ISSN 2237-7409

ELEMENTOS

Revista de Ensino e Pesquisa em Classes, Operações e Propriedades de Estruturas Algébricas

Edufac

Ano 2013

ELEMENTOS REVISTA DE ENSINO E PESQUISA EM CLASSES OPERACIONAIS E PROPRIEDADES DE ESTRUTURAS ALGÉBRICAS.
Rio Branco: Edufac, 2012 Anual. ISSN: 2237-7409 (on line)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAC.

B546e Elementos Revista de Ensino e Pesquisa em Classes, Operações e Propriedades de Estruturas Algébricas. – v. 2, n. 2 (jan./dez. 2013) – Rio Branco : Edufac, 2013.
120 p.

Anual
ISSN: 2237-7409 (on line)

1. Álgebra – Periódicos. I. Universidade Federal do Acre. II. Título.

CDD.: 512
CDU.: 512

Marcelino G. M. Monteiro CRB/11 - 258

Associação Brasileira
das Editoras Universitárias

Edufac

Editora da Universidade Federal do Acre

Revista
ELEMENTOS

OBJETIVO E POLÍTICA EDITORIAL

A revista Elementos tem como principal intenção a divulgação dos estudos, pesquisas e relatos de experiências desenvolvidos sobre tópicos da Matemática ligados às Estruturas Algébricas, dentro e fora da Universidade Federal do Acre. Como forma de resgatar pensamentos e práticas de ensino uma seção de cada edição da revista é composta de uma entrevista com educadores experientes.

A publicação dos textos ou artigos, de autoria individual ou coletiva, é feita dentro de um padrão técnico de qualidade editorial, como forma de promover a produção intelectual – acadêmica e científica.

Apresentação

A idéia de criação da revista Elementos nasceu da necessidade da divulgação dos trabalhos realizados pelos membros do Grupo de Ensino e Pesquisa em Classes, Operações e Propriedades de Estruturas Algébricas (GEPCOPEA), grupo de pesquisa cadastrado do CNPq, desde o ano de 2009.

De início, apostando também na nacionalização e, posteriormente, na internacionalização de suas matérias, evitamos especializá-la em uma única temática como percebemos nas muitas revistas que primam pela qualidade editorial e pelo nível daquilo que publicam. Isso pode significar para esta revista algumas reformulações, inclusive na sua política editorial, durante os primeiros anos de sua existência.

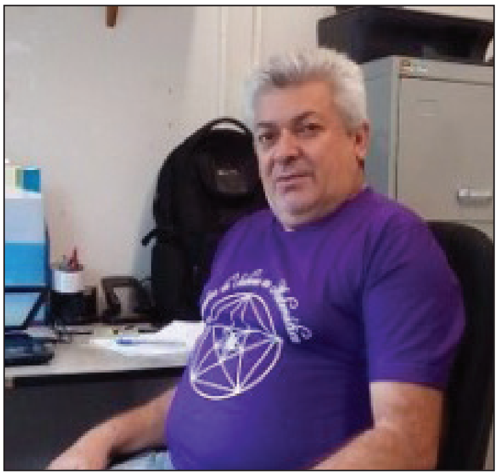
A permissão para publicações de experiências no uso de objetos matemáticos abstratos ou não, ligadas à política de ensinamentos, tem a intenção de encorajar mais pessoas a se lançarem na maravilhosa arte de escrever Matemática, inclusive sob forma de uma narrativa que socialize metodologias e conhecimentos.

Submissões de textos fora de um padrão científico serão evitadas. Assumimos assim o risco de que um Matemático anônimo e inexperiente, mas com uma brilhante idéia, deixe de usar o espaço de nossa revista para divulgá-la. Atenuamos esse problema insistindo na divulgação das edições lançadas e na disponibilização de chamadas regulares para publicação.

O fato de o conselho editorial ser composto por pesquisadores de diversas Instituições de ensino, especialmente os Consultores ad hoc, permite que tanto a comunidade acadêmica quanto os membros do comitê editorial local possam se submeter aos critérios de uma chamada para publicação, sem que seja ferida a imparcialidade e a transparência no aceite de uma matéria a ser publicada.

O comitê editorial é soberano na escolha de suas entrevistas e informativos, publicando o que julgar pertinente à cada edição. Em contrapartida, deverá fazer suas escolhas respeitando a proposta de criação desta revista, primando pela regularidade anual de suas edições e pela valorização de seus leitores.

Por se tratar de uma revista eletrônica, muitos autores, sob a luz de pareceres favoráveis, podem contribuir regularmente com suas edições, submetendo para análise seus relatos de experiências e artigos científicos.



Editorial

É com muita satisfação que anunciamos o terceiro número da revista elementos. Nesta edição contamos com a colaboração de alunos e professores vinculados aos programas de Pós – Graduação em que o Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Acre (CCET) está envolvido. Ao mencionar estes autores, necessário se faz, narrar algumas conquistas provenientes da teimosia de se dedicar a discussão de diversos aspectos presentes no conhecimento e no ensino e aprendizagem dos conceitos da Matemática, que de muitas formas foram cotidianamente agregados ao convívio acadêmico e social daqueles que, apesar de todas as adversidades, resistiram às simplificações e seduções presentes no mundo pós-moderno, para dedicar-se ao estudo desta ciência.

Apresentamos, logo no início desta edição, uma entrevista com o professor Renato Tribuzzi da Universidade Federal do Amazonas (UFAM) que em nossa visão, juntamente com seu irmão Ivan Tribuzzi, foram pioneiros na orientação de várias gerações de jovens amazonenses e também acrianos, incentivando-os a dedicar-se ao estudo da matemática, sobretudo para atuarem como professores no ensino superior.

Os professores do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, incentivados pelos irmãos Tribuzzi e por outros professores renomados, especialmente da Universidade de Brasília (UnB), fortaleceram o curso de graduação que chegou a obter nota máxima no último Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE). Construíram parcerias com várias instituições entre elas a própria UFAM, que nos ajudou e está ajudando com a formação continuada de vários de nossos professores em nível de Pós – Graduação. Estabeleceram convênios com o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), possibilitando a iniciativa e desenvolvimento dos projetos integrando Amazônia, Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBEMEP) e o Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM). Com a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) da qual somos Instituição associada, ofertamos o Programa de Pós-graduação stricto sensu para aprimoramento da formação profissional de professores da Educação Básica

(PROFMAT), cujos frutos já começamos a colher, com a formação de alguns alunos e com mais de uma dezena de outros prestes a se formarem.

Atualmente, além da dedicação ao ensino de graduação, atuamos em dois Programas de Pós – Graduação, no PROFMAT e no Mestrado de Ensino de Ciências e Matemática, esse último mais vinculado aos aspectos pedagógicos da matemática. Por fim, a maioria dos trabalhos publicados nesta edição e em outras edições da revista elementos, fundamentalmente os de autoria dos professores vinculados ao CCET, retratam o desejo e a busca de compreensão e produção do conhecimento matemático.

Desejamos a todos uma excelente leitura!

Prof. Dr. José Ronaldo Melo
(Coeditor)

Sumário

Entrevista

Professor Renato Tribuzi, a gente já conhece um pouco a história do senhor como grande pesquisador e contribuinte do avanço da matemática na região norte, mas em particular, a gente queria iniciar essa entrevista sabendo um pouco da vida do senhor: infância, família, ensino secundário. Como foram essas fases da sua vida?

Meu pai era advogado e dentista. E como promotor de justiça ele ia para o interior todos os anos, cada ano ele ia para uma cidade diferente: Fonte Boa, Codajás, Barcelos. E meus estudos começaram em cidade do interior, apesar de ser cidade do interior a gente tinha professores Salesianos, às vezes, oriundos das missões salesianas. Inclusive eu tive, no meu 2º ano secundário, um professor que era índio, mas índio já educado pelos Salesianos. E meu pai gostava muito de brincar de matemática. Ele passava problemas para nós, para ver quem resolvia primeiro. Então, essa atitude do meu pai foi bastante eficiente na nossa primeira fase da vida escolar e fez com que viéssemos a nos interessarmos pelo estudo da matemática. Minha mãe era professora do curso elementar, então, ela também participava das brincadeiras de matemática.

O senhor sempre gostou de Matemática ou tinha outra matéria que o senhor se interessava mais? E o senhor era um excelente aluno, um aluno mediano ou um péssimo aluno?

Eu sempre gostei de resolver problemas de matemática, mas eu nunca fui interessado em fazer contas, fazer cálculos. No geral acho que eu era um aluno mediano. Não em matemática, em matemática era muito bom.

Como foi que surgiu esse interesse pela Matemática do ensino superior? Foi devido o incentivo do seu pai que o senhor decidiu fazer uma graduação em Matemática?

Não! Eu não fiz uma graduação em Matemática. Eu fiz um curso de Filosofia. Depois da conclusão desse curso eu viajei para o Rio de Janeiro para fazer o mestrado em Matemática. A razão disso é que meu irmão é matemático. Na época ele tinha concluído o mestrado e me incentivou muito a dar os primeiros passos nessa direção. Eu fiz um curso de mestrado de uma forma muito diferente das outras pessoas. Em particular, eu nunca fiz um curso de cálculo. Mas, o mestrado foi uma experiência muito empolgante. Foi um desafio muito importante na minha vida.

Como o senhor lidou com a questão de fazer um mestrado em Matemática sem passado por um curso de graduação em Matemática? O senhor fez muito estudos complementares?

Eu estudava tudo o que precisava para cada disciplina.

Professor, quem é o professor Ivan Tribuzi para o senhor?

Ivan Tribuzi é o meu irmão que fez mestrado em matemática e que me incentivou a fazer o doutorado em matemática. Na verdade eu queria fazer o doutorado em Lógica. Apesar dele também concordar com isso, sugeria mais que eu fizesse o mestrado em matemática. O professor Valfredo do Carmo sugeriu que eu fizesse o mestrado em matemática pra depois fazer o doutorado em Lógica porque assim eu teria uma formação mais sólida e porque, naquela época, ele achava que no Brasil os trabalhos não tinham qualidade.

O professor Ivan Tribuzi foi professor do senhor também?

Foi meu professor informalmente.

Com relação à sua carreira acadêmica a gente sabe que o senhor ocupa uma posição de destaque como pesquisador. Como se deu esse processo até o senhor chegar a esse nível?

Bem, o IMPA é uma instituição extraordinária!

Então, eu tenho uma formação no IMPA. Eu tive a oportunidade de conviver com excelentes matemáticos, meus colegas de aula, professores, e isso me ajudou a ter uma formação adequada para o trabalho de pesquisa. Como eu tinha bastante motivação pra isso, não foi difícil que eu de repente começasse a me dedicar a pesquisa com prioridade. Inclusive, eu viajei para os Estados Unidos e fique um ano e meio em Destra, Califórnia, onde eu conheci outro estagiário de pós-doutorado que era um alemão e que depois ele viria a ser meu principal colaborador na pesquisa.

Com relação à vida pessoal do senhor: casamento e filhos? Como que isso aconteceu em paralelo a uma vida de pesquisa e estudos?

Eu me casei com uma colega de aula do curso de Filosofia. Quando eu viajei para o Rio para fazer o mestrado ela também decidiu fazer o mestrado em Filosofia de forma que nós não tivemos filhos nos primeiros sete anos. Só depois de retornar à Manaus, depois de algum tempo é que decidimos ter o primeiro filho que na realidade foi uma filha e acabou sendo a única, hoje, atualmente eu já tenho neto.

Certamente trabalhando como matemático o senhor fez vários amigos. Eles são da área da matemática? Ou o senhor possui amigos fora desse círculo?

Como matemático eu viajei muito. Trabalhando com pesquisa, eu conheci muitos matemáticos que se tornaram meus amigos e quase como irmãos, por exemplo, Eschenburg da Alemanha; Kinoto, do Japão; Maria João Ferreira, de Portugal e Marco Rigali, da Itália. Mas eu tenho também outros amigos dentro e fora do Brasil que são de outras áreas.

A respeito da Matemática na Região Norte, sabemos que ela vem evoluindo e o objetivo é que ela evolua mais até atingir um nível que hoje já existe em outras Regiões do Brasil. Quais as estratégias que o senhor acredita serem fundamentais para alcançar esse nível?

Bem, na UFAM, portanto na Região Norte, nós atualmente temos o doutorado em Geometria Diferencial. Temos o doutorado em associação ampla com a Universidade do Pará. Lá eles tem doutorado em Análise. Então, a ideia é a gente conseguir expandir de forma a termos doutorado em todas as áreas e começar a formar pesquisadores em todas elas, para dar conta de todas as necessidades da nossa Região. Então, eu acho que o doutorado é realmente o carro-chefe desse trabalho.

Atualmente, com o doutorado, a gente sempre tem aqui professores visitantes do país e do exterior, temos bolsistas de pós-doutorado trabalhando aqui, fazendo pesquisa. Então, tudo isso cria um clima propício para a pesquisa que vai alavancar o progresso da Matemática. Mas eu acho fundamental que o governo estadual, federal e as fundações de amparo à pesquisa apoiem a fixação de novos doutores na Região. Isso é fundamental. A gente precisa ter programas que realmente torne a nossa Região atrativa para os pesquisadores.

Professor! Não sei se o senhor sabe, mas o senhor foi citado, na primeira edição da revista *Elementos*, pelo professor João Batista de Oliveira Sobrinho, quando ele comenta que veio fazer uma pós-graduação aqui, em Manaus, e teve prazer de ser aluno do senhor e do professor Ivan. Aqui na Região Norte o senhor é citado em muitos trabalhos e

também citado com uma forma de inspiração para o trabalho de outras pessoas. Como é que o senhor vê isso?

Bem, se eu consegui inspirar outras pessoas a se dedicarem à pesquisa, eu acho que eu cumpri com a minha tarefa, a razão da minha permanência aqui a na região. Isso eu aprendi com o meu orientador. Quando jovem eu me preocupava mais com minha própria carreira do que com o desenvolvimento de outros pesquisadores. Mas, hoje em dia, a situação se reverteu, eu me preocupo muitíssimo pouco com a minha carreira pois passei a me preocupar bastante com meus alunos, com a carreira dos meus alunos. Eu acho que isso é que me dá a maior gratificação. É ver meus alunos brilharem.

Bem, professor, para concluir essa entrevista, gostaria que o senhor fizesse as suas considerações finais e nos deixe a sua opinião sobre a importância do desenvolvimento da Matemática em nossa Região.

Eu acho o seguinte: uma das missões do nosso do nosso programa da pós-graduação é tentar envolver todas as universidades da Região Norte nesse trabalho de melhorar a qualidade da matemática. Porque a qualidade da matemática, de certa forma, mede a qualidade da ciência. É, digamos um parâmetro fundamental para medir a qualidade da ciência e da tecnologia. E a região que tem a matemática avançada, vai ter bons engenheiros, bons professores, bons profissionais em diversas áreas. Então, se nós conseguirmos melhorar substancialmente o nível da matemática na Região, nós certamente vamos melhorar também a qualidade de vida.

Professor Renato, eu agradeço a gentileza do senhor nos ter concedido essa entrevista. Em nome do professor Ivan Ramos o parabenizo pelo trabalho que vem desenvolvendo na região norte. Esperamos, em breve, revê-lo na Universidade Federal do Acre.

Terei muito prazer.

Revista
ELEMENTOS

Da Aritmética a Gênese do Pensamento Algébrico em Diofanto

José Ronaldo Melo
Universidade Federal do Acre

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar os resultados de uma investigação bibliográfica realizada a partir das reflexões manifestadas por alunos, professores de matemática, e curiosos a respeito das possíveis semelhanças e diferenças entre aritmética e álgebra, assim como sobre a possibilidade da existência de um pensamento algébrico na obra de Diofanto de Alexandria. Para isso, alguns conceitos e exemplos a respeito da álgebra e da aritmética foram descritos, em que uma concepção de álgebra foi discutida tomando por base o estudo de variáveis, e será mostrado que nos processos de resoluções de problemas encontrados na obra de Diofanto, algumas características do pensamento algébrico são possíveis de evidenciar, sobretudo em relação às abreviações da escrita através de símbolos.

ABSTRACT

This work aims to present the results of a bibliographic investigation carried out from the reflections manifested by students, teachers, and curious people regarding the possible similarities and differences between arithmetic and algebra, as well as the possibility of an algebraic thought in the work of Diophantus of Alexandria. In order to clarify, some concepts and examples respecting algebra and arithmetic were described, in which a conception of algebra was discussed based on the study of the variables, and it will be shown that in the processes of resolutions for the problems found in Diophantus's work, some characteristics of the algebraic thought are possible to be evidenced, mainly in relation to the abbreviations of the written notations through the symbols.

Palavras Chaves: Aritmética, Diofanto, Gênese do pensamento algébrico.

1. Introdução

Alunos do curso de licenciatura em matemática da Universidade Federal do Acre - UFAC, professores da educação básica e curiosos, frequentemente nos procuram indagando sobre a gênese do pensamento algébrico, especialmente sobre a distinção entre álgebra e aritmética e sobre a época que marcou o surgimento desses conhecimentos matemáticos. Pôde se perceber nas argumentações desses indivíduos algumas controvérsias provavelmente provenientes de leituras apressadas ou discussões distorcidas a respeito do significado desses dois importantes campos da matemática, sobretudo quanto às possibilidades em se atribuir a Diofanto de Alexandria, matemático que viveu durante o século três de nossa era, um pensamento algébrico.

Na tentativa de mediar um debate, tem se orientado para a investigação dessas questões a partir do ponto de vista da história do desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos. Penso que assim podemos esclarecer essas questões, além de também estabelecermos uma compreensão a respeito dos significados do que seja atualmente álgebra e aritmética. Creio que após esse empreendimento, poderemos vislumbrar uma distinção entre ambas e em seguida mostrar que havia, de certo modo, mesmo que inconsciente, um pensamento algébrico em Diofanto. Nesta direção, faz se necessário conhecer algumas das idéias desse importante matemático, principalmente em relação aos procedimentos de resolução de problemas envolvendo equações, bem como, de que forma seus métodos de resolução de problemas se distinguiam dos modelos geométricos desenvolvidos no Egito, Mesopotâmia e até mesmo na Grécia antes dele.

Portanto, este trabalho tem como objetivo refletir sobre as questões aqui levantadas, esclarecendo através da literatura disponível algumas concepções de álgebra e aritmética, e procurando estabelecer uma distinção entre ambas, buscando compreender, sobretudo em que momento histórico e a partir de qual personagem podemos demarcar um pensamento desse poderoso campo de estudo da matemática que denominamos atualmente de álgebra.

2. Concepções a respeito de aritmética e álgebra

Comumente, na prática docente parece ser mais fácil dizer o que faz um objeto do que elaborar um pensamento do que seja esse objeto. Talvez neste ponto, residam algumas das dificuldades de nossos interlocutores na tentativa de estabelecer diferenças entre alguns objetos da matemática, como por exemplo, entre álgebra e aritmética. A álgebra vem sendo concebida pela literatura, às vezes como a ciência do cálculo das grandezas abstratas, representadas por letras, ou como a ciência que generaliza as questões relativas aos números e representa as grandezas através de uma simbologia; ou ainda como um ramo da matemática que se constituiu como uma extensão da aritmética, utilizando letras e outros símbolos para representarem números e valores, de modo a permitir o estudo de combinações de operações aritméticas e soluções gerais para problemas numéricos diversos. A aritmética, originária do grego *arithmos*, é concebida como a arte ou ciência dos números. É, por assim dizer, a parte da matemática que estuda as operações numéricas e, por extensão de sentido, significa tudo que pressupõe um cálculo qualquer.

Do ponto de vista do desenvolvimento histórico, a aritmética é considerada como o campo mais antigo da matemática, geralmente compreendida como a ciência que estuda os números e suas propriedades. É frequentemente utilizada nas mais diversas tarefas do cotidiano, bem como em cálculos científicos ou de negócios. Quando se trata de seu uso de forma acadêmica, pode ser identificada como a teoria dos números ou aritmética superior. Neste contexto, a aritmética desenvolve-se a partir da obediência a uma ordem operativa abrangendo o estudo de algoritmos para realização de operações com os números naturais, inteiros, racionais, e reais. No entanto, pode desenvolver-se com o uso de ferramentas simples, como um ábaco ou através de calculadoras e computadores.

De acordo com Newman (1964), a álgebra tem por objeto estudar propriedades de conjuntos munidos de uma estrutura algébrica, tais como grupos, anéis, corpos e espaços vetoriais. Essa estrutura algébrica consiste em leis de composição internas e externas, compostas das propriedades comutativa, distributiva, associativa, assim como da existência do elemento neutro, e da existência de um inverso.

A aritmética, por sua vez, é considerada como sinônimo da "teoria dos números" e concebida como um dos ramos da álgebra, tendo como objetivo central o estudo da divisibilidade nos números inteiros. Neste sentido, pode ser dividida em *aritmética comum*, quando é utilizada em cálculos com números definidos, e em *aritmética literal*, quando usada em cálculos com números representados por letras. Do ponto de vista da literatura, o uso de letras não deve ser um critério aceito para diferenciar a álgebra da aritmética.

Talvez seja menos complexo apelar para o senso comum pensando a aritmética como a arte dos números e a álgebra, no sentido etimológico, concebida em árabe, como a ciência da reintegração e comparação. Seguido essa lógica, podemos ainda olhar para a aritmética como a parte da matemática em que se investigam as propriedades elementares dos números inteiros e racionais, e a álgebra como a parte da matemática em que se estudam as leis e os processos formais de operações com entidades abstratas. De forma grosseira e bem simplificada, se é que isso é possível, podemos olhar para a aritmética quando nos referimos a números e para a álgebra quando trabalhamos com resolução de equações.

