, 2, \dots, n$. Isso mostra que $f = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$ é a (única) forma algébrica de f.

Essa observação permite que reescrevamos o conjunto $\mathbb{P}$ como sendo $\mathbb{P}_n(x) = \{a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \,/ a_i \in \mathbb{R}; i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$, considerando a identidade $x = (0, 1, 0, 0, \dots)$ e a unicidade da forma algébrica de cada elemento em $\mathbb{P}$.

1.10. Exemplos:

1. O polinômio $t = (2, 0, -1, 3, 0, 0, \dots)$ tem a seguinte forma algébrica:

$$t = 2(1,0,0,0,0, \dots) + 0(0,1,0,0,0, \dots) + (-1)(0,0,1,0,0, \dots) + 3(0,0,0,1,0, \dots)$$
$$= 2x^0 + 0x + (-1)x^2 + 3x^3.$$

2. Para os elementos de $\mathbb{P}$: $l = (2, 1, 0, 0, \dots)$ e $J = (0, 1, 0, 4, 0, 0, \dots)$. Temos que:

i) o polinômio $(2,1,0,0,0,0, \dots).(0,1,0,4,0,0, \dots) = (0,2,1,8,4,0, \dots)$ é o produto $l.j$

ii) as formas algébricas de l e j são: $l = (2,1,0,0,0,0, \dots) = 2x^0 + 1x^1 = 2 + x$ e $j = (0,1,0,4,0,0, \dots) = 0x^0 + 1x^1 + 0x^2 + 4x^3 = x + 4x^3$, respectivamente. Daí,

$$l.j = (2 + x^1).(0x^0 + x^1 + 0x^2 + 4x^3)$$
$$= 0x^0 + 2x^1 + 0x^2 + 8x^3 + 0x^1 + 1x^2 + 0x^3 + 4x^4$$
$$= 0x^0 + 2x^1 + 1x^2 + 8x^3 + 4x^4 = 2x + x^2 + 8x^3 + 4x^4.$$

Comparando i) e ii), temos $l.j = (0,2,1,8,4,0, \dots) = 2x + x^2 + 8x^3 + 4x^4$.

2. O Conjunto das funções reais

Para podermos comparar um polinômio com um tipo especial de função real, faremos agora uma pequena descrição da estrutura do conjunto $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f$ é uma função$\}$ das funções reais.

2.1. Observação: Considere o conjunto $\mathcal{F}$. Definindo que $\forall f, g \in \mathcal{F}$:

$$\begin{array}{rl} f+g: \mathbb{R} \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rl} f.g: \mathbb{R} \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto & (f.g)(x) = f(x).g(x) \end{array}$$

valem e é de fácil verificação que, $\forall f, g, h \in \mathcal{F}$, as propriedades $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_3}$, $\boldsymbol{A_4}$, $\boldsymbol{M_1}$, $\boldsymbol{M_2}$, $\boldsymbol{M_3}$ e $\boldsymbol{D}$ já observadas anteriormente para as operações de adição e multiplicação no conjunto $\mathbb{P}_n(x)$ dos polinômios. Nesse caso temos que

$$\begin{array}{rl} o: \mathbb{R} \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto & o(x) = 0 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rl} -f: \mathbb{R} \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto & -f(x) = -x \end{array}$$

são, respectivamente, os elementos neutro e inverso para a operação de adição aqui definida: $\forall\, x \in \mathbb{R}$, claramente podemos calcular: $(o+f)(x) = o(x) + f(x) = o(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x) = f(x) + 0 = f(x) + o(x) = (f+o)(x)$. Isso nos mostra que o é o elemento neutro para a adição. Também são claras as igualdades $(-f+f)(x) = -f(x) + f(x) = 0 = o(x) = f(x) + \ (-f(x))\ = (f + \ (-f)\ )(x)$. O que mostra que $-f$ é o inverso aditivo do elemento f de $\mathcal{F}$.