Esses conceitos ou significados do que seja especialmente a álgebra parecem poucos esclarecedores para quem busca uma carreira docente e que poderão ser constantemente questionados sobre esses objetos. Segundo USISKIN (1995), podemos estudar quatro concepções diferentes de álgebra a partir dos vários significados atribuídas especialmente à variável. No primeiro caso, a álgebra pode ser concebida como uma *aritmética generalizada*, na qual as variáveis são compreendidas como a generalização de modelos aritméticos, a partir do estabelecimento de padrões, com a preservação das propriedades válidas para os números. Assim, por exemplo, na igualdade $2 + 3 = 3 + 2$, em que visivelmente a ordem das parcelas não altera a soma, pode se generalizar esse fato através da igualdade: $a + b = b + a$. Já diante do desafio de generalização do número ímpar a partir da construção $3 = 2 + 1$, $5 = 2.2 + 1$, $7 = 2.3 + 1$, $9 = 2.4 + 1$, o representamos por $2n + 1$, com n inteiro positivo. Nesse caso, a letra não representa incógnita, pois o estabelecimento do modelo geral é traduzido numa espécie de lei $(2n + 1)$ como representativo de número natural ímpar. Na segunda concepção, compreendida como o *estudo de procedimentos para resolver certos* *tipos problemas*, nós podemos estar diante da tradução de uma situação-problema para uma linguagem algébrica. Neste caso, as variáveis podem ser interpretadas como incógnitas ou constantes, tendo por base a simplificação e a resolução. Assim, por exemplo, na resolução de um problema no qual o triplo de um número subtraído de 8 é 28, realizamos a tradução para linguagem algébrica: $3x - 8 = 28$ (*) o que recai na concepção de álgebra como uma *aritmética generalizada*. Contudo, para se chegar a concepção de álgebra como *estudo de procedimentos*, é necessário resolver a equação (*), geralmente somando-se 8 a ambos os membros dessa equação: $3x - 8 + 8 = 28 + 8$, que simplificada resulta em $3x = 36$, cuja solução é 12. Nessa concepção, precisamos desenvolver a capacidade de equacionar os problemas, além de adquirir habilidades para manipular matematicamente essas equações até chegar à solução desejada. A terceira concepção refere-se ao *estudo de relações entre grandezas* nas quais as leis se expressam em modelos matemáticos operacionais que estabelecem entre si relação de dependência e independência. Assim, as letras passam a assumir os significados de variáveis e não de incógnitas como nas equações. O conceito de função, por exemplo, faz uso dessa concepção na medida em que a variável assume dupla significação: como '*argumento*', quando se refere aos elementos do domínio de uma função; ou '*parâmetro*', se for o número obtido pela dependência do valor do argumento.

Tomando como exemplo o modelo funcional algébrico do primeiro grau $y = ax + b$, x pode ser identificado como argumento e f(x) como parâmetro, porém *a* e *b* podem assumir diferentes usos, no momento em que se particularizam para modelos específicos. Um exemplo que pode ilustrar bem essa concepção está presente na fórmula da área de um retângulo interpretada como sendo equivalente ao produto da base pela altura, ou traduzindo $A = b.\ h$, onde podemos perceber uma relação entre três grandezas. Neste caso não estamos resolvendo nenhuma equação, portanto parece não estarmos pensando em incógnitas, ficando evidente a idéia de variáveis. Nesta concepção, a álgebra parece se ocupar de modelos e leis funcionais que descrevem ou representam as relações entre duas ou mais grandezas variáveis. A álgebra, segundo USISKIN (1995), pode ainda ser concebida como *o estudo das estruturas* envolvendo grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais. Nesta concepção, a ideia de variável representa mais do que um símbolo arbitrário.

Em nível elementar, por exemplo, as atividades que têm por base as operações com cálculo algébrico, produtos notáveis, fatoração, operações com monômios e polinômios, são concebidas como o estudo das estruturas algébricas. Essa concepção eleva a álgebra ao status de ciência das estruturas próprias de toda a matemática, ultrapassando os limites da representação de quantidade, sejam discretas ou contínuas. Tem como referência as entidades matemáticas desprovidas de significações eminentemente numéricas, isto é, o formalismo das estruturas propriamente ditas. A ideia de variável não está vinculada a uma relação ou função, nem atua como uma incógnita, mas como objetos arbitrários.

3. O pensamento algébrico de Diofanto.

O pensamento de Diofanto sobre os processos de desenvolvimento da matemática, especialmente em relação a resoluções de problemas existentes em sua época, baseado na invenção e no uso de símbolos, certamente para simplificar a escrita e os cálculos matemáticos, fizeram com que as expressões, até então escritas totalmente com palavras, pudessem se apresentar de formas abreviadas. Ao contrário de seus antepassados, que nos procedimentos de resoluções de problemas utilizavam excessivamente descrições através de palavras sem fazer uso de símbolos para representar incógnitas, Diofanto, na visão de Roque e Carvalho (2012), introduziu no cenário da matemática um novo modo de pensar tendo por base uma abreviação simbólica das quantidades desconhecidas – as "*designações abreviadas*". Essas "*designações abreviadas*" são descritas pelo autor mencionado, usando-se, por exemplo, a letra final da palavra *arithmos* (ς) para simbolizar uma quantidade desconhecida; a primeira letra da palavra *dynamis* Δ^{Y} como símbolo do quadrado da quantidade desconhecida; a primeira letra da palavra *kybos* $\boldsymbol{K}^{\boldsymbol{Y}}$ para o cubo; o símbolo $\Delta^{Y}\Delta$ para o quadrado – quadrado ou quarta potência; a combinação $\Delta\boldsymbol{K}^{\boldsymbol{Y}}$ como o quadrado – cubo ou quinta potência; e a combinação $\boldsymbol{K}^{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{K}$ para o cubo – cubo ou sexta potência. Assim, traduzindo para a linguagem atual um *arithmos* ς equivale a uma incógnita x; um *dynamis* Δ^{Y} corresponde a um quadrado (x^2); um *kybos* K^{Y} corresponde a um cubo (x^3); $\Delta^{Y}\Delta$ equivale a uma quarta potência de x (x^4); ΔK^{Y} a uma quinta potência (x^5) enquanto que $K^{Y}K$ seria equivalente à sexta potência (x^6). Com isso podemos representar, por exemplo, a equação x^3+13x^2+5x como $K^{Y}\alpha\Delta^{Y}\gamma ς\varepsilon$, notando que α corresponde a 1, γ corresponde a 3, e ε corresponde a 5, conforme tabela de equivalência do alfabeto grego com os números.

Os historiadores da matemática são unânimes em afirmar que pouco se sabe sobre como viveu Diofanto, contudo também são unânimes quanto às contribuições desse matemático em relação ao campo da *álgebra* e da *teoria dos números*, deixando pelo menos três tratados, entre os quais a ***Aritmética***, obra composta por 13 livros. Conforme Garbi (2010), nesta obra, Diofanto resolve 130 problemas de natureza variada, indo de equações de primeiro grau, de segundo, até de terceiro grau. No problema 27 do livro 1, por exemplo, é solicitado ***encontrar dois números cuja a soma e o produto sejam números dados***. Serão e Brandenberg (2013) sugerem a solução desse problema nas formas assim descritas:

a) **Resolução retórica**: Considere que a soma é 20 e o produto, 96. Supondo que a diferença entre os dois números seja 2 *arithmos*, começamos por dividir a soma desses números (que é 20) em dois (obtendo 10). A partir desse resultado, consideramos um *arithmos* somado e subtraído de 10, respectivamente, a e de cada uma das metades. Como a metade da soma é 10, tomando a metade subtraída 1 *arithmos* mais a metade acrescentada de 1 *arithmos*, obtendo 20, que é a soma desejada. Para que o produto seja 96, multiplicamos essas mesmas quantidades, obtendo 100, subtraído do quadrado do *arithmos* (um *dynamis*). Chegamos, assim, à conclusão de que o *dynamis* deve ser 4, logo, o valor do *arithmos* é 2. Os valores procurados serão, portanto, 10 mais 2 e 10 menos 2, ou seja, **8** e **12**.

b) **Resolução usando as abreviações**: Se esses números fossem iguais, cada um deles seria 10. Supomos que a diferença entre eles seja 2ζ, ou seja, os dois números procurados são obtidos retirando ζ de um destes 10 e adicionando ζ ao outro. Como a soma não muda após essas operações, temos $10 - \zeta + 10 + \zeta = 20$. Mas sabemos também que o produto desses números é 96, logo, podemos escrever $(10 - \zeta)(10 + \zeta) = 96$. Observamos, então, que $10^2 - \Delta^{Y} = 96$, e concluímos que o valor de ζ deve ser 2. Logo, os números procurados $10 - \zeta$ e $10 + \zeta$ são, respectivamente, 8 e 12.

c) **Resolução em notação moderna:** Supondo x e $y = 10$, seja $2x$ a diferença entre eles, então existe z, tal que $x = 10 - z$ e $y = 10 + z$. Substituindo na equação $x.y = 96$ obtemos: $(10 - z).(10 + z) = 96$; logo, $100 + z^2 = 96$. Então, z é igual a 2. Logo, os números procurados $x = 10 - z$ e $y = 10 + z$ são, respectivamente, 8 e 12.

Em síntese, observamos a partir dos fatos evidenciados, sobretudo em relação aos processos de resoluções de problemas utilizados desde Diofanto, uma forte vinculação do desenvolvimento algébrico associado aos símbolos que serviram para abreviações de problemas, permitindo soluções mais sintéticas em comparação com as resoluções, fazendo-se exclusivamente o uso das palavras. Os símbolos evoluíram ao longo da história do desenvolvimento matemático tornando-se uma linguagem poderosa a ponto de se tornarem praticamente indissociável da álgebra e do nosso fazer enquanto docente.

4. Considerações finais

O propósito deste trabalho investigativo foi o de estabelecer, como informado em seu início, certa distinção entre aritmética e álgebra, assim como especular se havia em Diofanto um pensamento algébrico. Parece claro que em síntese, a aritmética, em sua origem, está associada a uma ciência ou estudo dos números, principalmente quando se trata de números inteiros e racionais, enquanto a álgebra diz respeito ao estudo de certas estruturas. Há um limite para que se exiba neste texto apenas uma concepção sobre os objetos algébricos, ou seja, aquela vinculada à questão de variáveis. Isso porque se acredita que através dessa concepção seja possível afirmar sobre a existência de um pensamento algébrico presente na obra de Diofanto, pois em seus métodos de resoluções de problemas não há recorrência aos aspectos geométricos presentes no pensamento matemático egípcio, babilônio e grego; além do mais, como denota Roque e Carvalho (2012, p. 168) "o fato de haver símbolos para as potências superiores ao cubo já indica a separação entre a aritmética de Diofanto e a geometria, uma vez que, na geometria da época, uma potência maior que três para um número não correspondia a nenhuma grandeza". Um segundo aspecto também levantado por Roque e Carvalho (2012, p. 169) e que pode ser notado no processo de resolução do problema 27, do livro 1, da aritmética de Diofanto (Conferir, p. 07) é que "opera-se com quantidades desconhecidas do mesmo modo que com as conhecidas, ou seja, quantidades conhecidas e desconhecidas têm o mesmo *status*", isso são evidências do pensamento algébrico.

5. Referências Bibliográficas

[1] GARBI, Gilberto Geraldo. **A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática.** 5ª edição - São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

[2] NEWMAN, James R. (org.). **The Universal Encyclopedia of Mathematics**. Londres: George Allen & Unwin Ltda., 1964.

[3] ROQUE, Tatiana e CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **Tópicos de História da Matemática.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[4] SERRÃO, Marcelo Miranda e BRANDEMBERG, João Cláudio. **Utilizando problemas da história antiga da matemática como estratégia para o ensino de equações no 9º ano da escola básica.** X Seminário Nacional de História da Matemática - SNHM, 2013. Disponível no endereço eletrônico *www.cle.unicamp.br/eprints/index.php/anais-snhm/article/.../46/37*.

[5] USISKIN, Zalman. **Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis.** In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P.(Org). As idéias da álgebra. São Paulo: Atual, 1995.

José Ronaldo Melo
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Universidade Federal do Acre
Rio Branco - Acre
ronaldmel@bol.com.br
(68) 3226 7587

Revista
ELEMENTOS

Uma Certa Equação Irracional

Dedicado para Emanuel e Demetrius

José Ivan da Silva Ramos
Universidade Federal do Acre

Resumo

Esta é uma pequena narrativa de um episódio que envolveu a busca da solução da equação irracional $\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x}{2}}=\frac{x^2}{8}+\sqrt[3]{\frac{4}{x^2}}$, sugerida como exercício por um professor do Ensino básico de Matemática em formação.

Abstract

This is a short narrative of an episode that involved the search of the solution of the irrational equation $\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x}{2}}=\frac{x^2}{8}+\sqrt[3]{\frac{4}{x^2}}$, suggested as an exercise by a teacher from school basic training in mathematics.

Palavras Chaves: Equações irracionais, raízes e método de solução.

Introdução: Justificativa e Objetivos

Esta narrativa envolve os conteúdos de Matemática do 8º ano do ensino fundamental, antes chamado de 7ª série ginasial do Ensino de 1º grau. Essencialmente, chamamos a atenção para as discussões que devem ser feitas à respeito das equações irracionais, aquelas em que a variável aparece sob o sinal de um radical. O episódio que iremos narrar começou no ano de 1986. Nessa época, somente um dos autores deste texto havia ingressado no Ensino Superior, fazendo parte de uma das turmas de alunos do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Acre. Porém, o "inocente" problema que motivou este trabalho não fora assim percebido por pessoas "experientes" no ensino de Matemática, tidas como referência em nossa comunidade, em Rio Branco, no Estado do Acre. Este é um texto que, podemos dizer, representa um "relato de falta de experiência".

Por se tratar da história de um problema de Matemática básica que começa numa Escola pública de ensino básico e que, depois de ser levado para o ambiente da nossa Universidade, passar pelas mãos de um professor doutor da Universidade de Brasília, terminou compondo um trabalho acadêmico de um aluno de Matemática da UFAC, ela aconteceu paralelamente à formação do agora experiente professor de Matemática. Sendo assim, entendemos que o conhecimento desses fatos pode contribuir para as discussões a cerca do Ensino de Matemática nas séries iniciais.

Esperamos com essas informações também chamar a atenção do leitor para uma reflexão sobre procedimentos e metodologias que devem ser usados pelo professor de Matemática. Principalmente, quando da sua atuação frente a uma sala de aula onde os alunos têm pouca experiência.

É provável que a narrativa em questão, se constitua num alerta para o fato de que os objetos de estudo da Matemática, em geral, estão relacionados com conceitos mais profundos e que não devem ser abordados isoladamente como se fossem "pacotes" de conhecimento.

Fundamentos Teóricos - Metodológicos

A formalização de um dado conceito obtida por exaustão pode significar um tipo de metodologia de ensino. Para algumas Ciências, resultados significativos podem ser obtidos por empirismo. Para a Matemática, dados empíricos podem significar o estabelecimento de um resultado, antes de darmos a ele a formalização e o rigor exigido nos estudos desenvolvidos dentro das áreas dessa ciência. Mas, no geral, esses dados não passam de ilustrações que permitem compreender sistemas ou proposições matemáticos.

Muitas vezes uma definição matemática pode acabar criando alguns "conflitos". Então, se ela tem algum valor é preciso entender as relações que surgem com os demais conceitos acumulados ao longo do tempo, sob pena de adotarmos, por eleição, uma ou outra relação matemática. Uma forma casuística que não convém e que não deve ser aceita. Por exemplo, o "*teorema do núcleo e da imagem*" que permite avaliar se certos espaços vetoriais são ou não isomorfos, não deve ser mencionado sem que antes entendamos que $\emptyset$ (o conjunto vazio) é um conjunto L.I. (Linearmente Independente) e que $\{0\}$, o subespaço nulo, é o menor dentre os subespaços que contém $\emptyset$ e que por isso, temos $[\emptyset] = \{0\}$ e $\dim\{0\} = 0$. Dessa forma podemos entender que dois espaços de mesma dimensão são isomorfos, bastando existir entre eles uma aplicação linear injetiva.

Não foi possível continuar ignorando os triângulos retângulos cujas medidas dos lados não formam ternos pitagóricos. E, apesar das contribuições da mística Escola Pitagórica, esse pensamento de "retaliação"a a levou a um certo descrédito. Para o bem da ciência, o misticismo não se sustentou como metodologia de ensino de Matemática. Nessa particular questão podemos perceber o conflito com os números irracionais. O fato de que $\sqrt{2}$ aparece naturalmente como uma das medidas dos lados de um triângulo retângulo cujos catetes são iguais a 1, pode ser justificado por meio de um axioma da Geometria de Euclides, sobre medição de segmentos: *Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre esses números meça a distância entre os pontos correspondentes*.

Embora, na Matemática, sejamos mais velozes em repassar ou aprender um conceito já estabelecido, é necessário não perdermos de vista um dos principais objetivos da educação que é o de formar indivíduos com senso crítico capazes de propor coisas novas.

Em meio à "aventura" do formalismo e da lógica precisamos cuidar para que "agradáveis" testes ou simulações com números, equações e outras relações matemáticas não induzam erros ou a banalização do conhecimento.

Ações Desenvolvidas

Para dar uma ideia bastante aproximada do que aconteceu foi necessário recorrer aos antigos livros didáticos doados pelo Governo do Estado e adotados pelas Escolas públicas daquela época.

As lembranças do professor e as velhas folhas de papéis contendo as argumentações que, essencialmente, apontam a solução de $\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x}{2}}=\frac{x^2}{8}+\sqrt[3]{\frac{4}{x^2}}$ e que depois de reencontradas motivaram a elaboração deste texto, foram as principais estratégias utilizadas para desenvolvermos a narrativa a seguir.

O assunto tratado numa sala de aula da 7° série ginasial foi equação irracional. Esse Tema foi trabalhado durante uma semana. Depois de dar as definições, o professor resolveu algumas equações e antes de explicitar seus conjuntos soluções, fazia cuidadosamente testes para verificar se os supostos números encontrados eram de fato raízes das equações. Os métodos de solução empregados eram de certa forma descuidados e seguiam as receitas do livro texto. Sem perceber o abismo que cerca esses objetos, o professor propôs, no fim de uma aula, que seus alunos resolvessem como forma de treinamento a equação:

$$\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x}{2}}=\frac{x^2}{8}+\sqrt[3]{\frac{4}{x^2}}$$

Esta equação foi montada em segundos sem que os alunos percebessem que, adotando $x=2$, o professor estava simplesmente somando $\frac{1}{2}+1$ em cada membro da igualdade.

Como não se tratava de parte de uma avaliação, aquele exercício caiu no esquecimento e não foi mais suscitado pelo professor e nem pela maioria dos estudantes daquela turma. Porém, havia um pequenino aluno que, em segredo, trabalhava incansavelmente na tentativa de resolvê-lo.

Certo dia o jovem foi apresentado por seu pai a um professor da UFAC, Mestre em Álgebra. Eles freqüentavam o mesmo clube nos fins de semana. De pronto o garoto apresentou o problema e quis logo saber que número poderia substituir x, naquela equação.

Provavelmente, o jovem aluno teve outra decepção. Naquele encontro, mesmo percebendo que 2 é uma solução para o problema, o professor não conseguiu apresentar argumentos que sustentasse isso. Acredito que deve tê-lo convencido de que aquela era uma raiz da equação, ao fazer a substituição dos x pelo número 2 e obter assim $\frac{3}{2}$ em cada membro da equação.

No final de uma das reuniões do Colegiado do Curso de Matemática, o professor procurado pelo aluno, no citado fim de semana, estava um pouco nervoso. Junto com outros colegas de área ainda não haviam sido capazes resolver algebricamente aquela equação.

Acontece que isso batia como uma afronta para aqueles detentores do saber. Seus comentários, colocados publicamente para as pessoas que ali estavam, eram, agora, sobre os professores do ensino ginasial. Quase em fúria condenavam o fato de que eles, muitas vezes, passavam problemas sem antes medir a dificuldade que os alunos teriam na tentativa de obter as soluções dos mesmos.

Então um dos mestres exemplificou, narrando que um pequenino aluno do Colégio Acreano pediu-lhe ajuda para resolver uma equação irracional e, até aquele momento, não tinha como lhe dar uma solução algébrica. Seguiu comentando que com a ajuda de outro colega professor, haviam utilizado o Cálculo Numérico e, por aproximação, encontrado $x = 2$. Mas aquilo não lhe agradava.

Um de seus alunos acabou por perceber que foi o proponente do tal problema. Lembrou-se que se tratava da tal equação deixada como exercício para os seus alunos daquela 7ª série. Em silêncio, custou a crer que naquele Departamento, professores experientes e qualificados não tivessem conseguido ainda uma solução algébrica para aquela equação.

O então professor do ginásio, responsável pela tal afronta, confessou que havia deixado o exercício que fora elaborado a partir de uma soma de números racionais. Então houve um murmúrio e muitos que ali estavam acaram tomando rumo deixando-o a só com o seu professor de Álgebra. Em pouco tempo foi convencido de que tinha criado uma "situação absurda". Assim, devia pedir aos seus alunos não considerassem aquela questão, o que já tinha caído no esquecimento da turma, exceto agora, para o professor e seu pequeno aluno.

Mas, sem os conhecimentos da Álgebra pura o aluno do 6º período e professor daqueles pequeninos fez com que aquela questão fosse banida para sempre das discussões em sala de aula. Isso não foi difícil dada a disciplina e respeito que imperava naquela sua sala de aula.

Ocupado em entender o volume de conteúdos e em resolver os problemas que naturalmente surgiam durante as aulas da graduação, o professor abandonou essa questão e passou a se contentar com aquela solução que seu professor havia elaborado, que consistia em abandonar as argumentações algébricas em um certo ponto da investigação para olhar as aproximações de uma raiz de um polinômio, o que levava a crer que a solução $x = 2$ havia sido deduzida.

Em fevereiro de 1991 estava de saída para começar o mestrado em Brasília, aquele professor do antigo ginasial, agora efetivado como professor do Departamento de Matemática da UFAC. Foi tudo muito difícil. Sem os conhecimentos e treinamento necessário, quase que desistiu dos estudos. Mas situação foi acomodando-se.

O primeiro curso de Álgebra o deixou encantado. Apesar de não ter conseguido uma média superior a 6, definiu que seria naquela área da Matemática que iria se especializar.

Chegou o fim do 1º semestre. Antes de voltar a Rio Branco para rever sua família, decidiu colocar a antiga questão para o seu professor. Pediu permissão para isso e depois, foi até o seu escaninho e deixou em um papel de rascunho a equação que ele mesmo havia, no ano de 1986, colocado como um exercício de fixação. Agora ela estava com um professor da UnB, doutor em Álgebra e que ministrara o primeiro curso em Teoria dos Grupos naquele 1º semestre de 1991, portanto já havendo se passado mais de quatro anos depois.

Após o recesso do meio de ano o referido doutor entregou-lhe algumas folhas de papel lhe dizendo que ali estava deduzida uma solução da equação e que essa solução era 2.

A argumentação segue abaixo.

"Temos

$$\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x}{2}}=\frac{x^2}{8}+\sqrt[3]{\frac{4}{x^2}} \Leftrightarrow \frac{x^2}{8}-\frac{1}{x}=\sqrt{\frac{x}{2}}-\sqrt[3]{\frac{4}{x^2}}=\sqrt{\frac{x}{2}}-\sqrt[3]{\frac{8}{x^3}.\frac{x}{2}}=\sqrt{\frac{x}{2}}-\frac{2}{x}\sqrt{\frac{x}{2}}.$$

Pondo $y=\sqrt[6]{\frac{x}{2}}$, obtemos $y^2=\sqrt[3]{\frac{x}{2}}$, $y^3=\sqrt{\frac{x}{2}}$, $y^6=\frac{x}{2}$ e $y^{12}=\frac{x^2}{4}$.