Com relação à multiplicação,

$$\begin{array}{rl} 1: \mathbb{R} \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto & 1\ (x) = 1 \end{array}$$

é o elemento neutro. Vale que $(1.f)(x) = 1\ (x).f(x) = 1.f(x) = f(x) = f(x).1 = f(x).1\ (x) = (f.1)(x); \forall\, x \in \mathbb{R}$.

2.2. Definição: Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathcal{F}$ o conjunto das funções reais. Então, $\forall\, f \in \mathcal{F}, \forall\, r \in\ \mathbb{R}$, podemos definir a função produto,

$$\because \begin{array}{rl} rf: \mathbb{R} \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto & (rf)(x) = rf(x). \end{array}$$

Valem as seguintes propriedades: $\forall\, r, s \in \mathbb{R}$ e $\forall\, f, g \in \mathcal{F}$,

i) $r.(f.g) = (r.f).g = f.(r.g)$

ii) $(r.s).f = r.(s.f)$

iii) $(r+s).f = r.f + s.f$

iv) $r.(f+g) = r.f + r.g$

2.3. Observação: Dentro de $\mathcal{F}$, o conjunto

$$\mathrm{P} = \left\{ \begin{matrix} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \to f(x) = a_0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n \end{matrix} \;/ a_i \in \mathbb{R};\ i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\},$$

munido das operações de adição e multiplicação definidas em 2.1, goza, por herança, das propriedades $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{M_1}$, $\boldsymbol{M_2}$ e $\boldsymbol{D}$. Além disso, se colocarmos $a_i = 0 \in \mathbb{R};$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ou $a_0 = 1$ e $a_i = 0;$ para $i = 1, 2, \dots, n$ ou considerarmos os inversos aditivos (que existem!) dos coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$; i. e., os números $-a_i \in \mathbb{R}; i = 0, 1, 2, \dots, n,$ para $n \in \mathbb{N}$, vemos as funções $o, 1,$ e $-f$ são elementos de P.

Demonstração: É imediata!

Faremos a seguir algumas considerações sobre os homomorfismos. Essas funções especiais nos ajudarão a compreender a identificação que pode ser feita entre os elementos de $\mathbb{P}_n(x)$ e P.

3. Homomorfismos

Abrimos esta seção com uma definição geral de homomorfismo. Comumente ela é feita sem levar em conta a operação definida em cada um dos conjuntos de domínio e contra domínio da função relacionada. Isso é comumente entendido por quem tem familiaridade com a problemática aqui envolvida.

3.1. Definição: Sejam X e Y conjuntos não vazios. Suponha que $*$ é uma operação bem definida em X e $\square$ é uma operação bem definida em Y. Uma função

$$\begin{aligned} \varphi: X &\longrightarrow Y \\ x &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

é dita um *homomorfismo* se, e só se, $\forall\, a, b \in X$, vale que $\varphi(a * b) = \varphi(a) \square \varphi(b)$.

Um homomorfismo injetivo é denominado *monomorfismo*. Se for sobrejetivo é denominado *epimorfismo*. Se for bijetivo é denominado *isomorfismo*.

3.2. Observação: (As Leis do Cancelamento): Seja A um conjunto não vazio. Dizemos que valem as *leis do cancelamento* para uma operação $*$ definida em A, se para $a, b, c \in A$, temos que

$$a * b = a * c \Leftrightarrow b = c \text{ (cancelamento à esquerda) e}$$

$$b * a = c * a \Leftrightarrow b = c \text{ (cancelamento à direita),}$$

Na maioria das vezes essas regras ou leis são permitidas ou pela existência de elemento inverso para a operação $*$ ou pela não existência de divisores de zero para essa operação. É o que pode ser experimentado na tentativa de obtermos a solução de $2x = 6$, bastando que seja $U = \mathbb{Q}$ o conjunto universo dessa equação.

3.3. Observação: Se φ é um isomorfismo de X em Y, valem as seguintes propriedades:

a) Se e é o elemento neutro para uma operação $*$ definida em X, e' o elemento neutro para uma operação $\square$ definida em Y e em Y valem as leis do cancelamento, então $\varphi(e) = e'$.

b) Se x^{-1} é o inverso de um elemento x em X, então $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$.

c) Se φ é bijetor, $\exists\ \varphi^{-1}$, o inverso de φ, e φ^{-1} é um homomorfismo (bijetor).

Demonstração: a) Primeiramente, temos que $e * e = e$. Daí vale que

$$e' \square \varphi(e) = \varphi(e) = \varphi(e * e) = \varphi(e) \square \varphi(e);$$

já que φ é um homomorfismo. Cancelando $\varphi(e)$ em ambos os membros da igualdade, vemos que $\varphi(e) = e'$.

b) De $x * x^{-1} = e$, obtemos $\varphi(x * x^{-1}) = \varphi(e)$. Como φ é um homomorfismo, conforme o que provamos anteriormente, $\varphi(e) = e'$, vem que $\varphi(x) \square \varphi(x^{-1}) = e'$. Isto mostra que $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$.

c) Sendo φ uma bijeção, podemos definir

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}: Y &\longrightarrow X \\ y &\longmapsto \varphi^{-1}(y) = x \end{aligned}$$

que é tal que $\forall\, y, y' \in \mathrm{Y}$, existem únicos $x, x' \in X$, tais que $\varphi(x) = y \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}\big(\varphi(x)\big) = \varphi^{-1}(y)$ e $\varphi(x') = y'$. Daí, temos $\varphi^{-1}(y \square y') = f^{-1}[f(x) \square f(x')] = \varphi^{-1}[\varphi(x * x')] = x * x' = \varphi^{-1}(y) \square \varphi^{-1}(y')$. Portanto φ^{-1} é um homomorfismo.

3.4. Exemplo: A função

$$\begin{aligned} \varphi:\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ r &\mapsto \varphi(r) = (r, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

é um homomorfismo bijetor, que permite identificar cada número real com um polinômio constante e vice versa. Assim, temos $1 \equiv x^0 = 1 = (1, 0, 0, \dots)$.

A observação a seguir é o principal resultado no sentido da justificativa que daremos para que continuemos a considerar o grau de uma função.

3.5. Observação 5: Consideremos $\mathbb{P}_n(x)$, o conjunto de todos os polinômios de grau no máximo *n*, juntamente com o polinômio nulo e P, o conjunto de funções definido em 2.3. Então, vale que a função φ que associa a cada $p = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$ em $\mathbb{P}_n(x)$, a função f em P, definida por $f(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$, é um isomorfismo.

Demonstração: Que φ é bijetiva é claro! Além disso, temos que para quaisquer $p_1 = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots), p_2 = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_m, 0, 0, \dots) \in \mathbb{P}_n(x)$, vale que:

i) $\varphi(p_1.p_2) = \varphi\big(a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \dots, \sum_{n+m=k+j} a_kb_j, 0, 0 \dots\big) = f$; onde a função f, imagem de $p_1.p_1$ pelo homomorfismo φ, é definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f)(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x^1 + \cdots + \left(\textstyle\sum_{n+m=k+j} a_kb_j\right) x^{n+m} \end{aligned}.$$

Mas essa função, pela multiplicação definida em 2.1, é a função produto das funções:

$$\begin{aligned} f_1: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to g_1(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} f_2: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to g_2(x) = b_0 + b_1x^1 + \cdots + b_mx^m \end{aligned}$$

Assim, temos $\varphi(p_1.p_2) = \varphi(p_1).\varphi(p_2)$; já que $\varphi(p_1) = f_1$ e $\varphi(p_2) = f_2$.

ii) $\varphi(p_1 + p_2) = \varphi(a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, 0 + b_{n+1}, 0 + b_{n+1}, \dots, 0 + b_m) = g$ onde a função g, imagem de $p_1 + p_1$ pelo homomorfismo φ, é definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f_2)(x) = \textstyle\sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i + (0 + b_{n+1})x^{n+1} + \cdots + (0 + b_m)x^m \end{aligned}$$

onde podemos supor, sem perda de generalidades, que $n < m$. Mas essa função, conforme a adição definida na observação em 2.1, é a soma das funções f_1 e f_2 dadas acima. Portanto, vale que $\varphi(p_1 + p_2) = \varphi(p_1) + \varphi(p_2)$; já que temos $\varphi(p_1) = g_1$e $\varphi(p_2) = g_2$. Isso mostra que φ é um isomorfismo de $\mathbb{P}_n(x)$ para P.