Portanto, valem as seguintes relações: $\frac{1}{x} = \frac{2}{y^6}$ e $\frac{x^2}{8} = \frac{y^{12}}{2}$.

Consequentemente, vale a igualdade $\frac{y^{12}}{2} - \frac{2}{y^6} = y^3 - \frac{4}{y^6}.y^2$ e assim, temos $\frac{y^{18}-4}{y^6} = \frac{y^7}{y^4} \Leftrightarrow y^{18} - 4 = y^9 - 4y^6 \Leftrightarrow y^{18} - y^9 + 4y^6 - 4 = 0$. Fatorando, vem que $y^9(y^9 - 1) + 4(y^6 - 1) = 0 \Leftrightarrow y^9((y^3)^3) - 1) + 4((y^3)^2 - 1) = 0$.

Fazendo $z = y^3$, vem que $z^3(z-1)(z^2+z+1) + 4(z-1)(z+1) = 0$. E uma simples fatoração mostra que $[z^3(z^2+z+1) + 4(z-1)(z+1)](z-1) = 0$ e que uma solução desta última equação é $z = 1$. Substituindo, temos $y^3 = 1$ e uma das soluções desta equação é $y = 1$. Substituindo novamente vemos que $\frac{x}{2} = 1$ e desta relação, $x = 2$".

Tudo terminado então! O professor mestrando havia finalmente se convencido de que na sua Universidade, a Álgebra ensinada era deficiente. E a resposta dada através daquelas argumentações era a prova disso.

Em 2 anos e sete meses de curso muita coisa foi vista, muito papel foi colecionado e livros e mais livros lidos foram se juntando para compor uma bibliografia sobre os assuntos da Álgebra.

Depois de 6 anos de trabalho e dedicação ao Ensino de Matemática, em março de 2000, o então mestre em Matemática retornou à UnB para fazer o doutorado em Álgebra. Em novembro de 2003, com o termino dos estudos, o professor viu efetivada a estabilidade e a segurança para que finalmente estivesse frente a uma sala de aula, dentro de uma Universidade.

Em março de 2004, novamente aquela equação irracional se fez presente. O então professor doutor resolveu olhar com cuidado aqueles papeis antigos. Lembrou parte daquela história e dos medos e das inseguranças no início de sua carreira docente. Estava ali de volta às suas atividades na Universidade organizando seus arquivos e biblioteca particular quando novamente se deparou com aquilo que teria se constituído em um problema acadêmico e relacionamento com seus professores da graduação. Uma questão ingênua, mas que parecia acompanhar sua vida acadêmica.

Um olhar cuidadoso e veio a surpresa! É que ao investigar aqueles argumentos escritos, ele percebeu que a solução apresentada precisava de um ajuste! Foi usada como verdadeira a seguinte equivalência: $y^6 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y^6}$.

Observado que a relação correta a ser usada seria $y^6 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2y^6}$, de onde obtemos $\frac{y^{18}-4}{y^6} = \frac{y^7-4}{y^4} \Leftrightarrow y^{18} - 4 = y^9 - 4y^2 \Leftrightarrow y^{18} - 2y^9 + 2y^2 - 1 = 0$, novamente estávamos a trabalhar na determinação de uma solução para aquela equação.

Em 2007, a orientação de um Trabalho de Conclusão de Curso relacionado com as equações e a estrutura de seus conjuntos universos, levou o professor a sugerir que seu orientando incluísse essa questão como um exemplo de equações que possuem soluções no corpo ordenado dos números reais. Essa "solução" trivialmente escrita a mais de duas décadas, foi refeita e apresentada por Cleber Pereira, durante o princípio da elaboração de seu TCC.

Agora, o ano já é 2014 e mais uma vez volto sobre esse assunto. Depois de 28 anos de tê-lo iniciado agora percebi que os fatos que o cercaram até aqui podem vir a servir de uma agradável leitura, a cerca das experiências de um professor de Matemática.

Discussão dos Resultados

O texto deixa claro que, de início, as tentativas de apresentar uma solução algébrica para essa equação esbarraram na falta de hábito de estudo e na indiferença por parte dos antigos professores de Matemática da UFAC, em terem que cumprir as ementas dos cursos de Álgebra.

Acreditamos que o fato desse tipo de problema ser bem elementar para a realidade do Ensino de Matemática na UnB, o professor não revisou as argumentações que o levaram a concluir que $x = 2$ é uma solução da nossa equação irracional.

Como um exercício proposto para aqueles pequenos alunos do Ginásio, o professor iniciante que acabou se envolvendo com o problema político que, sem querer, causou dentro do antigo Departamento de Matemática da UFAC, poderia ter evitado essa pequena "novela", se, contrariando a sua falta de experiência, tivesse tido o cuidado em dimensionar o esforço necessário para resolver a questão proposta. O que certamente teria o feito refletir sobre a necessidade de ele próprio ter que fazer leituras complementares e desenvolver outras habilidades.

Conclusão

O relato apresentado pode ser visto como um texto apropriado para debates que envolvam a metodologia de ensino e a avaliação continuada. Ele aponta erros "graves" que devem ser evitados na prática do ensino de Matemática como, por exemplo, a sugestão de problemas sem o devido dimensionamento do quanto de raciocínio e esforço são necessários desprender para solucioná-los.

As argumentações aqui utilizadas para encontrar a solução $x = 2$ acabam sendo ofuscadas pelas narrativas e as situações em que essa equação reaparece.

Bibliografia

__BARBOSA, João Lucas Marques; **Geometria Euclidiana Plana**; Coleção do Professor de Matemática-SBM; Rio de Janeiro-RJ; 1995.

__GONÇALVES, Adilson; **Introdução à Álgebra**; 4ª edição, Editora IMPA; Rio de Janeiro-RJ; 1999.

__PEREIRA, Cleber e FERREIRA, Cristhiane de Sousa; TCC (Trabalho de Conclusão de Curso); **A Influência do Conjunto Universo nos Métodos de Resolução de Certas Equações**; Rio Branco-AC; 2008.

__ PIAGET, Jean.**Fazer e Compreender**.São Paulo: Melhoramentos. Editora Universidade de São Paulo, 1978.

_____. **A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imitação e representação**. Rio de Janeiro: LTC, 1990.

_____. **O Nascimento da Inteligência na Criança.** Rio de Janeiro: Guanabara, 1991.

__ VYGOTSKY, Lev Semenovich. **Pensamento e Linguagem.** São Paulo, Martins Fontes, 3ª edição, 1991.

_____. **Lesorigenes de lapensée chez l' enfant (Origens do Pensamento da Criança).** PUF, Paris, 1945, reed. 1963 (Manole. São Paulo. 1989).

José Ivan da Silva Ramos

Rua Maranhão I, nº 133 – Bairro Bosque.

Rio Branco – Acre – CEP: 69900-484

ivanr@ufac.br

Tels.: 0xx68-3901-2536 e 0xx68-99527503

Revista
ELEMENTOS

Grupos de Lie e o grupo de Heisenberg

Prof. José Edson Sampaio
Instituto Federal de Ensino, Ciências e Tecnologia do Ceará Campus Quixadá

Resumo

Neste texto apresentamos alguns resultados sobre grupos de Lie e álgebras de Lie. Mostramos que o grupo de Heisenberg $\mathcal{H}_3$ é um grupo de Lie. Por fim, é mostrado que $\mathcal{H}_3$ é isomorfo ao $\mathbb{R}^3$ munido com uma estrutura de grupo adicional.

Abstract

In this text we present some results on Lie groups and Lie álgebras. We show that the Heisenberg group $\mathcal{H}_3$ is a Lie group. Finally, it is shown that $\mathcal{H}_3$ is isomorphic to $\mathbb{R}^3$ provided with a structure of additional group.

Palavras chave: Grupos de Lie, grupo de Heisenberg e Isomorfismo.

1. Introdução

O grupo de Heisenberg é um objeto bastante estudado em várias áreas de pesquisa, em particular, em geometria diferencial. Por sua vez, um grupo de Lie possui uma geometria com propriedades bem conhecidas. Um fato interessante é que um espaço de Heisenberg é um grupo de Lie. Nessa perspectiva, nosso objetivo é apresentar alguns resultados sobre grupos de Lie e álgebras de Lie, que tornam essa afirmação verdadeira e destacar um isomorfismo entre o grupo de Heisenberg e $\mathbb{R}^3$ munido com uma estrutura de grupo adicional.

2. Grupos de Lie

Esta seção reúne alguns resultados essenciais sobre grupos de Lie; para maiores detalhes, referimos o leitor a [4] e [3].

Comecemos relembrando a definição de grupo de Lie.

Definição 2.1. *Um grupo de Lie G é uma variedade diferenciável, com uma estrutura de grupo tal que a aplicação de multiplicação $m: G \times G \to G$, dada por $m(x,y) = xy$, e a aplicação de inversão $\iota: G \to G$, dada por $\iota(x) = x^{-1}$, são diferenciáveis.*

Exemplo 2.2. *O grupo das matrizes quadradas, de ordem n e invertíveis, denotado por $GL(n;\mathbb{R})$, é um grupo de Lie, denominado o grupo linear geral de ordem n.*

De fato, a identificação natural do espaço vetorial $M(n;\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem n com $\mathbb{R}^{n^2}$ torna $GL(n;\mathbb{R})$ um aberto de $M(n;\mathbb{R})$, uma vez que

$$GL(n;\mathbb{R}) = \{A \in M(n;\mathbb{R}); detA \neq 0\}$$

e $det: M(n;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua. Assim, $GL(n;\mathbb{R})$ é uma variedade diferenciável. Por outro lado, como as aplicações de multiplicação $(A,B) \mapsto AB$ e de inversão $A \mapsto A^{-1}$ são claramente diferenciáveis, temos que $GL(n;\mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

Definição 2.3. *Um subgrupo de Lie de um grupo de Lie G é um subgrupo de G munido com uma topologia e uma estrutura diferenciável fazendo dele um grupo de Lie e uma subvariedade imersa de G.*

Definição 2.4. *Sejam G e H grupos de Lie. Um homomorfismo de grupos de Lie entre G e H é uma aplicação diferenciável $\phi: G \to H$ que também é um homomorfismo de grupos.*

Dizemos que os grupos de Lie G e H são isomorfos, se existir um homomorfismo de grupos de Lie $\phi: G \to H$ que também é um difeomorfismo. Nesse caso, ϕ é chamado um isomorfismo de grupos de Lie. Um isomorfismo de grupos de Lie $\phi: G \to G$ é chamado um automorfismo de grupos de Lie.

Definição 2.5. *Seja G um grupo de Lie. Um homomorfismo de grupos de Lie $\phi: (\mathbb{R}; +) \to G$ é denominado um subgrupo a um parâmetro de G.*

Um exemplo relevante de homomorfismo de grupos de Lie é o que segue.

Exemplo 2.6. *A restrição da aplicação determinante ao grupo $GL(n; \mathbb{R})$, $det: GL(n; \mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, é um homomorfismo de grupos de Lie.*

De fato, já sabemos que det é diferenciável; por outro lado, ela é um homomorfismo de grupos, uma vez que $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, para quaisquer $A, B \in GL(n; \mathbb{R})$.

Sendo G um grupo de Lie, definimos, para cada $p \in G$, a translação à esquerda $L_p: G \to G$ por

$$L_p(x) = px, \forall x \in G.$$

Denotando por $\mathfrak{X}(G)$ o espaço dos campos de vetores diferenciáveis em G, temos a seguinte definição importante.

Definição 2.7. *Dizemos que um campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ é invariante à esquerda se para todo $p \in G$ tem-se $\left(dL_p\right)_x(X_x) = X_{px}$.*

Representando por $Lie(G)$, o conjunto de todos os campos invariantes à esquerda em G, escrevemos $dL_p(X) = X$, para todo $p \in G$, para dizer que $X \in Lie(G)$. Uma vez que $dL_p: TG \to TG$ é linear em cada fibra e para todo $p \in G$, temos que $Lie(G)$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{X}(G)$.

Outro conceito importante na teoria de grupos de Lie é aquele de álgebra de Lie, conforme ensina a definição a seguir.

Definição 2.8. *Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$, munido com uma aplicação $[\cdot,\cdot]: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, a qual é bilinear, antissimétrica e tal que*

$$\big[[X, Y], Z\big] + \big[[Y, Z], X\big] + \big[[Z, X], Y\big] = 0 \qquad (1)$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

A aplicação $[\cdot,\cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ da definição acima é denominada o colchete de Lie de $\mathfrak{g}$, ao passo que a identidade (1) é conhecida na literatura como a identidade de Jacobi.

Exemplo 2.9. *Se M é uma variedade diferenciável, então $\mathfrak{X}(M)$, munido com o colchete de campos de vetores, é uma álgebra de Lie. Realmente, $\mathfrak{X}(M)$ é um espaço* *vetorial e, como é bem sabido, o colchete de campos de vetores satisfaz a identidade de Jacobi.*

Definição 2.10. *Se* $\mathfrak{g}$ *é uma álgebra de Lie, um subespaço linear* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *é dito uma subálgebra de Lie de* $\mathfrak{g}$ *se* $\mathfrak{h}$ *é fechado sob o colchete de Lie de* $\mathfrak{g}$*.*

Se G é um grupo de Lie, mostraremos a seguir que $Lie(G)$, munido com o colchete de campos de vetores é uma álgebra de Lie. Para ver isto, precisamos do seguinte resultado.

Lema 2.11. *Sejam* M *e* N *variedades diferenciáveis e* $F: M \to N$ *uma aplicação diferenciável. Se* $V_1, V_2 \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $W_1, W_2 \in \mathfrak{X}(N)$ *são campos de vetores tais que* $W_i = dF(V_i)$*, para* $i = 1, 2$*, então* $[W_1, W_2] = dF([V_1, V_2])$*.*
Demonstração. Veja [4], Capítulo 4, Proposição 4.16. □

Proposição 2.12. *Se* G *é um grupo de Lie e* $X, Y \in Lie(G)$*, então* $[X, Y] \in Lie(G)$*.*
Demonstração. Uma vez que $dL_p(X) = X$ e $dL_p(Y) = Y$, para todo $p \in G$ temos, pelo lema anterior, que

$$dL_p([X, Y]) = \left[dL_p(X), dL_p(Y)\right] = [X, Y],$$

também para todo $p \in G$. Logo, $[X, Y] \in Lie(G)$. □

Além de ser uma álgebra de Lie, $Lie(G)$ tem dimensão finita. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.13. *Se* G *é um grupo de Lie, então a aplicação* $\varepsilon: Lie(G) \to T_e(G)$*, dada por* $\varepsilon(X) = X_e$*, para todo* $X \in Lie(G)$*, é um isomorfismo de espaços vetoriais. Em particular,* $\dim Lie(G) = \dim(G)$*.*
Demonstração. Claramente ε é linear. Dado $V \in T_e(G)$, defina um campo de vetores $\tilde{V}$ em G (em princípio não necessariamente suave) pondo $\tilde{V}_p = \left(dL_p\right)_e(V)$, para todo $p \in G$, é fácil ver que $\tilde{V}_e = V$, uma vez que $(dL_e)_e$ é a identidade de T_eG.

Mostremos, agora, que $\tilde{V}$ é diferenciável. Para tanto, é suficiente mostrar que, se $U \subset G$ for um conjunto aberto e $f: U \to \mathbb{R}$ for uma função diferenciável, então $\tilde{V}f: U \to \mathbb{R}$ também é diferenciável. Escolha uma curva diferenciável $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \to G$, tal que $\gamma(0) = e$ e $\gamma'(0) = V$. Então, para $p \in U$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{V}f\right)(p) &= \tilde{V}_p f \\
&= \left(\left(dL_p\right)_e(V)\right)f \\
&= V\left(f \circ L_p\right) \\
&= \gamma'(0)\left(f \circ L_p\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(f \circ L_p \circ \gamma\right)(t)|_{t=0.}
\end{aligned} \tag{2}$$

Assim, definindo $\varphi: (-\epsilon, \epsilon) \times U \to G$ por $\varphi(t, p) = f \circ L_p \circ \gamma(t) = f(p\gamma(t))$, segue dos cálculos acima que

$$\left(\tilde{V}f\right)(p) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(0, p).$$

Como φ é claramente diferenciável, temos $\tilde{V}f$ é diferenciável.

Observe, agora, que $dL_p \circ dL_q = d\left(L_p \circ L_q\right) = dL_{pq}$, de sorte que

$$\left(dL_p\right)_q\left(\tilde{V}_q\right) = \left(dL_p\right)_q\left(dL_q\right)_e(V) = \left(dL_{pq}\right)_e(V) = \tilde{V}_{pq}$$

Portanto, $\tilde{V} \in Lie(G)$ e, assim, ε é sobrejetiva.

Agora, se $X \in Lie(G)$ é tal que $\varepsilon(X) = X_e = 0$, então X é o campo nulo, pois, para $p \in G$, temos $X_p = \left(dL_p\right)_e(X_e) = \left(dL_p\right)_e(0)$. Mas, sendo linear e com núcleo trivial, a aplicação ε é injetiva.

A prova do teorema anterior permite definir um colchete de Lie em T_eG pondo, para $V, W \in T_eG$,

$$[V, W] = [\tilde{V}, \tilde{W}]_e \tag{3}$$

onde $\tilde{V}$ e $\tilde{W}$ são as extensões de V e W a campos invariantes à esquerda em G, construídas de acordo com o referido teorema. Segue diretamente da Proposição 2.12 que o colchete $[\cdot,\cdot]: T_eG \times T_eG \to T_eG$, definido como acima, é um colchete de Lie para T_eG. Isto posto, temos a seguinte definição importante.

Definição 2.14. *Se G é um grupo de Lie, então T_eG, munido com o colchete de Lie definido em* (3)*, é denominado a álgebra de Lie de G.*

Denotamos a álgebra de Lie de um grupo de Lie G simplesmente por $\mathfrak{g}$.

Exemplo 2.15. *O espaço vetorial $M(n, \mathbb{R})$, das matrizes quadradas de ordem n, munido com o colchete comutador,*

$$[A, B] = AB - BA,$$

para todas $A, B \in M(n, \mathbb{R})$, é uma álgebra de Lie, a qual será denotada por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. É possível provar (cf. Proposição 4.23 de [4]) que $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ é isomorfa á álgebra de Lie do grupo linear geral $GL(n, \mathbb{R})$.

Dando continuidade anotamos mais um conceito relevante para a teoria básica de grupos de Lie.

Definição 2.16. *Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie. Uma aplicação $A: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie se for linear e preservar os colchetes correspondentes, ou seja, se*

$$A([X, Y]) = [A(X), A(Y)], \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Dizemos que um homomorfismo de álgebras de Lie $A: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um isomorfismo (de álgebras de Lie) se ele for bijetivo. Nesse caso, é imediato verificar que a aplicação inversa $A^{-1}: \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$, além de ser linear, também é um homomorfismo de álgebras de Lie. Neste caso, dizemos que $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são álgebras de Lie isomorfas.

O Teorema 2.13 garante que, ao munirmos T_eG com o colchete de Lie (3), tornamos $\varepsilon: Lie(G) \to T_eG$ um exemplo de isomorfismo de álgebras de Lie. Assim, sempre que conveniente, consideraremos $Lie(G)$ como a álgebra de Lie de G.

Se M, N e P são variedades diferenciáveis, $F: M \to N$ e $G: N \to P$ são aplicações diferenciáveis, sabemos que $d(G \circ F) = dG \circ dF$, como aplicações de TM em TP. Além disso, a aplicação identidade $id_M: M \to M$ induz, para cada $p \in M$, a aplicação identidade de T_pM, ou seja, vale que $d(id_M)_p = id_{T_pM}$. Agora, podemos enunciar e provar o resultado a seguir.

Teorema 2.17. *Se G e H são grupos de Lie isomorfos, então suas respectivas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são também isomorfas.*

Demonstração. Se $F: G \to H$ é um isomorfismo de grupos de Lie, temos em particular que F é um difeomorfismo e $F(e) = e$; portanto, $dF_e: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Agora, o Lema 2.11, juntamente com o fato de F ser difeomorfismo, garante que

$$dF([X, Y]) = [dF(X), dF(Y)], \forall X, Y \in Lie(G).$$

Aplicando ambos os lados da igualdade acima em e, vemos que, de fato, $dF_e: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Como $F^{-1}: H \to G$ também é um homomorfismo de grupos de Lie, concluímos, de maneira análoga, que $dF_e^{-1}: \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. Ademais, a discussão que precede o enunciado garante que dF_e e $d(F^{-1})_e$ são inversas uma da outra, de forma que são isomorfismos de grupos de Lie. □

Finalizamos este curto apanhado sobre grupos de Lie enunciando, sem demonstração, o seguinte resultado profundo, conhecido na literatura como o teorema do subgrupo fechado.

Teorema 2.18. *Se G é um grupo de Lie e $H \subset G$ é um subgrupo que é um subconjunto fechado de G, então H é um subgrupo de Lie mergulhado de G.*

Demonstração. Veja [4], Teorema 20.10. □

3. O espaço de Heisenberg $\mathcal{H}_3$

Nesta seção definimos o Grupo de Heisenberg $\mathcal{H}_3$ e apresentamos algumas propriedades desse grupo.

Definição 3.1. *Seja $GL(3,\mathbb{R})$ o grupo das matrizes 3×3 invertíveis. Definimos o grupo de Heisenberg 3-dimensional $\mathcal{H}_3 \subset GL(3,\mathbb{R})$ por*

$$\mathcal{H}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

munido com a estrutura de grupo de $GL(3,\mathbb{R})$.

Já que $\mathcal{H}_3$ é claramente um subconjunto fechado de $GL(3,\mathbb{R})$ e pelo Teorema 2.18, $\mathcal{H}_3$ é um subgrupo de Lie de $GL(3,\mathbb{R})$, temos então que $\mathcal{H}_3$ é um grupo de Lie.

Além disso, se $\alpha: I \to \mathcal{H}_3$ é uma curva diferenciável, existem funções $a, b, c: I \to \mathbb{R}$ diferenciáveis tais que

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 & a(t) & c(t) \\ 0 & 1 & b(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{para todo } t \in I.$$

Derivando, temos

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 0 & a'(t) & c'(t) \\ 0 & 0 & b'(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{para todo } t \in I.$$

Assim, a álgebra de Lie $\mathfrak{h}_3$ de $\mathcal{H}_3$ é constituída dos elementos da forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{com } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Como $\mathcal{H}_3 \subset GL(3,\mathbb{R})$, então (veja [4], proposição 20.3) a aplicação exponencial $exp: \mathfrak{h}_3 \to \mathcal{H}_3$ é dada por

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \qquad A \in \mathfrak{h}.$$

Mas $\mathcal{H}_3$ é 2-nilpotente, então

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donde vemos, facilmente, que a aplicação exponencial é um difeomorfismo global. Além disso, podemos dar explicitamente o colchete de Lie de $\mathfrak{h}_3$ em termos da base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ do $\mathfrak{h}_3 \cong \mathbb{R}^3$. De fato, o colchete de Lie em termos dessa base é dado por

$$[e_1, e_2] = e_3 \;\; e \;\; [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0 \tag{4}$$

Então, com isso em mente, temos o seguinte

Teorema 3.2. *Existe uma operação de grupo em* $\mathbb{R}^3$ *que o deixa um grupo de Lie isomorfo ao* $\mathcal{H}_3$*.*
Demonstração. Fazendo a identificação canônica da álgebra de Lie $\mathfrak{h}_3$ com $\mathbb{R}^3$ e usando a aplicação exponencial como parametrização global, munimos $\mathbb{R}^3$ com a seguinte operação

$$p * q = exp^{-1}(\exp(p)\exp(q)),\ \text{ para } p, q \in \mathbb{R}^3,$$

ou, mais explicitamente,

$$(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) = \left(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)\right). \quad (5)$$

Claramente as aplicações de multiplicação e inversão desta operação são suaves, pois são aplicações polinomiais. Então, $\mathbb{R}^3$ munido com a operação acima é um grupo de Lie. Daí, pela própria definição de $*$, a aplicação $exp: \mathbb{R}^3 \to \mathcal{H}_3$ é um homomorfismo de grupos de Lie e, pelas discussões acima, exp é um difeomorfismo, portanto é um isomorfismo de grupos de Lie. $\square$

Assim, módulo o isomorfismo dado por exp, $\mathcal{H}_3$ pode ser visto como $\mathbb{R}^3$ munido com o produto dado em (5).

4. Referências Bibliográficas

[1] DO CARMO, Manfredo P. *Geometria Riemanniana*. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
[2] GALLOT, Sylvestre; HULIN, Dominique; LAFONTAINE, Jacques. *Riemannian Geometry* 3. ed. Berlin: Spring, 2004.
[3] HSIANG, Wu Yi. *Lectures on Lie groups*. Singapore: World Scientific Pub Co Inc, 2000.
[4] LEE, John M. *Introduction to Smooth Manifolds*. Washington: Spring, 2002.
[5] LEE, John M. *Reimannian manifolds: an introduction to curvature*. New York: Spring-Verlag, 1997.
[6] O'NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry, with Applications to Relativity*. New York: Academic Press, 1983.

Prof. José Edson Sampaio
Instituto Federal de Ensino, Ciências e Tecnologia do Ceará
Campus Quixadá
Estrada do Cedro, Km 5 s/n, Quixadá – CE
CEP: 63900-000
Fone: (88) 3412.0111

Revista
ELEMENTOS

Sobre Elementos em Grupos Finitos Cujos os Índices São Potências de Primo

Josean da Silva Alves
Universidade Federal do Acre

Resumo

Considerando x um elemento de um grupo finito G, o índice de $C_G(x)$ em G é o número de elementos conjugados de x em G, que denotamos por $Ind_G(x)$, que será chamado, neste contexto, simplesmente de **índice de x em G**. De modo mais geral, se $H < G$, denotamos o índice $[H : C_H(x)]$ por $Ind_H(x)$. Neste artigo, apresentaremos algumas condições suficientes para garantir que o elemento x em G tenha índice potência de primo, e ainda, dois teoremas apresentados por Alan R. Camina, Pavel Shumyatsky e Carmela Sica [4], em especial, ao seguinte teorema, se $Ind_{\langle a,b,x \rangle}(x)$ é uma potência de primo para qualquer $a, b \in G$, segue que, $Ind_G(x)$ é uma potência de primo.

Abstract

Considering x is an element of a finite group G, the index $C_G(x)$ in G is the number of conjugated elements of x in G, which we denote by $Ind_G(x)$, which will be called in this context simply index x in G. More generally, if $H < G$, we denote the index $[H : C_H(x)]$ by $Ind_H(x)$. In this article, we present some sufficient conditions to ensure that the element x in G has prime power index, and also two theorems presented by Alan R. Camina, Pavel Shumyatsky and Carmela Sica [4], in particular, the following theorem, if $Ind_{\langle a,b,x \rangle}(x)$ is a prime power for any $a, b \in G$ follows that $Ind_G(x)$ is a prime power.

Palavras chave: Grupos finitos e centralizadores.

1. Introdução

Este artigo é um resumo de uma dissertação de mestrado apresentada na Universidade Federal do Acre em junho de 2014, pelo autor desse texto, baseada no artigo "On elements of prime-power index in finite groups" de Alan R. Camina, Pavel Shumyatsky e Carmela Sica. Além disso, as demonstrações dos teoremas aqui apresentados estão praticamente transcritos, apenas com pequenas observações, tendo em vista que os mesmos são demostrados usando o contraexemplo minimal. Pelo teorema da órbita-estabilizador o índice de $C_G(x)$ em G é o tamanho da classe de conjugação que contém x e, portanto, indicada por $|x^G|$. A influência do tamanho das classes de conjugação na estrutura de um grupo finito já foi considerada por muitos autores. Um desses autores foi Reinhold Baer, que apresentou a seguinte definição.

Definição 1.1. Sejam G um grupo finito e $x \in G$. O índice de x em G é dado por $[G: C_G(x)]$ e denotamos por $Ind_G(x)$.

O significado de elementos em um grupo cujo índice dos seus centralizadores são potência primo é mais conhecido uma vez que lembramos do Teorema de Wielandt que menciona a relação dos elementos cuja ordem e índice são potência de p, p primo, e do Teorema de Burnside que afirmar a ausência de elemento não-trivial cujo índice é potência de primo em grupos simples. Do Teorema de Burnside se deduz facilmente que um grupo sem subgrupos características próprios contém um elemento, não trivial, cujo índice é uma potência de primo se e somente se este grupo é abeliano. Além disso, Kazarin deduziu que um elemento nessas condições pertence ao radical solúvel de G, e daí resulta que x pertence ao segundo termo da série de Fitting de tal grupo.

Recentemente, a seguinte questão foi conjecturada por Alan Camina, Pavel Shumyatsky e Carmela Sica [4]:

Conjectura 1.1. Seja $x \in G$. Suponhamos que $Ind_{\langle a,x \rangle}(x)$ é uma potência de primo, para qualquer $a \in G$. Então, $Ind_G(x)$ é uma potência de primo.

No entanto, a resposta para esta questão é negativa. De fato, considerando um grupo abeliano A agindo sobre $\mathbb{S}_3$, o grupo simétrico de grau 3 e, assumindo que $G = A\mathbb{S}_3$ e $x \in A$, um elemento tal que $C_{\mathbb{S}_3}(x) = 1_G$. Temos que, $Ind_{\langle a,x \rangle}(x) = |a|$ é um primo, para cada $a \in \mathbb{S}_3$, porém, $Ind_G(x) = 6$.

Deste modo, a questão proposta acima foi reformulada, passando a ser apresentada da seguinte maneira:

Conjectura 1.2. Seja p um primo e $x \in G$. Suponha que $Ind_{\langle a,x \rangle}(x)$ é uma p-potência para qualquer $a \in G$. Então, $Ind_G(x)$ é um p-potência.

Esse resultado, além de ser verdadeiro, deu origem a um teorema mais geral, cuja demonstração será um dos principais objetivos. Contudo, nosso objetivo principal neste trabalho é discorrer sobre as condições usadas para provar que: se $Ind_{\langle a,b,x \rangle}(x)$ é uma potência de primo para qualquer $a, b \in G$, segue que, $Ind_G(x)$ é uma potência de primo.

2. Resultados Preliminares

Talvez Ludvig Sylow tenha contribuído com os primeiros resultados, afirmando que, um grupo G cujo índices de x em G são potência de um primo dado, tem centro não-trivial. Já William Burnside declara que se o índice de x em G é potência de primo, então o grupo é não-simples. Estes são dois resultados clássicos que dão informações sobre o grupo e algumas propriedades aritméticas do conjunto de índices.

Em 1990, Kazarin, provou a seguinte extensão para o resultado de Burnside:

Teorema 2.1. Seja G um grupo finito e x um elemento de G, de tal forma que, $Ind_G(x) = p^b$, para algum p primo e b inteiro. Então, $|x^G|$ é um subgrupo solúvel de G.

Os lemas a seguir tratam de algumas propriedades sobre índices de subgrupos.

Lema 2.1. Seja S um subgrupo de G, e N um subgrupo normal de G, então [N : N \ S] é um divisor de [G : S].

Demonstração: Pelo Segundo Teorema do Isomorfismo, tem-se:

$$\frac{NS}{N} \simeq \frac{S}{N \cap S}$$

Consequentemente,

$$[G : 1_G] = [G : NS][NS : N][N : N \cap S][N \cap S : 1_G] =$$
$$= [G : NS][S : N \cap S][N : N \cap S][N \cap S : 1G] =$$
$$= [G : NS][N : N \cap S][S : 1G],$$

isto implica que,

$[G : S] = [G : NS][N : N \cap S]$,

como queríamos demostrar. ■

Lema 2.2. Seja N um subgrupo normal de G. Então:

i) Se $x \in N$, então $Ind_N(x)$ divide $Ind_G(x)$;

ii) Se $x \in G$, então $Ind_{\frac{G}{N}}(x)$ divide $Ind_G(x)$.

Demonstração: i) Basta considerar que $C_N(x) = N \cap C_G(x)$ e usar o Lema 2.1.

ii) É claro que:

$$\frac{NC_G(x)}{N} \leq C_{\frac{G}{N}}(Nx)$$

Consequentemente, podemos deduzir, a partir, do Primeiro Teorema do isomorfismo que:

$$[G : NC_G(x)] = \left[\frac{G}{N} : \frac{NC_G(x)}{N}\right] = \left[\frac{G}{N} : C_{\frac{G}{N}}(Nx)\right]\left[C_{\frac{G}{N}}(Nx) : \frac{NC_G(x)}{N}\right]$$

Daí, $\left[\frac{G}{N} : Nx\right]$ é divisor de $[G : NC_G(x)]$ e este índice é divisor de $Ind_G(x)$, desde que:

$[G : C_G(x)] = [G : NC_G(x)][NC_G(x) : C_G(x)]$.

Isso prova nossa afirmação.

■

Agora, vamos considerar a estrutura de um grupo que tem um elemento de índice potência de primo.

Lema 2.3. Se a ordem do subgrupo normal N de G é divisível pelo número primo p, então N contém um elemento de ordem p cujo índice é primo com p.

Demonstração: Decorre da nossa hipótese e do Teorema de Sylow que os Sylow p-subgrupos de N são diferentes de 1_G. Se S é um Sylow p-subgrupo de N, então S está contido em alguns Sylow p-subgrupo P de G. De $S = P \cap N$, deduz-se que S é um subgrupo normal de P. Cada subgrupo normal, diferente de 1_G, de um p-grupo contém um elemento central de ordem p. Consequentemente, existe um elemento t de ordem p em S e t pertence ao centro de P. Claramente, $C_G(t)$ contém P, isso implica que $[G : C_G(t)] = Ind_G(t)$ é primo com p.
■

Os próximos dois lemas e suas provas são atribuídos a H. Wielandt.

Lema 2.4. (Wielandt) Seja p um primo e $x \in G$. Se tanto a ordem de x como a ordem da classe de x são potências de p, então $x \in O_p(G)$.

Demonstração: Seja x um elemento de G cuja ordem e índice são potências de p. Considere $P \in Syl_p(G)$. Claramente, podemos supor que $x \in P$. Além disso, $G = C_G(x)P$. Daí,

$\langle x^G \rangle = \langle x^{C_G(x)P} \rangle = \langle x^P \rangle \leq P,$

assim,

$\langle x^G \rangle \trianglelefteq G, \langle x^G \rangle \leq O_p(G).$

Então,

$x \in \langle x^G \rangle \leq O_p(G).$ ■

Lema 2.5. Seja G um grupo finito e x um elemento de índice potência de primo. Então

x centraliza cada fator principal não abeliano de G.

Demonstração: O principal teorema em Kazarin [5] diz que $\langle x^G \rangle$ é um subgrupo solúvel

de G. Daí, segue o lema. ■

A seguir, apresentaremos a proposição que generaliza o resultado de Wielandt mencionado no Lema 2.4.

Proposição 2.1. Seja G um grupo finito e x um elemento de G cujo índice é p^n, onde p é um primo e n é um número natural. Então

$$[x^G, x^G] \subseteq O_p(G).$$

Demonstração: Seja G um contraexemplo mínimo para a proposição. Uma vez que a condição da proposição são herdadas por grupos quocientes (Lema 2.1), podemos supor que $O_p(G) = 1_G$. Por isso, precisamos mostrar que $[x^G, x^G] = 1_G$. Primeiramente, suponhamos que $\langle x \rangle$ é subnormal em G, em seguida, $\langle x \rangle$ está contido no subgrupo de Fitting $F(G)$ de G, mas, uma vez que $F(G)$ é um p'-grupo, segue-se que x é central em $F(G)$. Como $\langle x^G \rangle$ está em $F(G)$, segue o resultado. Por outro lado, vamos assumir que $\langle x \rangle$ não é subnormal em G. Seja $N = \langle x^G \rangle$ e suponhamos que N é subgrupo próprio de G. Pela minimalidade de G, uma vez que $O_p(N) = 1_G$, temos que $[x^N, x^N] = 1_G$ e, portanto, x é central no seu fecho normal em N. No entanto, isso implica que $\langle x \rangle$ é subnormal em G, o que é uma contradição. Assim, podemos assumir que $N = G = \langle x^G \rangle$. Seja K um subgrupo normal mínimo de G. Se considerarmos $\frac{G}{K}$, vemos que $\frac{G'}{K} = \frac{[x^G, x^G]K}{K} \subseteq O_p\left(\frac{G}{K}\right)$, por indução. Assumindo que K é central em G, temos $O_p\left(\frac{G}{K}\right) = \frac{O_p(G)K}{K}$ e, nesse caso, $O_p\left(\frac{G}{K}\right) = 1_G$. Assim, $G' < Z(G)$ e, portanto, G é nilpotente e o resultado é verdadeiro. Além disso, se K não é central em G e, portanto, não é centralizado por x, temos que K tem ordem divisível por p. Assim, K é um fator principal não-abeliano de G já que $O_p(G) = 1_G$. Mas isso é um absurdo pelo Lema 2.5. ■

Para um grupo G, os subgrupos característicos $F_k(G)$, $k \geq 0$ são definidos por $F_0(G) = 1_G$ e $F_{k+1}(G)$, e indutivamente por $\frac{F_{k+1}(G)}{F_k(G)} = F\left(\frac{G}{F_k(G)}\right)$.

Daí, podemos provar o seguinte teorema.

Teorema 2.2. Seja G um grupo finito. Então, todos os elementos de índice potência de primo estão no $F_2(G)$.

Demonstração: Seja $x \in G$, tal que $Ind_G(x) = p^a$ para algum primo p e a um número

natural. Então, $[x^G, x^G] \subseteq O_p(G) \subseteq F(G)$. Daí, $\frac{F(G)\langle x \rangle}{F(G)}$ é um subgrupo nilpotente subnormal de $\frac{G}{F(G)}$. Assim, segue o teorema. ■

3. Resultados principais

A partir, da **Conjectura 1.2** obteve-se um teorema mais geral, que enunciaremos e demonstraremos. Mas, antes, é imprescindível admitir o seguinte lema.

Lema 3.1. Sejam π um conjunto de números primos e x um elemento de G. Suponha que $Ind_{\langle a,x \rangle}(x)$ é um π-número para qualquer $a \in G$. Se Q é um π'-subgrupo de G, tal que $x \in N_G(Q)$, então $x \in C_G(Q)$.

Demonstração: Seja $a \in Q$. Por hipótese, $Ind_{\langle a,x \rangle}(x) = [\langle a, x \rangle : C_{\langle a,x \rangle}(x)]$ é π-número. Por outro lado, é claro que $Ind_{\langle a,x \rangle}(x)$ é um π'-número, pois adimitindo que $x \in N_G(Q)$, tem-se $\langle a, x \rangle \leq Q$ e $C_{\langle a,x \rangle}(x) \leq Q$. Daí, pelo teorema de Lagrange:

$|\langle a, x \rangle| = \left|C_{\langle a,x \rangle}(x)\right|\left[\langle a, x \rangle : C_{\langle a,x \rangle}(x)\right]$,

isto é, $\langle a, x \rangle$ é π'-subgrupo. Logo, $\left|\langle a, x \rangle : C_{\langle a,x \rangle}(x)\right| = 1$, ou seja, $\langle a, x \rangle = C_{\langle a,x \rangle}(x)$, para

todo $a \in Q$. Portanto, $x \in C_G(Q)$. ■

É interessante notar que, se $Ind_G(x)$ é um π-número $Ind_H(x)$ não é necessariamente um π-número para cada subgrupo H.

Agora, com o auxílio do Lema 3.1, podemos enunciar e demonstrar, a seguir, o teorema que generalizou a Conjectura 2.2.

Teorema 3.1. Seja π um conjunto de números primos. Seja $x \in G$ e suponha que $Ind_{\langle a,x \rangle}(x)$ é um π-número para qualquer $a \in G$. Então, $Ind_G(x)$ é um π-número.

Demonstração: Seja G um contraexemplo de ordem mínima. Escolha um primo $q \in \pi$ que divide $Ind_G(x)$. Seja Q um Sylow q-subgrupo do $C_G(x)$ e R um Sylow q-subgrupo de G, tal que $Q \leq R$. Se $a \in R \backslash Q$, segue-se que $Ind_{\langle a,x,Q \rangle}(x)$ é divisível por

q, daí, por indução, $G = \langle a, x, Q\rangle$. Seja $Z = Z(R)$. É fácil de ver que $Z \cap Q \leq Z(G)$. Se $Z \cap Q = 1_G$, escolha $1_G \neq a \in Z$. Agora, a igualdade $G = \langle a, x, Q\rangle$ mostra que $Z(Q) \leq Z(G)$. Assim, $M = O_q(G) \neq 1_G$. Por indução o resultado é válido para $\frac{G}{M}$. Defina, $\frac{H}{M} = C_{\frac{G}{M}}(xM)$. Se $[G : H]$ é um π-número, basta que se prove que $Ind_H(x)$ é um π-número. Podemos assumir que $G = H$. Se $H < G$, o resultado segue por indução. Sendo central em $\frac{G}{M}$, o elemento x normaliza cada Sylow q-subgrupo de G. Pelo Lema 2.7, podemos concluir que x centraliza cada Sylow q-subgrupo de G. Assim, $Ind_G(x)$ não é divisível por q, uma contradição. Como queríamos demostrar. ■

Mas, o resultado principal mencionado no artigo [4] e a motivação deste trabalho é o seguinte teorema.

Teorema 3.2. Suponha que $Ind_{\langle a,b,x\rangle}(x)$ é uma potência de primo para qualquer $a, b \in G$. Então, $Ind_G(x)$ é uma potência de primo.

A prova do teorema 3.2 já não é tão imediato. Particularmente, utilizamos o resultado conhecido por Aschbacher e Guralnick [1], que afirma, cada grupo simples não abeliano é 2-gerado. Isto depende da classificação dos grupos finitos simples. Outra importante ferramenta utilizada na prova do Teorema 3.2 é o teorema de Flavell [7], que afirma: $x \in F_2(G)$ se, e somente se $x \in F_2(\langle a, x\rangle)$ para qualquer $a \in G$.

Com o objetivo de provar o Teorema Principal mencionado anteriormente, iremos mostrar, a seguir, três lemas.

Lema 3.2. Se $G = F(G)\langle x\rangle$, o Teorema 3.2 é confirmado.

Demonstração: Suponha que $Ind_G(x)$ é divisível por dois primos distintos, p e q. Escolhendo um p-elemento a e um q-elemento b em $F(G)$, tal que $[a, x] \neq 1_G$ e $[b, x] \neq 1_G$, segue-se que $Ind_{\langle a,b,x\rangle}(x)$ é divisível por ambos p e q, uma contradição. ■

No próximo lema usaremos a notação $Ind_H(x)$ mesmo quando $x \notin H$.

Lema 3.3. Seja G um grupo agindo sobre um grupo abeliano V , e seja x um elemento de V , tal que $Ind_{\langle a,b \rangle}(x)$ é um potência de primo, para qualquer $a, b \in G$. Então, $Ind_G(x)$ é uma potência de primo.