Essa correspondência biunívoca entre os elementos desses conjuntos permite chamar de *função* polinomial *do nº grau* um elemento de P que é da forma:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \end{aligned}\text{; onde } a_i \in \mathbb{R};\ i = 0, 1, \dots, n \text{ e } n \in \mathbb{N}$$

Discussão dos Resultados

A expectativa que temos em relação à publicação desse relato é de que a denominação do grau para uma função, do tipo que é um elemento do conjunto P, continue sendo considerada.

Mesmo para um aluno menos experiente, como os alunos que fizeram o questionamento durante uma das minhas aulas, foi possível entender a lógica dos argumentos que foram apresentados.

Se o fato de não atribuirmos um grau à função real *senx* fosse um impedimento para o uso desse conceito dentro do conjunto P, também caberia a nós questionarmos, por exemplo, o conceito de *elemento inverso*. No conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, considerando a operação de multiplicação, somente 1 e -1 são inversíveis. *O fato de não existir inverso multiplicativo para o inteiro 7 não foi um impedimento para o uso desse conceito dentro do conjunto* $\mathbb{Z}$. E, claro, não deveria.

Conclusão

Muitos dos avanços nas pesquisas dependem de como um conceito é estabelecido. Propriedades locais muitas vezes ajudam na descrição do objeto estudado e por isso têm sua importância. Quantos números primos pares existem? Todas as funções reais são deriváveis? Todas são inversíveis em relação à operação composição de funções?

Então, a negativa para o grau de uma função real que é isomorfa a um polinômio não parece se sustentar por não podermos comparar todos os elementos do conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f \text{é uma função}\}$ com os elementos em $\mathbb{P}$.

Bibliografia

__ GONÇALVES, Adilson; **Introdução à Álgebra**; 4ª edição, Editora IMPA; Rio de Janeiro-RJ, 1999.

__ OLIVEIRA, Lindinei de e CUNHA, Thyago Silva; TCC (Trabalho de Conclusão de Curso); **Imersões de Corpos em Anéis de Matrizes**; Rio Branco-AC; 2010.

__ PEREIRA, Cleber e FERREIRA, Cristhiane de Sousa; TCC (Trabalho de Conclusão de Curso); **A Influência do Conjunto Universo nos Métodos de Resolução de Certas Equações**; Rio Branco-AC; 2008.

__ PIAGET, Jean. **Fazer e Compreender**. São Paulo: Melhoramentos. Editora Universidade de São Paulo, 1978.

_____. **A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imitação e representação**. Rio de Janeiro: LTC, 1990.

_____. **O Nascimento da Inteligência na Criança.** Rio de Janeiro: Guanabara, 1991.

__ VYGOTSKY, Lev Semenovich. **Pensamento e Linguagem.** São Paulo, Martins Fontes, 3ª edição, 1991.

_____. **A formação social da mente**. 6. Ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

__ WALLON, H.. **L' évolution psychologique de l' enfant (Evolução Psicológica da Criança).** PUF, Paris, 1941, reed. 1974 (Andes, Rio de Janeiro, s. d.).

_____. **Les origenes de la pensée chez l' enfant (Origens do Pensamento da Criança).** PUF, Paris, 1945, reed. 1963 (Manole. São Paulo. 1989).

José Ivan da Silva Ramos

Rua Maranhão, nº 133 – Bairro Bosque

Rio Branco – Acre – CEP: 69908-240

ivanr@ufac.br

Tels.: 0xx68-3301-1416 e 0xx68-84067712