Demonstração: Escolha um contraexemplo, com G de ordem mínima e, suponha que o$Ind_G(x)$ é divisível por dois números primos diferentes. Nota-se, que nenhum subgrupo normal não trivial de G centraliza x. Se isso fosse falso existiria um subgrupo normal Nde G, tal que $N \leq C_G(x)$. Considere a ação de $\frac{G}{N}$ em $W = C_V(N)$. Então, a órbita de x sob a ação de G é a mesma órbita, sob a ação de $\frac{G}{N}$ obtendo uma contradição, uma vez que, $\left|\frac{G}{N}\right| < |G|$. Em seguida, percebe-se que G não é simples, já que todos os grupos simples são 2- gerados. Seja D um subgrupo normal minimal de G. Desde que $D < G$ e D não centralizar x, o índice $Ind_D(x)$ é uma p-potência para algum primo p. Seja $q \neq p$ outro primo que divide $Ind_G(x)$. Escolha um Sylow q- subgrupo S em G. Desde que $Ind_{DS}(x)$ é divisível por ambos p e q, por indução implica que $G = DS$. Suponha, primeiramente, que $\frac{S}{S \cap D}$ não é cíclico e escreva $S = S_1 S_2$, onde S_1 e S_2 são subgrupos maximais distintos de S contendo $S \cap D$. Desde que $|DS_1| < |DS|$, segue-se que $Ind_{DS_1}(x)$ é um potência de primo e, assim, x centraliza um Sylow q- subgrupo em DS_1. Portanto, existe $d_1 \in D$, tal que $S_1^{d1} \leq C_G(x)$. Da mesma forma, existe $d_2 \in D$, tal que $S_2^{d2} \leq C_G(x)$. Desde que $C_G(x)$ não contenha um subgrupo de ordem igual $|S|$ e $|S1| = |S2| = \frac{|S|}{q}$, podemos concluir, que $S_1^{d_1}$ e S_2^{d2} são Sylow q-subgrupos $C_G(x)$. Portanto, S_1 e S_2 são conjugados em G. Isto leva a uma contradição porque as imagens de S_1 e S_2 em $\frac{G}{D}$ são normais e distintas. Portanto, $\frac{S}{S \cap D}$ é cíclico. Seja $a \in S$, tal que $G = D\langle a \rangle$. Suponha-se que $a \in C_G(x)$. Sabemos que $C_D(x)$ contém um Sylow q-subgrupo Q de D. Escolhendo Q de tal modo que $a \in N_G(Q)$, temos que $Q\langle a \rangle$ é um Sylow q-subgrupo de G contido no $C_G(x)$ e, assim, $Ind_G(x)$ não é divisível por q, uma contradição. Daí, $a \notin C_G(x)$. Naturalmente, este argumento também mostra que

nenhum conjugado de a está contido no $C_G(x)$. Suponha, agora, que a normaliza um q'-subgrupo não trivial R em D. Sem perda de generalidade, podemos supor que $R\langle a\rangle$ é 2-gerados. Daí $Ind_{R\langle a\rangle}(x)$ é uma potência de primo. Uma vez que $a \notin C_G(x)$, segue-se que $R \leq C_G(x)$. Por outro lado, nenhum conjugado de a está contido em $C_G(x)$. Segue-se que cada conjugado de R está contido em $C_G(x)$. Assim, o fecho normal de R está contido em $C_G(x)$, uma contradição. Conclui-se que a não pode normalizar um q'-subgrupo não trivial de D. Seja, agora, $r \neq q$ um divisor primo de $|D|$ e R um Sylow r-subgrupo em D. Pelo argumento de Frattini, existe $d \in D$, tal que ad normaliza R. Seja a_0 um gerador do Sylow q-subgrupo de $\langle ad\rangle$ e d_0 um gerador do Sylow q'-subgrupo de $\langle ad\rangle$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $a = a_0$, ou seja, poderíamos escolher a_0 no lugar de a. Em seguida, a centraliza um q'-elemento $d_0 \in D$. Portanto, $d_0 = 1_G$. No entanto, neste caso, a normaliza R, uma contradição.
■

Lema 3.4. Se $x \notin Z(F(G))$ o Teorema 3.2 é confirmado.

Demonstração: Suponhamos que o lema é falso. Seja G um contraexemplo de ordem mínima. Dado x de tal maneira que $|G|$ é tão pequena quanto possível, pelo principal resultado de Carmina [5], concluímos que, $x \in F_2(\langle a, x\rangle)$ para todo $a \in G$. Assim, pelo teorema de Flavell [7], $x \in F_2(G)$. Como $x \notin Z(F(G))$, segue-se que $x \notin C_G(F(G))$ [[7], Teorema 6.1.3]. Portanto, existe um número primo p e um p-elemento $a \in F(G)$, tal que $[a, x] \neq 1_G$. Por hipótese, existe um primo $q \neq p$, tal que nenhum Sylow q-subgrupo de G comute com x. Escolha um Sylow q-subgrupo S, tal que S contém um Sylow q-subgrupo de $C_G(x)$, digamos T. Pelo Lema 2.8 $S \cap F(G) \leq T$. Considere $H = \langle x, a, S\rangle$. Uma vez que a está em cada Sylow p-subgrupo, $Ind_H(x)$ é divisível por p e q e, portanto, não é uma potência de primo. Assim, por indução, $H = G$. Uma vez que $a \in F(G)$ e $x \in F_2(G)$, observamos que $\frac{G}{F_2(G)}$ é um q-grupo e, assim, G tem a altura de Fitting no máximo 3. Considere $K = \langle x, a, N_G(T)\rangle$. Como $x \in N_G(T)$, $K = \langle x, a, N_G(T)\rangle \leq F(G)N_G(T)$. Ainda mais, $T < N_S(T)$, segue-se que $K = F(G)N_G(T) = G$. Assim, T é normal em S e $F(G)T$ é normal em G. Escolha $b \in S\backslash T$. Pela hipótese, $Ind_{\langle a,b,x\rangle}(x)$ é um p-potência e, assim, x centraliza um conjugado de b, digamos b^z. Mas, então, $b^z \in F(G)T$ e, assim, $b \in F(G)T \cap S = T$ e isto é uma contradição. ■

Agora, o Teorema 3.2 pode ser facilmente provado a partir do Lema 3.3 e 3.4. Se $x \notin Z(F(G))$, o resultado segue do Lema 3.4. Se $x \in Z(F(G))$, então $\langle x^G \rangle$ é abeliano e o resultado segue do Lema 3.3.

4. Considerações Finais

Vemos que a partir do Teorema 3.2, podemos verificar se um elemento de um grupo tem índice potência de primo. Deste modo, esse resultado se torna fundamental na classificação dos grupos simples, visto que, Willian Burnside declara que dado $x \in G$ tal que $Ind_G(x)$ é uma potência de primo, pode-se concluir que o grupo G é não-simples.

5. Referências Bibliográficas

[1] Aschbacher, Michael, and R. Guralnick, Some applications of the first cohomology group.Journal of Algebra 90-2, p. 446-460, 1984. 39

[2] Baer, Reinhold, Group elements of prime power index. Transactions of the American Mathematical Society 75-1, p.20-47, 1953.

[3] Burnside, William, Theory of Groups of Finite Order. Messenger of Mathematics 23, p.112 , 1909. 19

[4] Camina, Alan R., Pavel Shumyatsky, and Carmela Sica, On elements of prime-power index in finite groups. Journal of Algebra 323-2, p.522-525, 2010. i, ii, 33, 39

[5] Camina, A. R., and R. D. Camina, Implications of conjugacy class size.J. Group Theory 1-3, p.257-269, 1998. ii, 36, 41

[6] Camina, A. R., and R. D. Camina, The influence of conjugacy class sizes on the structure of finite groups: A survey.Asian-European Journal of Mathematics 4-04 , p.559-588, 2011.

[7] Flavell, Paul, A characterisation of F2(G), J. Algebra 55, p.271-287, 2002. 37, 39, 41
[8] Gordeev, N., Grunewald, F., Kunyavskĭi, B., and Plotkin, E. ,A commutator description of the solvable radical of a finite group, Groups, Geometry, and Dynamics 2, p. 85-120, 2008.
[9] Gordeev, N., Grunewald, F., Kunyavskĭi, B., and Plotkin, E., From Thompson to Baer-Suzuki: a sharp characterization of the solvable radical. Journal of Algebra 323-10, p.2888-2904, 2010.
[10] Gordeev, N., Grunewald, F., Kunyavskĭi, B., and Plotkin, E., On the number of conjugates defining the solvable radical of a finite group. Comptes Rendus Mathematique 343-6, p.387-392, 2006.
[11] Gordeev, N., Grunewald, F., Kunyavskĭi, B., Plotkin, E., On the number of conjugates defining the solvable radical of a finite group. Comptes Rendus Mathematique
343-6, p.387-392 , 2006.
[12] Gorenstein, D., Finite Groups, New York: Harper and Row, 1968. i
[13] Grunewald, Fritz, Boris Kunyavskĭi, and Eugene Plotkin, Characterization of solvable groups and solvable radical. International Journal of Algebra and Computation 23.05, p. 1011-1062, 2013.
[14] Guralnick, R., Grunewald, F., Kunyavskĭi, B., Plotkin, E., and Shalev, A., Thompson-like characterizations of the solvable radical. Journal of Algebra 300-1, p.363-375, 2006.
[15] Houcine, Abderezak Ould,A remark on the definability of the Fitting subgroup and the soluble radical. Mathematical Logic Quarterly 59.1-2, p.62-65, 2013.

Josean da Silva Alves
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Universidade Federal do Acre
Rio Branco - Acre
joseansilvalves@gmail.com
(68)9974-6875

Revista
ELEMENTOS

Propriedades de Frattini em PC - Grupos

Cleber Pereira
Universidade Federal do Acre

Resumo

Neste artigo investigamos algumas classes de grupos com propriedades de Frattini. Dizemos que $\mathfrak{X}$ é uma propriedade de Frattini se G é um $\mathfrak{X}$-grupo sempre que $\frac{G}{\Phi(G)}$ for um $\mathfrak{X}$-grupo. Mostramos que local nilpotência e local supersolubilidade são propriedades de Frattini de PC-grupos, grupos com classes de conjugação policíclica-por-finito. Particularmente, mostramos que se G é um grupo com classe de conjugação policíclica-por-finito e K é um subgrupo normal de G, tem-se que $\frac{K}{K \cap \Phi(G)}$ é localmente nilpotente (supersolúvel) se, e somente se, K é localmente nilpotente (supersolúvel).

Abstract

This paper investigated some classes of groups Frattini properties. We say that $\mathfrak{X}$ is a property of Frattini if G is a $\mathfrak{X}$-group where $\frac{G}{\Phi(G)}$ is an $\mathfrak{X}$-group. We show that nilpotência site and supersolubilidade site are properties of Frattini PC-groups, with classes of polycyclic-by-finite conjunction. Particularly, we show that if G is a group with class of polycyclic-by-finite conjunction K a normal subgroup of G. Then $\frac{K}{K \cap \Phi(G)}$ is locally nilpotent (supersolúvel) if, and only if K is locally nilpotent (supersolúvel).

Palavras Chave: PC-grupos; Propriedades de Frattini; Local Nilpotência e Local Supersolubilidade.

1. Introdução

Dizemos que $\mathfrak{X}$ é uma classe ou propriedade de grupos se para cada grupo G podemos decidir se G possui ou não a propriedade $\mathfrak{X}$, ou seja, $G \in \mathfrak{X}$ ou $G \notin \mathfrak{X}$. Comumente dizemos que G é um $\mathfrak{X}$-grupo se G possui a propriedade $\mathfrak{X}$.

Definição 1: Seja $\mathfrak{X}$ uma classe ou propriedade de grupos.

i) Dizemos que G é um grupo *poli*-$\mathfrak{X}$ se, e somente se, em G existe uma cadeia subnormal

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

onde cada quociente $\dfrac{G_i}{G_{i-1}}$ é um $\mathfrak{X}$-grupo, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Indicamos por $\mathfrak{X}^{\infty}$ a classe dos poli-$\mathfrak{X}$ grupos;

ii) Sejam $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ propriedades de grupos. Um grupo G é dito $\mathfrak{X}$-por-$\mathfrak{Y}$, se em G existe um subgrupo normal N, tal que N possui a propriedade $\mathfrak{X}$ e $\dfrac{G}{N}$ possui a propriedade $\mathfrak{Y}$. Indicamos a classe dos grupos $\mathfrak{X}$-por-$\mathfrak{Y}$ por $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$;

iii) Um grupo G é dito localmente-$\mathfrak{X}$ grupo se, e somente se, todo subgrupo de G finitamente gerado é um $\mathfrak{X}$-grupo. Indicamos a classe dos localmente-$\mathfrak{X}$ grupos por $L\mathfrak{X}$;

iv) Um grupo G é dito hiper-$\mathfrak{X}$ grupo, se toda imagem homomórfica não-trivial de G possuir um $\mathfrak{X}$-subgrupo normal não-trivial. Em outras palavras, para todo $N \triangleleft G$ existe um $M \trianglelefteq G$ com $N < M$ e $\dfrac{M}{N} \in \mathfrak{X}$. Indicamos a classe dos hiper-$\mathfrak{X}$ grupos por $H\mathfrak{X}$.

Definição 2: Se n é um inteiro positivo, dizemos que um grupo G é n-*gerado* se ele é gerado por um n-subconjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de G. Um grupo G é dito *finitamente gerado* se ele for n-gerado para algum $1 \leq n \in N$.

Se $\{X_\lambda / \lambda \in \Lambda\}$ é um conjunto de subgrupos de G, o subgrupo gerado pelos $X_\lambda{}'s$, com $\lambda \in \Lambda$, é definido por $\langle \cup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rangle$. Este conjunto será escrito, por $\langle X_\lambda / \lambda \in \Lambda \rangle$ ou no caso de um conjunto finito $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, escrevemos $\langle X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_n} \rangle$.

Observação 1: Sejam G um grupo e N um subgrupo normal em G tal que $\frac{G}{N}$ é n-gerado, digamos $\frac{G}{N} = \langle x_1N, x_2N, \dots, x_nN \rangle$. Então temos $G = NH$, com $H = \langle x_1N, x_2N, \dots, x_nN \rangle$.

Se G é um grupo, indicamos por $P(G) = \{W/W \subseteq G\}$ o *conjunto das partes de* G*.* Todo subconjunto F de $P(G)$ é denominado de uma *família* de subconjuntos de G.

Por $\mathfrak{X}G = \{H \leq G/H \in \mathfrak{X}\}$ denotamos a *família dos* $\mathfrak{X}$*-subgrupos de* G, isto é, a família dos subgrupos de G que possuem a propriedade $\mathfrak{X}$.

Definição 3: Dados um conjunto A e $\mathcal{M} \subseteq P(A)$ uma família de subconjuntos de A. Um elemento $M \in \mathcal{M}$ (caso exista) é dito:

i) o maior elemento de $\mathcal{M}$ se $X \subseteq M$ para todo $X \in \mathcal{M}$;

ii) um elemento maximal de $\mathcal{M}$ se $M \subseteq X \in \mathcal{M}$ implica que $X = M$.

Indicamos por $m\mathcal{M} = \{M/M$ é elemento maximal de $\mathcal{M}\}$ o conjunto dos elementos maximais de $\mathcal{M}$.

Definição 4: Uma família $\emptyset \neq \mathcal{M} \subseteq P(A)$ satisfaz a condição maximal, se qualquer cadeia $C \subseteq M$ possui um maior elemento.

Desta forma fazemos a seguinte

Definição 5: Seja G um grupo.

i) Se S consiste de todos os subgrupos de G, dizemos que G satisfaz a condição maximal quando S satisfaz a condição maximal; analogamente, dizemos que G satisfaz a condição minimal quando S satisfaz a condição minimal. Denotamos estas condições por *Max* e *Min*, respectivamente;

ii) Se $\mathcal{N}$ consiste de todos os subgrupos normais de G, dizemos que G satisfaz a condição maximal sobre os subgrupos normais quando $\mathcal{N}$ satisfaz a condição maximal. Analogamente, dizemos que G satisfaz a condição minimal sobre os subgrupos normais quando $\mathcal{N}$ satisfaz a condição minimal. Denotamos estas condições por *Max-n* e *Min-n*, respectivamente.

Definição 6: Dizemos que um grupo G é noetheriano (ou satisfazendo a condição ma- ximal para subgrupos) se ocorre(m) uma (todas) da (as) propriedade (s) seguintes:

i) Toda família não vazia de subgrupos de G possui um elemento maximal;

ii) Toda cadeia ascendente $U_0 \leq U_1 \leq \cdots \leq U_n \leq \cdots$ de subgrupos de G é finita;

iii) Todo subgrupo de G é finitamente gerado.

Proposição 1: Sejam G um grupo e $N \trianglelefteq G$. Então G é noetheriano se, e somente se, N e $\frac{G}{N}$ são noetherianos.

Demonstração: (página 11, [1])

Definição 7: Um grupo G é dito nilpotente se existe em G uma cadeia de subgrupos

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$$

tal que $G_i \trianglelefteq G$ e $\frac{G_i}{G_{i-1}} \leq Z\left(\frac{G}{G_{i-1}}\right)$ para todo $i = 1,2, \dots, n$.

Indicamos por $\mathfrak{N}$ a classe dos grupos nilpotentes.

Na direção dos grupos localmente nilpotentes temos a seguinte

Proposição 2: A classe $L\mathfrak{N}$ dos grupos localmente nilpotentes é fechada para subgrupos e quocientes.

Demonstração: (página 19, de [1])

Teorema 1: (Hirsch-Plotikin) Sejam H e K subgrupos normais localmente nilpotentes de um grupo G. Então o produto HK é localmente nilpotente.

Demonstração: (página 21, [1])

Corolário 1: (O Radical de Hirsch-Plotikin) Em qualquer grupo G existe um único subgrupo normal localmente nilpotente maximal contendo todos os subgrupos normais localmente nilpotentes de G.

Demonstração: (página 22, [1])

Agora, com relação aos grupos policíclicos, temos a seguinte

Proposição 3: A classe dos grupos policíclicos é fechada para subgrupos, quocientes e extensões.

Demonstração: (página 23, [1])

Observação 2: Um grupo abeliano é policíclico se, e somente se, é finitamente gerado.

Demonstração: Seja G um grupo abeliano policíclico. Então existe uma cadeia subnormal

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_r = G$$

onde cada $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ é cíclico, para todo $i = 1, 2, \dots, r$. Assim temos

$$\frac{G_1}{G_0} = \langle x_1 \rangle, \frac{G_2}{G_1} = \langle x_2 G \rangle = \frac{\langle x_2 \rangle G_1}{G_1} = \frac{\langle x_2, x_1 \rangle}{G_1}.$$

Concluímos então que $G_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$. Procedendo de maneira análoga com os demais fatores desta cadeia, concluímos que $G_n = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = G$. Então G é finitamente gerado.

Agora, desde que tenhamos um grupo abeliano $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, podemos formar uma cadeia

$$1 \leq \langle x_1 \rangle \leq \langle x_1, x_2 \rangle \leq \cdots \leq \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = G_n$$

com fatores cíclicos, de onde segue que G é policíclico.

Proposição 4: Seja G um grupo. Então G é policíclico se, e somente se, G é solúvel e noetheriano.

Demonstração: (página 25, [1])

Mostraremos a seguir que a classe dos grupos policíclicos-por-finito é fechada a subgrupos e quociente. Vejamos a

Proposição 5: Seja G um grupo policíclico-por-finito. Então todo subgrupo e todo quociente de G é policíclico-por-finito.

Demonstração: Sendo G um grupo policíclico-por-finito, em G existe um subgrupo normal P, policíclico de índice finito. Seja H um subgrupo de G. Então $H \cap P$ é um subgrupo normal de H e sendo subgrupo de P, ele é policíclico. Além disso, $\frac{H}{H \cap P} \cong \frac{HP}{P} \leq \frac{G}{P}$ (finito). Logo, H é policíclico-por-finito. Agora, dado um subgrupo normal N de G, temos $\frac{PN}{N} \trianglelefteq \frac{G}{N}$ e $\frac{PN}{N} \cong \frac{P}{P \cap N}$ (policíclico). Mais ainda, $\frac{G}{N} \Big/ \frac{PN}{N} \cong \frac{G}{PN} \cong \frac{G}{P} \Big/ \frac{PN}{P}$ (finito) e assim, $\frac{G}{N}$ é policíclico-por-finito.

Faremos agora a seguinte

Definição 8: Um grupo G é dito supersolúvel se ele tem uma série normal

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$$

em que cada fator $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ é cíclico e cada $G_i \trianglelefteq G$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Proposição 6: A classe dos grupos supersolúveis é fechada para subgrupos, quocientes e produto direto (de um número finito de subgrupos supersolúveis).

Demonstração: (página 29, [1])

Proposição 7: Seja G um grupo. Então:

i) Se G é supersolúvel, então G satisfaz a condição maximal de subgrupos;

ii) Se G é nilpotente finitamente gerado, então G é supersolúvel.

Demonstração: (página 30, [1])

Proposição 8: A classe dos grupos localmente supersolúveis é fechada a subgrupos, quociente e produto direto (de um número finito de subgrupos localmente supersolúveis)

Demonstração: Sejam G um grupo localmente supersolúvel e H um subgrupo de G. Para todo subgrupo finitamente gerado H' de H, tem-se que H' é finitamente gerado em G. Como G é localmente supersolúvel, temos que H' é supersolúvel e, portanto, H é localmente supersolúvel.

Agora, sejam G um grupo localmente supersolúvel e N um subgrupo normal qualquer de G. Vamos mostrar que $\frac{G}{N}$ é localmente supersolúvel. Seja $\frac{K}{N}$ um subgrupo finitamente gerado de $\frac{G}{N}$. Daí, $\frac{K}{N} = \frac{\langle g_1N, g_2N, \ldots, g_rN \rangle}{N} = \frac{\langle g_1, g_2, \ldots, g_r \rangle N}{N}$. De onde segue que $\frac{K}{N}$ é isomorfo a um subgrupo finitamente gerado de G. Sendo G localmente supersolúvel, temos que $\frac{K}{N}$ é supersolúvel e, portanto, $\frac{G}{N}$ é localmente supersolúvel.

Finalmente, para provar que o produto direto de um número finito de subgrupos localmente supersolúveis é supersolúvel, basta provar para dois fatores. Sejam G um grupo e $K, H \leq G$ localmente supersolúveis. Seja E um subgrupo finitamente gerado do produto direto HK. Assim,

$$E = \langle h_1k_1, h_2k_2, \ldots, h_rk_r \rangle = \langle h_1, h_2, \ldots, h_r \rangle \text{ x } \langle k_1, k_2, \ldots, k_r \rangle = H'K'$$

com H' e K' subgrupos finitamente gerados de H e K, respectivamente. Sendo H e K localmente supersolúveis segue que H' e K' são supersolúveis. Logo, pela proposição 6, $E = H'K'$ é supersolúvel e, portanto, HK é localmente supersolúvel.

Proposição 9: Um grupo localmente supersolúvel satisfaz *Max-n* se, e somente se, é supersolúvel. Consequentemente *Max* e *Max-n* coincidem para grupos localmente supersolúveis.

Demonstração: (página 40, [1])

2. Apresentação de Resultados

Apresentaremos nesta seção alguns resultados que fazem parte dos resultados usados na nossa referência [1]. Tais resultados são de fundamental importância para a demonstração dos nossos teoremas principais.

Definição 9: Seja G um grupo e $\mathfrak{X}$ uma propriedade de grupos. Dizemos que $\mathfrak{X}$ é uma propriedade de Frattini se G é um $\mathfrak{X}$-grupo, sempre que $\frac{G}{\Phi(\mathrm{G})}$ for um $\mathfrak{X}$-grupo.

Definição 10: Dizemos que um grupo G possui classes de conjugação policíclicas-por-finito (ou é PC-grupo) se para cada elemento x em G o grupo quociente $\frac{G}{C_G(\langle x^G\rangle)}$ é policíclico-por-finito.

Observação 3: Seja G um PC-grupo, $N \trianglelefteq G$ e $H, K \leq G$. Então:

i) H é um PC-grupo;

ii) $\frac{G}{N}$ é um PC-grupo;

iii)$H \times K$ é um PC-grupo.

Demonstração: (página 42, [1])

Lema 1: Seja G um grupo policíclico-por-finito e A um subgrupo do $Aut(G)$. Se A é hiperabeliano-por-(localmente finito), então A é policíclico-por-finito.

Demonstração: (Ver [5], Lema 2.1).

Teorema 2: O grupo G é PC-grupo se, e somente se, cada conjunto finito de elementos de G está contido num subgrupo normal policíclico-por-finito de G.

Demonstração: Seja G um PC-grupo. É suficiente mostrar que $N = \langle x^G\rangle$ é policíclico- por-finito para cada $x \in G$. Desde que G é um PC-grupo, $\frac{G}{C_G(N)}$ é policíclico-por-finito, portanto, satisfaz a condição maximal, ou seja, é finitamente gerado. Pela Observação 1, $G = XC_G(N)$, onde X é finitamente gerado. Assim $N = \langle x^X\rangle$ está contido no subgrupo finitamente gerado $H = \langle X, x\rangle$. Por isso, H é finitamente gerado e $\frac{G}{C_G(H^G)}$ é policíclico-por-finito. Como $H \cap C_G(H^G) = C_H(H^G)$ e $\frac{H}{C_H(H^G)} \cong \frac{HC_G(H^G)}{C_G(H^G)} \leq \frac{G}{C_G(H^G)}$, logo, $\frac{H}{C_H(H^G)}$ é policíclico-por-finito. Assim, $\frac{H}{Z(H)}$ é policíclico-por-finito e, grupo abeliano-por-policíclico finitamente gerado satisfaz a condição maximal para subgrupos normais (Ver [6], Parte 1, Teorema 5.34) e, portanto, H é policíclico-por-finito.

Reciprocamente, suponhamos que cada conjunto finito de elementos de G está contido num subgrupo normal policíclico-por-finito de G. Então G é hiperabeliano-por-(localmente finito). Se $x \in G$, então $\langle x^G \rangle$ é policíclico-por-finito. Por isso, o quociente $\frac{G}{C_G(x^G)}$ é isomorfo a um grupo hiperabeliano-por-(localmente finito) de automorfismo do grupo policíclico-por-finito $\langle x^G \rangle$ e, portanto, pelo Lema 1, é policíclico-por-finito.

Corolário 2: Se G é um PC-grupo e $\frac{G}{N}$ é policíclico-por-finito, então existe um subgrupo normal H policíclico-por-finito tal que $HN = G$.

Demonstração: (página 43, [1])

Lema 2: Seja G um PC-grupo, e seja $\frac{H}{Z(G)}$ um subgrupo policíclico-por-finito de $\frac{G}{Z(G)}$. Então existe um subgrupo normal N de G tal que $\frac{G}{N}$ é policíclico-por-finito e $N \cap H = Z(G)$.

Demonstração: Sendo $\frac{H}{Z(G)}$ um subgrupo policíclico-por-finito de $\frac{G}{Z(G)}$, pela Proposição 4, segue que $\frac{H}{Z(G)}$ é noetheriano e, portanto, é finitamente gerado. Assim, podemos escrever $\frac{H}{Z(G)} = \langle Z(G)h_1, \dots, Z(G)h_n \rangle = \frac{Z(G)\langle h_1,\dots,h_n \rangle}{Z(G)}$, de onde segue que $H = Z(G)\langle h_1, \dots, h_n \rangle$. Como $C_G(H^G) = \bigcap_{i=1}^{n} C_G(h_i{}^G), \forall\, h_i \in H$ e G é PC-grupo, segue que $\frac{G}{C_G(H^G)}$ é policíclico-por-finito. Portanto, pelo Corolário 2, existe um subgrupo normal K policíclico-por-finito de G tal que $KC_G(H) = G$, já que $C_G(H^G) \leq C_G(H)$. Seja $N = C_G(K)$. Então $N \cap H$ centraliza K e $C_G(H)$ e, portanto, $N \cap H = Z(G)$. E, como $\cap\, C_G(k^G) = C_G(K^G) \leq C_G(K) = N, \forall\, k \in K$, segue que $\frac{G}{N}$ é policíclico-por-finito.

3. Propriedades de Frattini em PC-Grupos

Apresentaremos dois teoremas que consideremos a parte principal deste trabalho. Mostraremos que em um PC-grupo as propriedades localmente nilpotente e localmente supersolúvel são propriedades de Frattini.

Teorema 3: Seja G um PC-grupo e seja K um subgrupo normal de G. Então temos que $\frac{K}{K\cap\Phi(G)}$ é localmente nilpotente se, e somente se, K é localmente nilpotente. Em particular se $\frac{G}{\Phi(G)}$ é localmente nilpotente, então G é localmente nilpotente.

Demonstração: Seja E um subgrupo finitamente gerado de K. Então, sendo G um PC-grupo, pelo Teorema 2, E está contido dentro de um subgrupo policíclico-por-finito de G e assim, pela proposição 5, E é policíclico-por-finito. Fazendo $H = EZ(G)$, pelo Lema 2, existe um subgrupo normal N de G, tal que $\frac{G}{N}$ é policíclico-por-finito e $EZ(G) \cap N = Z(G)$. Pelo Lema de Dedekind, segue que $E \cap N \leq Z(G)$. (Ver [1], Lema 1.2).

Por hipótese, temos que $\frac{K}{K \cap \Phi(G)}$ é localmente nilpotente. Fazendo $\bar{G} = \frac{G}{N}$ e $\bar{K} = \frac{KN}{N}$, temos que $\frac{\bar{K}}{\bar{K} \cap \Phi(\bar{G})}$ é localmente nilpotente, já que $\frac{\Phi(G)N}{N} \leq \Phi\left(\frac{G}{N}\right)$. Assim, temos que $\frac{\bar{K}}{\bar{K} \cap \Phi(\bar{G})}$ é localmente nilpotente e satisfaz a condição maximal, pois $\frac{G}{N}$ é policíclico-por-finito, logo, $\frac{\bar{K}}{\bar{K} \cap \Phi(\bar{G})}$ é nilpotente (Ver [3], pág. 360) e assim $\bar{K}$ também é nilpotente. Como $\frac{E}{(E \cap N)} \cong \frac{EN}{N} \leq \frac{KN}{N}$, e $E \cap N \leq Z(G)$, vemos que E é nilpotente. Portanto, K é localmente nilpotente.

Teorema 4: Seja G um PC-grupo e seja K um subgrupo normal de G. Então temos que $\frac{K}{K\cap\Phi(G)}$ é localmente supersolúvel se, e somente se, K é localmente supersolúvel. Em particular se $\frac{G}{\Phi(G)}$ é localmente supersolúvel, então G é localmente supersolúvel.

Demonstração: Seja E um subgrupo finitamente gerado de K. Então, sendo G um PC-grupo, pelo Teorema 2, E está contido dentro de um subgrupo normal policíclico-por-finito de G e assim, pela proposição 5, E é policíclico-por-finito. Pelo Lema 2, existe um subgrupo normal N de G tal que $\frac{G}{N}$ é policíclico-por-finito e $EZ(G) \cap N = Z(G)$ de onde temos $E \cap N \leq Z(G)$ (Lema de Dedekind) (Ver [1], Lema 1.2). Por hipótese temos que $\frac{K}{K \cap \Phi(G)}$ é localmente supersolúvel. Fazendo $\bar{G} = \frac{G}{N}$ e $\bar{K} = \frac{KN}{N}$, assim temos que $\frac{\bar{K}}{\bar{K} \cap \Phi(\bar{G})}$ é localmente supersolúvel, já que $\frac{\Phi(G)N}{N} \leq \Phi\left(\frac{G}{N}\right)$.

Temos que $\frac{\bar{K}}{\bar{K} \cap \Phi(\bar{G})}$ é localmente supersolúvel e satisfaz a condição maximal. Daí, pela Proposição 8, temos que $\frac{\bar{K}}{\bar{K} \cap \Phi(\bar{G})}$ é supersolúvel. E por isso, temos que $\bar{K}$ também é supersolúvel. Daí segue então que $\frac{E}{(E \cap N)} \cong \frac{EN}{N}$ é supersolúvel, já que $\frac{EN}{N} \leq \frac{KN}{N} = \bar{K}$. Dado que $E \cap N \leq Z(G)$, temos que $E \cap N$ é abeliano finitamente gerado e, pela Observação 2, $E \cap N$ é policíclico. Isto implica que existe uma série

$$1 = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_r = E \cap N$$

onde cada $\frac{H_i}{H_{i-1}}$ é cíclico e $H_i \trianglelefteq E$. Logo, existe uma série normal em E com quocientes cíclicos, ou seja, E é supersolúvel. Portanto, K é localmente supersolúvel.

4. Considerações Finais

As discussões feitos nos Teoremas 3 e 4, mostram que as classes dos grupos localmente nilpotentes e localmente supersolúveis são propriedades de Frattini em PC-grupos. Os estudos feitos sobre essas particulares classes de grupos deixam claro que existe uma generalização do fato de que nilpotência e supersolubilidade são propriedades de Frattini em grupos finitos.

Em nossa referência [2], S. Franciosi e F. de Geovani mostram que as propriedades de ser finito, policíclico-por-finito, minimax, periódico, finito com posto livre de torção e seção abeliana de posto finito são propriedades de Frattini de PC-grupos com centros triviais. Desta maneira poderíamos investigar quais outras classes de grupos possuem propriedades de Frattini.

5. Referências Bibliográficas

[1] Pereira, Cleber; Propriedades de Frattini em PC-grupos; Dissertação de Mestrado; UFAM; Manaus-AM-Brasil(2014);

[2] S. Franciosi – F. de Giovanni – M. J. Tomkinson, *Frattini Properties of Goups with Polycyclic-by-Finite Conjugacy Classes*, boll. Um. Mat. Ital. B (7) 10-A (1996);

[3] D. J. S. Robinson, *A corse in the Theory of Groups*, Springer, New York, 1996;

[4] J. I. S. Ramos, *Supersolubilidade em Grupos Noetherianos*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, 1993;

[5] S. Franciosi – F. de Giovanni – M. J. Tomkinson, *Goups with Polycyclic-by-Finite Conjugacy Classes*, boll. Um. Mat. Ital. B (7) 4 (1990), 35-55;

[6] D. J. S. Robinson, *Na Introduction to Abstract Algebra* Walter de Gruyter, Berlin/New York, 2003.

Cleber Pereira
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Universidade Federal do Acre
cleberpereira@bol.com.br
(68) 9912-2703

Revista
ELEMENTOS

A Concisão das Palavras Centrais Inferiores: Uma Demonstração Alternativa

Sérgio Brazil Júnior
Universidade Federal do Acre

Resumo

Seja F um grupo livre sobre um conjunto infinito enumerável $\{x_1, x_2, \dots\}$. Seja $w = x_{i_1}{}^{l_1} \dots x_{i_k}{}^{l_k} \in F$ uma palavra em k variáveis. Uma palavra w pode ser vista como uma função de k variáveis definidas em qualquer grupo G. Seja G_w o conjunto constituído por todos os valores $w(g_1, \dots, g_k) = g_1{}^{l_1} \dots g_k{}^{l_k}$, onde $g_1, \dots, g_k \in G$ e $l_1, \dots, l_k$ e $k \in \mathbb{N}$. O subgrupo de G gerado por G_w é chamado o subgrupo verbal de G determinado pela palavra w e é anotado por $w(G)$. Uma palavra w é dita concisa, se a finitude de G_w implicar na finitude de $w(G)$. No trabalho de Turner- Smith [3] foi mostrado que muitas palavras relevantes são concisas, entre elas as palavras centrais inferiores, definidas pelas equações $\gamma_1(x) = x$ e $\gamma_{k+1} = [\gamma_k, \gamma_1]$. O objetivo do presente trabalho é apresentar uma outra forma de demonstrar esse resultado.

Abstract

Consider F a free group on countable infinite set $\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots\}$. Consider $\mathrm{w} = \mathrm{x}_{\mathrm{i}_1}{}^{\mathrm{l}_1} \dots \mathrm{x}_{\mathrm{i}_\mathrm{k}}{}^{\mathrm{l}_\mathrm{k}} \in \mathrm{F}$ a word in k variables. A word w may be seen as a function of k variables defined in any group G. Consider $\mathrm{G_w}$ the group consisting of all w values $\mathrm{w}(\mathrm{g}_1, \dots, \mathrm{g}_\mathrm{k}) = \mathrm{g}_1{}^{\mathrm{l}_1} \dots \mathrm{g}_\mathrm{k}{}^{\mathrm{l}_\mathrm{k}}$, where $\mathrm{g}_1, \dots, \mathrm{g}_\mathrm{k} \in \mathrm{G}$ and $\mathrm{l}_1, \dots, \mathrm{l}_\mathrm{k}$ e $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$. The G subgroup generated by $\mathrm{G_w}$ is called the G verbal subgroup, which is determined by word w and it is noted by $\mathrm{w(G)}$. A word w is said to be concise if the finiteness of $\mathrm{G_w}$ implies in the finitude of $\mathrm{w(G)}$. Turner-Smith's work has shown that many relevant words are concise, including the lower central ones, defined by $\gamma_1(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$ e $\gamma_{\mathrm{k}+1} = [\gamma_\mathrm{k}, \gamma_1]$ equations. This paper aims at presenting another way to demonstrate this result.

Palavras Chaves: Palavras Concisas, Palavras Centrais Inferiores, Subgrupo Verbal.

1. Introdução

Seja F um grupo livre sobre um conjunto infinito enumerável $\{x_1, x_2, \dots\}$. Seja $w = x_{i_1}{}^{l_1} \dots x_{i_k}{}^{l_k} \in F$ uma palavra em k variáveis. A palavra w pode ser vista como uma função de k variáveis definidas em qualquer grupo G. Sejam $g_1, \dots, g_k$ elementos de um grupo G, definimos o valor da palavra w em $(g_1, \dots, g_k)$, como sendo $w(g_1, \dots, g_k) = g_1{}^{l_1} \dots g_k{}^{l_k}$. Seja G_w o conjunto constituído por todos os valores $w(g_1, \dots, g_k)$, onde $g_1, \dots, g_k \in G$ e $l_1, \dots, l_k$, $k \in \mathbb{N}$. O subgrupo de G gerado por G_w é chamado o subgrupo verbal de G determinado pela palavra w e é anotado por $w(G)$. Por exemplo, se $w = [x_1, \dots, x_k]$, então $w(G) = \gamma_k(G)$.

A seguinte questão foi sugerida por *P. Hall*:

Se o conjunto G_w é finito, será que o subgrupo verbal $w(G)$ é também finito?

No trabalho de Turner- Smith [3] e P. Hall (sem publicação), foi mostrado que muitas palavras relevantes são concisas, entre elas as palavras centrais inferiores, definidas pelas equações $\gamma_1(x) = x$ e $\gamma_{k+1} = [\gamma_k, \gamma_1]$ e as palavras derivadas, definidas pelas equações $\delta_0(x) = x$ e $\delta_k = [\delta_{k-1}, \delta_{k-1}]$. Entretanto, em [1, página 439], *A. Yu. Ol'shanskii*, mostra que existem palavras que não satisfazem tal questão.

Definição 1: Diremos que uma palavra w é concisa se esta satisfizer o questionamento supra-citado feito por *P. Hall*, para todo grupo G.

A seguir mostraremos que as palavras centrais inferiores γ_k são concisas. Este resultado é devido a Turner- Smith [3] e P. Hall (sem publicação), porém daremos uma outra demonstração.

2. Alguns Lemas e o Teorema de Schur.

Antes de darmos a versão alternativa precisamos dos lemas a seguir, assim como um bem conhecido e importante resultado devido a *Schur*

Lema 1: Sejam G um grupo e $x, y \in G$. Se x e y comutam com $[x, y]$, então

$$[x, y]^r = [x^r, y] = [x, y^r],$$

para todo inteiro r.

Demonstração: Demonstraremos primeiro o caso em que r é um inteiro não-negativo usando indução sobre $r \geq 0$. Se $r = 0$, não temos nada a demonstrar. Suponha que o resultado seja verdade para algum $r > 0$. Assim,

$$[x, y]^{r+1} = [x, y]^r[x, y] = x^{-1}y^{-1}x[x, y]^r y = x^{-1}y^{-1}x[x, y^r]y = [x, y^{r+1}].$$

Agora por hipótese, $[x, y]y = y[x, y]$ e, daí, segue que $x^{-1}y^{-1}xy = yx^{-1}y^{-1}x$, isto é, $[x, y]^{-1} = [x, y^{-1}]$. Portanto, se $r > 0$, então $[x, y]^{-r} = [x, y^{-1}]^r = [x, y^{-r}]$, como queríamos demonstrar.■

Lema 2: Seja G um grupo nilpotente de classe $c \geq k$. Então, existe um subgrupo cíclico não trivial em $Z(G)$, onde todos os elementos são comutadores simples de peso k.

Demonstração: Usaremos indução sobre a classe de nilpotência c. Se $c = 1$, o resultado é óbvio. Suponha que tal resultado seja verdade para grupos cuja classe de nilpotência é menor que c. Considere $\bar{G} = G/Z(G)$. Temos que $\bar{G}$ tem classe de nilpotência $c - 1$. Assim, por indução, temos que existe $\bar{1} \neq \bar{b} \in Z(\bar{G}) \cap \bar{G}_{\gamma_{k-1}}$, tal que $\overline{b^i} \in \bar{G}_{\gamma_{k-1}}$, para todo inteiro i. Logo $b^i = b_i z_i$, onde $b_i \in G_{\gamma_{k-1}}$ e $z_i \in Z(G)$. Desde que $b \notin Z(G)$, existe $y \in G$, com $[b, y] \neq 1$. Logo, $a = [b, y] \in Z(G) \cap G_{\gamma_k}$ e, assim, pelo Lema 1,

$$a^i = [b, y]^i = \left[b^i, y\right] = [b_i z_i, y] = [b_i, y] \in G_{\gamma_k},$$

para todo inteiro i.■

Observamos que em geral $G_{\gamma_k} = \{[x_1, \dots, x_k];\ x_1, \dots, x_k \in G\}$ não é um subgrupo de G, uma vez que o produto de dois elementos de G_{γ_k} não necessariamente pertence a G_{γ_k}. Observamos, também, que $\gamma_k(G)$, o k- ésimo termo da série central descendente de G, é gerado por G_{γ_k}.

Nos resultados a seguir, a expressão "$\{k,m\}$*-limitado*" significa: limitado por uma função que depende somente dos parâmetros k e m.

A demonstração do seguinte teorema pode ser encontrada em [2]

Teorema 3 (Schur): Seja G um grupo. Se $G/Z(G)$ é finito de ordem n, então G' é finito de ordem $\{n\}$-limitada e $(G')^n = 1$.

3. Teorema principal

Abaixo segue a demonstração do resultado principal desse trabalho

Teorema 4: *Seja G um grupo tal que $|G_{\gamma_k}| = m$. Então $|\gamma_k(G)|$ é $\{k,m\}$-limitada.*

Demonstração: Sejam $g, x_1, \dots, x_k \in G$. Temos que $[x_1, \dots, x_k]^g = [x_1^g, \dots, x_k^g] \in G_{\gamma_k}$. Desde que $|G_{\gamma_k}| = m$, temos que $x = [x_1, \dots, x_k]$ possui no máximo m conjugados em G, Isto é, $|x^G| \leq m$, ou seja, $|G: C_G(x)| \leq m$. Como $\gamma_k(G)$ é m-gerado, segue $G/C_G(\gamma_k(G))$ é finito de ordem $\{k,m\}$ -limitada. Consequentemente, $\gamma_k(G)/Z(\gamma_k(G))$ é finito de ordem $\{k,m\}$-limitada. Assim pelo Teorema 3 (Schur), $\gamma_k(G)'$ é finito de ordem $\{k,m\}$-limitada. Trocando G pelo grupo quociente $G/\gamma_k(G)'$ podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\gamma_k(G)' = 1$, isto é que $\gamma_k(G)$ é abeliano. Sejam $a \in \gamma_k(G)$ e $x_1, \dots, x_{k-1} \in G$ arbitrários. É claro que $[a, x_1, \dots, x_{k-1}] \in G_{\gamma_k}$. Também, pelo Lema 1, $[a, x_1, \dots, x_{k-1}]^r = [a^r, x_1 \dots, x_{k-1}] \in G_{\gamma_k}$, para todo inteiro r. Logo, $\langle [a, x_1, \dots, x_{k-1}] \rangle \subseteq G_{\gamma_k}$. Dessa forma, o subgrupo

$$L = \langle [a, x_1, \dots, x_{k-1}];\ a \in \gamma_k(G)\ e\ x_1, \dots, x_{k-1} \in G \rangle$$

é finito de ordem $\{k,m\}$-limitada. Considere agora o grupo quociente G/L. É claro que G/L é nilpotente (de classe no máximo $2k-2$). Se a classe de nilpotência de G/L é menor que k, temos $\gamma_k(G/L) = \bar{1}$ e daí, $\gamma_k(G) \leq L$. Logo, $\gamma_k(G)$ é finito de ordem $\{k,m\}$-limitada. Do contrário, isto é, se a classe de nilpotência de G/L é maior ou igual que k, temos pelo Lema 2, que existe $\bar{1} \neq \overline{a_1} \in Z(G/L) \cap (G/L)_{\gamma_k}$ tal que $\langle \overline{a_1} \rangle \subseteq (G/L)_{\gamma_k}$ e, daí, $\langle \overline{a_1} \rangle$ é finito de ordem $\{k,m\}$-limitada. Assim, $L_1 = \langle a_1 \rangle L$ é finito de ordem $\{k,m\}$-limitada. Considere agora o grupo quociente G/L_1. Se a classe de nilpotência de G/L_1 é menor que k, temos $\gamma_k(G/L_1) = \bar{1}$ e, assim, $\gamma_k(G) \leq L_1$, daí $\gamma_k(G)$ é finito de ordem $\{k,m\}$-limitada. Se não, isto é, se a classe de nilpotência de G/L_1 é maior ou igual que k, temos pelo Lema 2, que existe $\overline{1} \neq \overline{a_2} \in Z(G/L_1) \cap (G/L_1)_{\gamma_k}$ tal que $\langle\overline{a_2}\rangle \subseteq (G/L_1)_{\gamma_k}$ e, daí, $\langle\overline{a_2}\rangle$ é finito de ordem $\{k,m\}$-limitada. Assim, $L_2 = \langle a_2\rangle\langle a_1\rangle L$ é finito de ordem $\{k,m\}$-limitada. Considere, então, o grupo quociente G/L_2. Se a classe de nilpotência de G/L_2 é menor que k, temos $\gamma_k(G)$ é finito de ordem $\{k,m\}$-limitada. Do contrário, pelo Lema 2, existe $\overline{1} \neq \overline{a_3} \in Z(G/L_2) \cap (G/L_2)_{\gamma_k}$ tal que $\langle\overline{a_3}\rangle \subseteq (G/L_2)_{\gamma_k}$, isto é, $\langle\overline{a_3}\rangle$ é finito de ordem $\{k,m\}$-limitada. Continuando dessa forma, uma vez que $\left|G_{\gamma_k}\right| = m$, existe um índice $j \leq m$, tal que $L_j = \langle a_j\rangle\langle a_{j-1}\rangle \dots \langle a_2\rangle\langle a_1\rangle L$ é finito de ordem $\{k,m\}$-limitada e a classe de nilpotência de G/L_j não pode ser maior do que k. Consequentemente, $\gamma_k(G) \leq L_j$ e, portanto, $\gamma_k(G)$ tem ordem $\{k,m\}$-limitada, como queríamos mostrar.■

4. Considerações Finais

Ressaltamos que o teorema principal desse trabalho, constante do parágrafo 3, foi publicado em 2006, no Journal of Group Theory (9), 127-137, sofrendo algumas alterações em sua demonstração. Os resultados apresentados no presente texto estão em sua forma original, isto é, na forma que foram concebidos quando da elaboração de [2].

5. Referências Bibliográficas

[1] A. Yu. Ol'shanskii, Geometry of Defining Relations in Groups , Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1991).

[2]Brazil, S. J., Grupos com Classes de Conjugação Verbal Limitadas, Tese de Doutorado, UnB, (2004).

[3] Turner- Smith, R. F., Finiteness Conditions for Verbal Subgroups, J. London Math. Soc. 41 (1966), 166-176.

Sérgio Brazil Júnior
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Universidade Federal do Acre
Rio Branco - Acre
sbrazil@ufac.br
(68)9984-1022

Revista
ELEMENTOS

FC - Grupos Finitamente Cobertos

Dedicado ao 80º aniversário de minha mãe

José Ivan da Silva Ramos
Universidade Federal do Acre

Resumo

Devido a Neumann, se um grupo G é finitamente coberto por classes laterais, determinadas por subgrupos $S_1, S_2, \ldots, S_n$; então podemos supor que cada um desses S_i é de índice finito em G; $\forall\ i = 1, 2, \cdots, n$. Consequentemente, Gé um $\mathfrak{FC}$ grupo se, e somente se, G é finitamente coberto por $\mathfrak{FC}$ subgrupos. Nós mostraremos que, se essa cobertura consiste de $\mathfrak{FC}$ (sub) grupos locais ou de $\mathfrak{FC}$ (sub) grupos finitamente gerados; então, respectivamente, G é um $\mathfrak{FC}$ grupo local ou Gé um $\mathfrak{FC}$ grupo finitamente gerado.

Abstract

Due to Neumann, a group G is finitely covered by cosets determined by subgroups $S_1, S_2, \ldots, S_n$; then we can assume that each S_i is of finite index in G, $\forall\ i = 1, 2, \cdots, n$. Consequently, G is an $\mathfrak{FC}$ group if and only if G is finitely covered by $\mathfrak{FC}$ subgroups. We show that if such coverage consists of $\mathfrak{FC}$ (sub) sites or $\mathfrak{FC}$ (sub) groups finitely generated groups, then, respectively, G is a local or $\mathfrak{FC}$ group G is a finitely generated $\mathfrak{FC}$ group.

Palavras – chave: Cobertura, índice, torção, grupo e subgrupos.

1. Introdução

Se x é um elemento de um grupo G; então x^G denota a classe dos conjugados de x em G. E o número $|x^G| = |G: C_G\ (x)\ |$ de conjugados de x em G é igual ao índice, em G, do centralizador de x em G.

O centro de um grupo G pode ser definido como sendo a interseção dos centralizadores de todos os seus elementos:

$$Z(G) = \bigcap_{x \in G} C_G(x)$$

Também é claro que $|G: C_G\ (x)\ | \leq |G: Z(G)\ |$; para qualquer elemento x em G. E, se o centro de G possui índice finito em G, então todo elemento x em G possui somente finitos conjugados e G é um $\mathfrak{FC}$ grupo.

Se $G = \langle g_1, g_2, \cdots g_n \rangle$ é finitamente gerado; então temos que

$$Z(G) = \bigcap_{i=1}^{n} C_G(g_i);$$

i. e.; um elemento é central em G se, e somente se, ele comuta com todo gerador do grupo G.

Se $G = \langle g_1, g_2, \cdots g_n \rangle$ é um $\mathfrak{FC}$ grupo; então cada índice $|G: C_G(g_i)|$ é finito. E, sendo $Z(G)$ a interseção de finitos subgrupos de índices finitos em G, vale que $Z(G)$ também tem índice finito em G.

Os $\mathfrak{FC}$ grupos foram inicialmente investigados por Reinhold Baer em [1]. Nesse trabalho o autor explora propriedades de finitude. Começa observando que: *todo grupo finito G possui as seguintes três propriedades*:

(FC) Todo elemento em G possui somente um número finito de conjugados.

(FL) Todo elemento em G está contido em um subgrupo normal finito de G.

(FO) Existe somente um número finito de elementos de uma dada ordem no grupo G.

Com relação à propriedade **(FC)**, estabelece o seguinte

Teorema (Baer, R.): Todo elemento em um grupo G possui somente um número finito de conjugados se, e somente se, valem:

i) todo elemento em G pertence a um subgrupo normal finitamente gerado de G.

ii) todo elemento em $\frac{G}{Z(G)}$ pertence a um subgrupo normal finito de $\frac{G}{Z(G)}$.

Em [2], Neumann faz uma descrição importante dos $\mathfrak{FC}$ grupos finitamente gerados. O principal resultado desse trabalho é o

Teorema (B. H. Neumann): Se G é um $\mathfrak{FC}$ grupo e $T(G)$ denota o conjunto dos elementos periódicos (ou de torção) de G; então vale que:

i) $T(G)$ é um subgrupo característico de G.

ii) $G' \leq T(G)$.

iii) $\frac{G}{T(G)}$ é abeliano e localmente finito.

iv) Se G é finitamente gerado, então $T(G)$ é finito.

Como consequência desse resultado prova ainda que: se $|G: Z(G)| < \infty$; então G' é um grupo finito. E se G' é finito; então G é um $\mathfrak{FC}$ grupo.

Uma coleção de subconjuntos de um grupo G é denominada uma *cobertura* de G se, e somente se, cada elemento de G pertence a algum subconjunto dessa coleção.

Em [3], Neumann estabelece que, se G é um $\mathfrak{FC}$ grupo; então Gé coberto por uma quantidade finita de $\mathfrak{FC}$ subgrupos. Os argumentos utilizados para obter esse resultado se baseiam no fato de que

Se um grupo G é finitamente coberto por uma coleção de classes laterais, então, excluindo dessa coleção as classes laterais determinadas por subgrupos de índices infinitos em G, obtemos ainda uma cobertura (finita) de G.

Como uma consequência desses resultados de B. H. Neumann, vamos estabelecer, sem muitas dificuldades, que:

Se G é um $\mathfrak{FC}$ grupo finitamente gerado; então Gé coberto por uma quantidade finita de $\mathfrak{FC}$ subgrupos finitamente gerados.

E que:

Se G é um $\mathfrak{FC}$ grupo local; então G é coberto por uma quantidade finita de $\mathfrak{FC}$ subgrupos locais.

2. Apresentação de resultados

Neste parágrafo vamos destacar o resultado de **Schreier** a respeito de subgrupos de índices finitos em grupos finitamente gerados. Como uma aplicação disso, explicamos que $Z(G)$, o centro de um $\mathfrak{F}C$ grupo G finitamente gerado, é também finitamente gerado.

O outro resultado que relacionamos aqui, de fundamental importância para as pequenas conclusões que faremos a respeito dos $\mathfrak{F}C$ grupos, é uma observação de B. H. Neumann que trata de coberturas de grupos.

2.1. Observação (Schreier): Seja G um grupo finitamente gerado e $H \leq G$ tal que $|G: H| < \infty$. Então, H é finitamente gerado.

Demonstração: Se $|G: H| = r$, r um inteiro, temos que $G = Ht_1 \dot{\cup} Ht_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} Ht_r$, com $t_1 = 1$, é a união disjunta de r classes laterais (à direita de H em G). Temos também $G = \langle X \rangle$; com $X \subseteq G$ e $|X| < \infty$.

Agora, consideremos o conjunto $T(X \cup X^{-1})\, T^{-1}$; onde $T = \{t_1, t_2, \dots, t_r\}$ é o conjunto dos representantes das classes laterais citadas acima. Esse conjunto é claramente finito.

Além disso, para todo a em $H \leq G$, sendo G finitamente gerado por X, existem um inteiro s e s elementos $x_1, x_2, \dots, x_s$ em $X \cup X^{-1}$, com $a = x_1 x_2 \dots x_s$.

Para todo $g \in G$ e todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $\exists\, h = h(i, g) \in H$ e $j = j(i, g)$ tais que $t_i g = h t_j$. Assim, $h = t_i g t_j^{-1} \in TgT^{-1}$ e como $G = \langle X \rangle$, g é um produto de elementos do conjunto $X \cup X^{-1}$ e por isso, vale que $h \in \langle T(X \cup X^{-1})T^{-1} \rangle$. Logo, para cada um dos $x_j{}'s$ acima vão existir $h_j{}'s$ em $T(X \cup X^{-1})T^{-1}$ e $t_{i_j}{}'s$ em T, de modo que $t_1 x_1 = h_1 t_{i_1}$ e $t_{i_j} x_{j+1} = h_{j+1} t_{i_{j+1}}$; com $j = 1, 2, \dots, s-1$. Portanto, podemos escrever a igualdade $a = t_1 a = t_1 x_1 x_2 \dots x_s = (t_1 x_1)\, x_2 \dots x_s = (h_1 t_{i_1}) x_2 \dots x_s = h_1 (t_{i_1} x_2) x_3 \dots x_s = h_1\, (h_2 t_{i_2}) x_3 \dots x_s = h_1 h_2 (t_{i_2} x_3)\, x_4 \dots x_s$. Em finitos passos teremos $a = h_1 h_2 \dots h_{s-1} h_s t_{i_s} \Leftrightarrow t_{i_s} = h_s^{-1} \dots h_2^{-1} h_1^{-1} a \in H$; já que os $h_j{}'s$ e a são elementos de H. Então $t_{i_s} \in H$ e assim $t_{i_s} = t_1 = 1$.

Consequentemente, $a = h_1 h_2 \ldots h_s$ pertence a $\langle T(X \cup X^{-1})T^{-1} \cap H\rangle$. Segue que $H \leq \langle T(X \cup X^{-1})T^{-1} \cap H\rangle$ e, obviamente, $\langle T(X \cup X^{-1})T^{-1} \cap H\rangle \leq H$. Portanto, vale que H é finitamente gerado pelo conjunto (finito) $T(X \cup X^{-1})\, T^{-1} \cap H)$. ■

2.2. Observação (B. H. Neumann): Seja G um grupo finitamente gerado. Então; G é um $\mathfrak{FC}$ grupo se, e somente se, o grupo $\frac{G}{Z(G)}$ é finito. Particularmente, $Z(G)$ é finitamente gerado (pela observação em 2.1 acima)

Demonstração: Se $G = \langle g_1, g_2, \cdots g_n\rangle$ é um $\mathfrak{FC}$ grupo finitamente gerado, as considerações feitas no início de nossa introdução mostram que o grupo $\frac{G}{Z(G)}$ é finito. Reciprocamente, $\forall\, x \in G$, vale que $Z(G) \leq C_G\,(x)$, consequentemente, $|G{:}\, C_G\,(x)\,| \leq |G{:}\, Z(G)\,|$ mostra que x possui somente finitos conjugados em G.■

2. 3. Observação (B. H. Neumann): Dado um grupo $G = \bigcup_{i=1}^{n} S_i g_i$; com $S_1, S_2, \cdots, S_n$ e $g_1, g_2, \cdots, g_n$, respectivamente, n subgrupos e n elementos de G (não necessariamente distintos), com$1 \leq n(\in \mathbb{N})$, podemos omitir dessa união qualquer classe $S_i g_i$ tal que $|G{:}\, S_i|$ é infinito; com $i = 1, 2, \cdots, n$ e ainda temos uma cobertura de G.

Demonstração: Em duas partes!

Parte 1: Primeiramente, provaremos que pelo menos um dos subgrupos S_i possui índice finito em G. Faremos isso por indução sobre o número m de subgrupos distintos, dentre os $S_i{}'$s, que cobre G.

Se $m = 1$, todos os subgrupos $S_1, S_2, \ldots$ e $S_n$coincidem; então G é a união de finitas classes laterais à direita de S_1 em G e, consequentemente, temos $|G{:}\, S_1| < \infty$.

Agora, seja$1 < m \in \mathbb{N}$, o maior número de subgrupos distintos dentre os $S_i{}'$spara o qual não temos qualquer um dos $S_i$com índice finito em G. Então, podemos supor, sem perda de generalidades, que os $S_i{}'$s são tais que $S_m = S_{m+1} = S_{m+2} = \cdots = S_n$ é distinto de cada um dos $S_1, S_2, \ldots, S_{m-1}$ e esses são dois a dois distintos entre si. Notemos que assim, temos m subgrupos distintos $S_1, S_2, \ldots, S_{m-1}$ e $S_m = S_{m+1} = S_{m+2} = \cdots = S_n$.

Se $G = \bigcup_{i=m}^{n} S_n g_i$, temos que $|G : S_n| < \infty$ e, nesse caso, também temos um subgrupo de índice finito em G. Se $\bigcup_{i=m}^{n} S_n g_i \subsetneq G, \exists\ x \in G \setminus \bigcup_{i=m}^{n} S_n g_i$ de modo que $S_n x \cap \left(\bigcup_{i=m}^{n} S_n g_i\right) = \emptyset$. Portanto, temos a inclusão $S_n x \subseteq \bigcup_{i=1}^{m-1} S_i g_i$. Isso nos mostra que para $m \leq j \leq n$, vale que $S_n g_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{m-1} S_i(g_i x^{-1} g_j)$. Então, podemos concluir que $G = \bigcup_{i=1}^{m-1} S_i(g_i x^{-1} g_j)$ e assim, G é coberto por $S_1, S_2, \dots, S_{m-1}$; ou seja G é coberto por $m-1 < m$ subgrupos distintos. Por indução, vemos que existe um índice t, com $0 < t \leq m-1$, tal que S_t é um subgrupo de índice finito em G.

Parte2: Agora, provaremos que os subgrupos de índice infinito podem ser largados: podemos supor que dentre os $S_i{}'$s temos, ordenadamente, $S_1, S_2, \dots, S_l$ de índices infinitos e $S_{l+1}, S_{l+2}, \dots, S_n$ de índices finitos em G, respectivamente. Pela Parte1, vale que $l < n$.

Pondo $\mathrm{I} = \bigcap_{i=l+1}^{n} S_i$, temos $|G: I| < \infty$. Daí, para cada j, com $l+1 \leq j \leq n$, temos $|S_j: I| = k < \infty$. Consequentemente, vale que $S_j = \bigcup_{t=1}^{k} I g_t$. Isso mostra que G é coberto pela união de classes laterais à direita de $S_1, S_2, \dots, S_l$ em G com classes laterais à direita de I em G.

Se as classes laterais à direita de I em G cobrem G, com mais forte razão as classes laterais à direita de $S_{l+1}, S_{l+2}, \dots, S_n$ cobrem G e podemos eliminar da cobertura, $S_1, S_2, \dots$ e S_l, todos de índice infinito em G.

Caso contrário, se as classes laterais à direita de I em Gnão cobrem G, podemos usar os mesmos argumentos que usamos na Parte1, trocando m por l. Assim, considerando o número de subgrupos distintos dentre $S_1, S_2, \dots$ e S_l, obteríamos que um deles tem índice finito em G. Uma contradição com a escolha desses subgrupos. ■

3. Grupos Cobertos por $\mathfrak{FC}$ subgrupos

O objetivo principal desse parágrafo é mostrar que, um grupo Gser finitamente coberto por determinada classe de $\mathfrak{FC}$ subgrupos, equivale a G pertencer à mesma classe dos subgrupos que o cobrem.

Essas pequenas observações foram inspiradas em um dos importantes resultados de B. H. Neumann que é dado na seguinte

3.1. Observação (B. H. Neumann): Seja G um grupo. Então, G é um $\mathfrak{FC}$ grupo se, e somente se, G possui uma cobertura finita consistindo de $\mathfrak{FC}$ subgrupos.
Demonstração: Em um sentido isso é claro.

Agora, suponhamos que $G = \bigcup_{t=1}^{n} H_i$; onde cada H_i é um $\mathfrak{F}C$ grupo. Podemos supor ainda, por 2.3, que o índice de cada H_i em G é finito.

Dado qualquer elemento g em G, vale que $g \in H_j$ para algum $j \epsilon \{1, 2, \ldots, n\}$; onde$\left|G : H_j\right| < \infty$. Também vale que $\left|H_j : C_{H_j}(g)\right| = \left|H_j : H_j \cap C_G\ (g)\right| < \infty$. Isso mostra que $C_{H_j}(g) \leq C_G\ (g)$ tem índice finito em G e, por isso, concluímos que G é um $\mathfrak{F}C$grupo. ■

Para obtermos um resultado análogo para um $\mathfrak{FC}$ grupo finitamente gerado, utilizaremos a seguinte

3.2. Observação: Seja G um grupo coberto por $1 \leq n(\in \mathbb{N})$ subgrupos $H_1, H_2, \cdots, H_n$. Então, vale que, G é um grupo central por finito se, e somente se, H_i é um (sub) grupo central por finito; $\forall\ i = 1, 2, \cdots, n$.
Demonstração: Podemos supor pela observação em 2.3 que o índice de cada H_i em G é finito. Sendo Z_i, o centro de cada H_i, vale, por hipótese, que $|H_i : Z_i| < \infty$; para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Então, $L = \bigcap_{i=1}^{n} Z_i$ é um subgrupo de índice finito em G. Como temos $L \leq Z(G)$, vale que G é um grupo central por finito. ■

3.3. Teorema: Seja G um grupo finitamente coberto por subgrupos $H_1, H_2, \cdots, H_n$. Então, vale que Gé um $\mathfrak{FC}$ grupo finitamente gerado se, e somente se, cada H_i é um $\mathfrak{FC}$ grupo finitamente gerado; $\forall\ i = 1, 2, \cdots, n$.

Demonstração: Pela observação em 2.3, podemos admitir que nessa cobertura, o índice de cada H_i em G é finito. Além disso, notemos que, se G é um grupo finitamente gerado, como cada H_i tem índice finito em G, vale, por 2.1, que cada H_i é finitamente gerado. Equivalentemente, se G é finitamente coberto pelos $H_i{}'$s e H_i é finitamente gerado para todo $i = 1, 2, \cdots, n$, então G é um grupo finitamente gerado. Nesse caso, temos, combinando as observações em 2.2 e 3.2 que G é um $\mathfrak{FC}$ grupo (finitamente gerado) se, e somente se, G é central por finito se, e somente se, H_i é central por finito se, e somente se, H_i um $\mathfrak{FC}$ grupo (finitamente gerado) para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.

3.4. Teorema: Seja G um grupo finitamente coberto por subgrupos $H_1, H_2, \cdots, H_n$. Então, vale que G é um $\mathfrak{FC}$ grupo local se, e somente se, cada H_i é um $\mathfrak{FC}$ grupo local; $\forall\ i = 1, 2, \cdots, n$.

Demonstração: Consideremos que cada H_i é um $\mathfrak{FC}$ grupo local. Se Fé um subgrupo finitamente gerado de G, os (finitos) subgrupos $F \cap H_1, F \cap H_2, \ldots, F \cap H_n$ formam uma cobertura (finita) para F. Além disso, como cada H_i tem índice finito em G, cada $F \cap H_i$ tem índice finito em F. Então, por 2.1, cada $F \cap H_i$ é um subgrupo finitamente gerado de H_i. Portanto, cada $F \cap H_i$ é um $\mathfrak{F}C$ grupo; $\forall\ i = 1, 2, \cdots, n$. Por 3.1, F é um $\mathfrak{F}C$ grupo e G é um $\mathfrak{FC}$ grupo local. ■

4. Considerações finais

A observação em 2.3, que nos diz que se um grupo G é finitamente coberto por subgrupos, esses subgrupos podem ser considerados de índices finitos, é decisiva para a obtenção desses pequenos resultados no nosso parágrafo 3.

Nessa mesma linha, e de imediata conclusão, temos que: "G é um $\mathfrak{FC}$ grupo de torção se, e somente se, cada H_i é um $\mathfrak{FC}$ grupo de torção; $\forall\ i = 1, 2, \cdots, n$".

Observado que se existir um subgrupo $1 \neq H$ em um grupo G, com $|G: H| < \infty$, vale que, G localmente finito se, e somente se, cada H é localmente finito, também é imediato que: "G é um $\mathfrak{FC}$ grupo localmente finito se, e somente se, cada H_i é um $\mathfrak{FC}$ grupo localmente finito; $\forall\, i = 1, 2, \cdots, n$".

5. Bibliografia

[1] Baer, R.; *Finiteness properties of groups*; Duke Math. J. **15**; 1021-1032 (1948);

[2] Neumann, B. H.; *Groups with finite classes of conjugate elements*; Proc. London Math. Soc. **3**(1); 178-187 (1951);

[3] Neumann, B. H.; G*roups covered by finitely many cosets*; Publ. Math. Debrecen **3**; 227-242 (1954);

[4] Ramos, J. Ivan. S.; *Subgrupos preservadores de propriedades de grupos*; Tese de doutorado; Universidade de Brasília; Brasília-DF-Brasil (2003);

[5] Ramos, J. Ivan. S. and Maier, R.; *Property Preserving Subgroups of a Group*; JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications **6**(2) 237-264; Pushpa Publishing House–India (2006);

[5] Robinson, D. J. S.; *A course in the theory of groups*; Springer Verlag; New York-Berlim-Heidelberg (1996);

[6] Robinson, D. J. S.; *Finiteness conditions and generalized soluble groups*; Part 1; Springer Verlag; New York-Berlim-Heidelberg (1972);

José Ivan da Silva Ramos

Rua Maranhão I, nº 133 – Bairro Bosque – Rio Branco – Acre.

CEP: 69900-484

ivanr@ufac.br

Tels.: 0xx68-3901-2536 e 0xx68-84067712.

Nota Histórica

Carl Friedrich Gauss

∗ 30 de abril de 1777, em Braunschweig, Alemanha-Eleitorado da Saxônia

† 23 de fevereiro de 1855, em Göttingen, Alemanha-Reino de Hanôver

Johann Carl Friedrich Gauss

Alguns o referem como *princeps mathematicorum* (em latim, "o príncipe da matemática" ou "o mais notável dos matemáticos") e um "grande matemático desde a antiguidade", Gauss tinha uma marca influente em muitas áreas da matemática e da ciência e é um dos mais influentes na história da matemática. Ele refere-se à matemática como "a rainha das ciências".

Filho de pais humildes, seu pai, Gerhard Diederich, era jardineiro e pedreiro, sua mãe Dorothea Benze era analfabeta, não tendo registrado a data de nascimento de Gauss.

Aos sete anos entrou para a escola. Segundo uma história famosa, seu diretor, Butner, pediu que os alunos somassem os números inteiros de um a cem, mal havia enunciado o problema e o jovem Gauss colocou sua lousa sobre a mesa, dizendo:*ligget se*! Sua resposta, 5050, foi encontrada através do raciocínio que demonstra a fórmula da soma de uma progressão aritmética. Butner reconheceu a genialidade do menino de dez anos, passou a incentivá-lo nos seus estudos, junto com seu jovem assistente, Johann Martin Bartels (1769-1856), apaixonado pela matemática. Entre Bartels, com dezessete anos, e o aluno de dez nasceu uma boa amizade que durou toda a vida.

Em novembro de 1804 casou com Johanna Elisabeth Rosina Osthoff (nascida em 8 de maio de 1780) e que faleceu alguns anos depois, em 11 de outubro de 1809. Do primeiro casamento teve três filhos: Joseph, Wilhelmine e Louis. Depois casou com Friederica Wilhelmine Waldeck, com quem teve mais três filhos: Eugen, Wilhelm e Therese.

Aos doze anos Gauss já olhava com desconfiança para os fundamentos da geometria euclidiana; aos dezesseis já tinha tido seu primeiro vislumbre de uma geometria diferente da de Euclides. Um ano mais tarde, começou uma busca crítica das provas, na teoria dos números, que tinham sido aceitas por seus antecessores e tomou a decisão de preencher os vazios e completar o que tinha sido feito pela metade. Aritmética, o campo de seus primeiros triunfos, tornou-se seu estudo favorito e o campo de sua obra prima. Para que a prova fosse absolutamente certa, Gauss acrescentou uma fecunda e engenhosa matemática que nunca foi superada.
Bartels apresentou-o a alguns influentes homens em Brunswick que, impressionados, levaram-no para que Carl Wilhelm Ferdinand, Duque de Brunswick, o conhecesse. O Duque de Brunswick imediatamente assegurou que sua educação no Collegium Carolinum continuaria até ser completada. Nos três anos em que ali esteve dominou os mais importantes trabalhos de Leonhard Euler, Lagrange e, acima de tudo, o Princípia de Newton. Por seus estudos redescobriu, e foi o primeiro a provar, "a jóia da aritmética," o "theorema aureum" e "teorema de ouro", conhecido como a lei da reciprocidade quadrática, que Euler tinha induzido e Legendre tentara provar, sem qualquer resultado.

Com a idade de quinze anos fez um grande avanço em línguas clássicas estudando sozinho e com a ajuda de amigos mais velhos. Teve a oposição de seu pai mas Dorothea Gauss venceu a resistência do marido e o Duque patrocinou dois anos de curso no Gymnasium. Ali ele assombrou a todos por sua maestria nos clássicos.

Tinha inventado (aos dezoito anos) o método dos mínimos quadrados, que hoje é indispensável em pesquisas geodésicas, e em todos os trabalhos em que o "mais provável" valor, de alguma coisa que é medida, é deduzido após um grande número de medidas. Gauss dividiu o mérito com Legendre, que publicou o método independentemente em 1806. Este trabalho foi o começo do interesse de Gauss na teoria dos erros de observação. A lei de Gauss da distribuição normal de erros e sua curva em formato de sino, que a acompanha, é hoje familiar para todos que trabalham com estatística.

A decisão sobre o seu verdadeiro caminho, se o da filologia ou da matemática, foi feita em 30 de Março de 1796, quando começou seu diário científico, que representa um dos mais preciosos documentos da história da matemática. O estudo de línguas passou a ser um passatempo para o resto de sua vida. O diário só foi conhecido pela ciência em 1898, quarenta e três anos depois de sua morte, quando a Sociedade Real de Göttingen o pediu emprestado a um neto de Gauss para estudo crítico. Ali se encontram dezenove pequenas páginas e contém 146 extremamente resumidos registros de descobertas ou resultados de cálculos, o último deles datado de 9 de Julho de 1814.

Nem todas as descobertas de Gauss no período prolífico de 1796 a 1814 foram anotadas, mas muitas das que ele rascunhou são suficientes para estabelecer a prioridade de Gauss em vários campos (funções elípticas, por exemplo) onde alguns de seus contemporâneos se recusaram a acreditar que ele os havia precedido.

Muito ficou encerrado por anos ou décadas nesse diário. Gauss nunca reivindicou a autoria de descobertas a que ele se antecipara (algumas se tornaram importantes campos da matemática no século XIX). No diário, há anotações muito pessoais, como por exemplo, no dia 10 de Julho de 1798 há o seguinte registro: ΕΥΡΗΚΑ! $N = \Delta + \Delta + \Delta$". Traduzindo-se: Eureka! Todo número positivo é a soma de três números triangulares.

Embora o sentido de alguns registros esteja perdido para sempre, a maior parte é suficientemente clara. Alguns nunca foram publicados, segundo ele, por considerar seus trabalhos científicos apenas como resultado da profunda compulsão de sua natureza. Publicá-los para o conhecimento de outros lhe era inteiramente indiferente. Disse também que um tal volume de novas idéias trovejaram em sua mente, antes de ter completado vinte anos que, dificilmente, poderia controlá-las, só havendo tempo de registrar uma pequena fração delas.

Gauss apresentava provas sintéticas e conclusões indestrutíveis de suas descobertas às quais nada poderia ser acrescentado ou retirado. *Uma catedral não é uma catedral* - disse - *até que o último andaime tenha sido retirado*. Com este ideal diante de si, Gauss preferia polir sua obra muitas vezes, ao invés de publicar um grosseiro esboço. Seu princípio era: uma árvore com poucos frutos maduros (*Pauca sed matura*).

Os frutos deste esforço em busca da perfeição estavam, na verdade, maduros mas nem sempre facilmente digeríveis. Todos os passos pelos quais o gol tinha sido atingido tinham sido omitidos, não era fácil para seus seguidores redescobrir a estrada pela qual ele tinha caminhado. Consequentemente, alguns de seus trabalhos tiveram que esperar por intérpretes altamente qualificados antes que o mundo da matemática pudesse entendê-los.

Só os matemáticos do século XIX conscientizaram quanto Gauss tinha previsto antes de 1800. Caso ele tivesse divulgado o que sabia, é possível que a matemática estivesse meio século mais adiantada do que se encontra. Niels Henrik Abel e Jacobi poderiam ter começado de onde Gauss terminou, ao invés de terem que redescobrir o que Gauss já sabia antes que eles tivessem nascido.

Os três anos (outubro de 1795 - setembro de 1798) na Universidade de Göttingen foram os mais prolíficos da vida de Gauss. Graças à generosidade do Duque Ferdinand, o jovem não teve que se preocupar com finanças.

Em setembro de 1798 foi para a Universidade de Helmstedt, tendo sido precedido por sua fama, hospedou-se na casa do professor de matemática Johann Friedrick Pfaff(1765-1825).

No outono europeu de 1798, aos 21 anos, finalizou a Disquisitiones. O livro só foi publicado em setembro de 1801. Em agradecimento por tudo que Ferdinand lhe havia feito, Gauss dedicou seu livro ao Duque - *Sereníssimo Pricipi ac Domino Carolo Guiliermo Ferdinando*. Foi uma justa homenagem àquele que o salvara tantas vezes (arranjando alunos, pagando pela impressão de sua tese de doutorado

(Universidade de Helmstedt, 1799), assegurou uma modesta pensão que lhe permitiria continuar seu trabalho científico livre dos obstáculos da pobreza ...)

Gauss escreveu em sua dedicatória: "Sua bondade libertou-me de outras responsabilidades e permitiu que eu me dedicasse exclusivamente a este trabalho." Disquisitiones representou seu adeus à matemática pura, como seu interesse exclusivo. O livro é de difícil leitura, até mesmo para especialistas, mas os tesouros que contém estão agora disponíveis graças ao trabalho do amigo e discípulo de Gauss, Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1804-1859).

Expandiu sua atividade para incluir os aspectos matemáticos e práticos na astronomia, geodésica e eletromagnetismo.

O segundo grande estágio da carreira de Gauss começou no primeiro dia do século XIX, também um grande marco na história da filosofia e astronomia, quando Giuseppe Piazzi (1746-1826) de Palermo, no dia da abertura do século XIX, reconheceu o que tinha sido inicialmente tomado por um pequeno cometa aproximando-se do Sol, como um novo planeta - mais tarde denominado Ceres, o primeiro do fervilhante número de menores planetas hoje conhecidos. A descoberta deste novo planeta originou um sarcástico ataque aos astrônomos que presumiam a existência de um oitavo planeta. Disse Hegel: "Poderiam eles dar alguma atenção à filosofia? Se o fizessem reconheceriam imediatamente que só podem existir sete planetas, nem mais nem menos. Sua busca portanto é uma estúpida perda de tempo".

Gauss desprezava os filósofos que se ocupavam de assuntos científicos, por eles não compreendidos. E levou a sério a existência de Ceres.

Seus amigos e seu pai estavam impacientes para que o jovem Gauss encontrasse algum trabalho lucrativo, agora que o Duque já dera por terminada sua ajuda.

Este novo planeta descoberto encontrava-se numa posição que tornava extremamente difícil sua observação. Calcular sua órbita com tão escassos detalhes disponíveis poderia ser quase impossível. Mas para o jovem cuja memória inumana o capacitava a dispensar uma tábua de logaritmos quando ele estava apressado, toda essa aritmética infinda - logística, não aritmética - não assustava. Era, ao contrário, um desafio tentador, que lhe daria fama e dinheiro.

Após vinte anos de trabalho Ceres foi redescoberta, precisamente onde os engenhosos e detalhados cálculos de Gauss tinham predito que ela seria encontrada. 2 Palas, Vestae Juno, planetas insignificantes da diminuta Ceres foram rapidamente pegos pelos telescópios. Cálculos que haviam tomado três dias de trabalho a Leonhard Euler (tendo sido dito que um deles o teria levado a cegueira) eram agora simples exercícios de algumas laboriosas horas. Gauss prescreveu o método e a rotina.

Em 1809 ele publicou sua segunda obra prima "Teoria do Movimento dos Corpos Celestiais Girando a Volta do Sol", na qual se encontra uma exaustiva explanação da determinação das órbitas dos planetas e cometas.

Gauss não estava isento de inimigos. Foi ridicularizado por aqueles que consideravam um desperdício de tempo computar a órbita de um planeta insignificante. Trinta anos depois, quando Gauss assentou os fundamentos da teoria matemática do eletromagnetismo e inventou o telégrafo elétrico foi, mais uma vez, ridicularizado.

O Duque de Bruswick aumentou a pensão possibilitando seu casamento em outubro de 1805, com a idade de vinte e seis anos com Johanne Osthof de Brunswick, transformando sua vida, como ele próprio disse a um amigo, numa eterna primavera com novas e brilhantes cores.

A morte do Duque de Brunswick obrigou-o a encontrar alguma forma de sobrevivência para sustentar sua família. Não foi difícil. Em 1807 ele foi designado diretor do Observatório de Göttingen com o privilégio - e dever, quando necessário - de ensinar matemática aos alunos.

O salário era modesto mas suficiente para suas necessidades e de sua família. O luxo nunca o atraiu e sua vida não se modificara nos últimos vinte anos, tendo assim permanecido até a sua morte: em seu estúdio uma pequena mesa com cobertura verde, uma mesa alta pintada de branco, um sofá estreito e, depois do seu septuagésimo aniversário, uma cadeira de braços com uma capa de veludo. Isto era tudo de que ele precisava.

A péssima situação da Alemanha sob a pilhagem dos franceses e a perda de sua primeira mulher arruinaram a saúde de Gauss. Sua predisposição para hipocondria, agravada pelo trabalho incessante, piorou seu estado. Sua infelicidade nunca foi dividida com seus amigos. Para seu diário matemático ele confidenciou: "a morte seria mais querida do que tal vida".

Então, quase exatamente após seu segundo casamento, o grande cometa de 1811, o primeiro observado por Gauss, no crepúsculo do dia 22 de Agosto, brilhou sem se fazer anunciar. Foi a oportunidade de testar os instrumentos que Gauss tinha inventado para dominar os planetas menores.

Seus instrumentos provaram ser adequados. Enquanto isso, o povo supersticioso da Europa, com olhos apavorados, seguia o espetáculo em que o cometa arrastava sua cimitarra de fogo na sua aproximação do Sol, vendo na brilhante lâmina um aviso do céu de que o Rei dos Reis estava irado com Napoleão e cansado da crueldade do tirano. Gauss teve a satisfação de ver o cometa seguir a rota por ele calculada até o último centímetro. Por seu lado, o crédulo povo viu comprovada sua predição, quando o Grande Exército de Napoleão Bonaparte foi destruído nas planícies geladas da Rússia. Este foi um dos raros momentos em que a explicação popular cabe nos fatos dos quais resultam conseqüências mais importantes do que a científica.

Gauss obteve avanços significativos em geometria e na aplicação da matemática para a teoria newtoniana da atração e eletromagnetismo. Como foi possível a um único homem realizar tão colossal massa de trabalho da mais alta categoria? Com sua modéstia característica, Gauss declarou que "se outros tivessem pensado nas verdades matemáticas tão profunda e continuamente quanto eu, eles poderiam, ter feito minhas descobertas".

Ele disse que durante quatro anos, raramente se passava uma semana sem que ele não despendesse algum tempo para fazer alguma descoberta. A solução finalmente vinha por si mesma como um relâmpago. Não se pode imaginar, entretanto que a resposta tivesse surgido por si mesma como uma nova estrela, sem as horas despendidas em sua busca. Algumas vezes, depois de passar dias ou semanas sem qualquer resultado em alguma pesquisa, depois de uma noite de insônia, o resultado surgia inteiro, brilhando em sua mente. A inteligência para intensa e prolongada concentração era parte do seu segredo.

A geodésia deve a Gauss a invenção do heliótropo, um engenhoso aparelho pelo qual podem ser transmitidos sinais praticamente instantâneos através da luz refletida. Os instrumentos astronômicos também tiveram notável avanço através de suas mãos. E, como último exemplo da engenhosidade de Gauss, em 1833 ele inventou o telégrafo elétrico, que ele e seu companheiro de trabalho Wilhelm Eduard Weber (1804-1891) usavam para trocar mensagens.

Dava pouca importância ao uso prático de suas invenções. Gauss nunca foi atraído pelo reconhecimento público oficial, embora sua competência em estatística, seguro e aritmética política pudessem ter feito dele um bom ministro de finanças.

Na física, a lei de Gauss é a lei que estabelece a relação entre o fluxo elétrico que passa através de uma superfície fechada e a quantidade de carga elétrica que existe dentro do volume limitado por esta superfície. A lei de Gauss é uma das quatro equações de Maxwell e foi elaborada por Carl Friedrich Gauss no século XIX.

Em 1840, publicou seu influente *Dioptrische Untersuchungen*, no qual fez a primeira análise sistemática da formação de imagens sob a aproximação paraxial.

Até sua última doença ele encontrou completa satisfação na ciência como simples recreação. Tinha também grande interesse na literatura europeia que lia nos originais, pois dominava muitas línguas. O estudo de línguas estrangeiras e novas ciências (inclusive botânica e mineralogia) era seu passatempo. Com a idade de sessenta e dois anos ele começou um intensivo estudo de russo, sem a orientação de ninguém. Em dois anos ele estava mantendo correspondência com amigos cientistas de São Petersburgo inteiramente em russo. Na opinião dos russos que o visitavam em Göttingen, ele também falava perfeitamente. Ele também tentou o sânscrito mas não gostou.

Atraía-o especialmente a literatura inglesa, embora seu aspecto mais sóbrio nas tragédias de William Shakespeare fosse demais para a aguda sensitividade do grande matemático para todas as formas de sofrimento. Ele buscava livros mais felizes. Os livros de Sir Walter Scott (seu contemporâneo) eram devorados tão logo publicados. Uma grande gargalhada do astrônomo matemático saudou o escorregão de Sir Walter quando escreveu "a lua cheia levanta-se a noroeste" ´e ele levou dias corrigindo todas as cópias que encontrava.

Seu terceiro hobby, política mundial, tomava-lhe uma ou duas horas por dia. Visitando o museu literário regularmente, ele se mantinha informado de todos os eventos lendo os jornais que o museu assinava.

A maior fonte da força de Gauss era sua serenidade científica, livre de ambição pessoal. Todo o seu interesse estava voltado para o avanço da matemática. Rivais duvidavam de sua declaração de que os tinha antecipado na descoberta que faziam. Não dizia isso com jactância, mas como um fato e não se preocupava em comprovar a prioridade através da apresentação de seu diário. Apenas declarava, apoiando-se em seus próprios méritos.

Seus últimos anos foram cheios de honrarias, mas não da felicidade que ele teria merecido. Pela primeira vez em mais de vinte anos ele deixou Göttingen, no dia 16 de Junho de 1854, para ver a estrada de ferro que estava sendo construída entre sua cidade e Kassel. Gauss sempre tivera agudo interesse pela construção e operação de estradas de ferro; agora ele veria uma sendo construída.

No caminho, os cavalos dispararam; ele foi atirado para fora da carruagem. Não ficou ferido mas muito chocado. Recuperando-se, ainda teve o prazer de assistir à abertura das cerimônias quando a estrada de ferro chegou a Göttingen em 31 de Julho de 1854.

No começo do ano seguinte surgiram os sintomas de gota. Inteiramente consciente, praticamente até ao fim, morreu pacificamente na manhã de 23 de Fevereiro de 1855. Foi sepultado no Albani-Friedhof, Göttingen, Alemanha.

Referências:

– BÜHLER, Walter Kaufmann. *Gauss: a biographical study*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1987. 144–145 pp. ISBN 0387106626.

– Carl Friedrich Gauss em Mathematics Genealogy Project

– Dunnington, G. Waldo. (May, 1927). "The Sesquicentennial of the Birth of Gauss". *Scientific Monthly* XXIV: 402–414. Retrieved on 29 June 2005. Comprehensive biographical article.

– *Mathematisches Tagebuch 1796–1814*, Ostwaldts Klassiker, Harri Deutsch Verlag 2005, mit Anmerkungen von Neumamn, ISBN 978-3-8171-3402-1 (es gibt auch engl. Übers. mit Anmerkungen von Jeremy Gray, Expositiones Math. 1984).

– SIMMONS, J.; *The Giant Book of Scientists: The 100 Greatest Minds of All Time*. Sydney: The Book Company, 1996.

– TENT, Margaret. *The Prince of Mathematics: Carl Friedrich Gauss*. [S.l.]: A K Peters, 2006. ISBN 1568814550.

– *Untersuchungen über Gegenstände der Höheren Geodäsie. Zweite Abhandlung*, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. Dritter Band, pp. 3-44; (1846/47).

– Waltershausen, Wolfgang Sartorius von (1856, repr. 1965). Gauss zum Gedächtniss. Sändig Reprint Verlag H. R. Wohlwend. ISBN 3-253-01702-8. ISSN B0000BN5SQ ASIN: B0000BN5SQ.

– ZEIDLER, Eberhard. *Oxford User's Guide to Mathematics*. Oxford, UK: Oxford University Press, 2004; p. 1188. ISBN 0198507631.

Revista
ELEMENTOS

O Consolo de um Matemático

Sérgio Brazil Júnior
Universidade Federal do Acre

Fiz mestrado em Matemática na Universidade de Brasília, no período de agosto de 1995 a dezembro de 1997, ocasião em que conheci e fiz uma boa amizade com dois paraibanos sensacionais, tanto do ponto de vista pessoal como profissional. Eram duas pessoas muito dedicadas à matemática, uns gênios por assim dizer. Por motivos éticos e para preservá-los os chamarei de José e João. Ambos eram muito engraçados e divertidos, José bem mais extrovertido que João.

Determinada ocasião, João se apaixonou platonicamente por uma jovem chamada Maria a qual tinha lhe procurado para sanar algumas dúvidas em matemática. A moça era muito bonita e João adorava ensiná-la. O tempo foi passando e João ficando cada vez mais apaixonado.

Quando João estava tomando coragem para se declarar para Maria, veio à infeliz surpresa, ele viu Maria aos beijos e abraços com seu namorado. Meu Deus! Aquilo foi o fim do mundo para João. Foi um choque inesperado, um desastre amoroso em sua vida.

João, como era de se esperar, ficou muito triste e decepcionado. O amigo José ao percebê-lo triste perguntou-lhe:

__ O que está acontecendo meu amigo? Estou lhe achando tão para baixo!

Ao que ele responde:

__ José meu amigo, são coisas do coração. Acreditas que vi Maria aos beijos com um rapaz. Não tenho ânimo nem para estudar.

Com isso José fica preocupado e para tentar consolar o amigo rebate:

__ Meu caro João, não ligue para isso. Maria não sabe o que quer, vai ver esse rapaz “nem sabe resolver uma integral (1)”.

(1) Integral é um conceito sofisticado em matemática.

PROFMAT

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA-PROFMAT

O PROFMAT é um programa de pós-graduação gratuito, reconhecido pelo MEC/CAPES e que conduz ao grau de Mestre. As vagas são para professores de escola pública e pessoas da comunidade em geral. Este ano a rede do PROFMAT foi ampliada, oferecendo cerca de 1.500 vagas distribuídas por mais de 65 pólos em todos os Estados e no Distrito Federal do Brasil.

Informações a respeito desse mestrado podem ser obtidas no seguinte endereço eletrônico: www.profmat-sbm.org.br/.

impa

Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio - PAPMEM

UFAC

Este programa visa oferecer treinamento gratuito para professores de Matemática do Ensino Médio de todo o país. É realizado, sob diversas formas, desde 1990, abordando assuntos relativos às três séries do Ensino Médio. Atualmente, este programa tem recebido apoio para sua realização da CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

A Universidade Federal do Acre aderiu a este programa em 2012, tendo sido realizada duas edições. Em 2013, haverá mais um encontro entre os dias 21 e 25 de janeiro, na UFAC.

toujours le même nombre de permutations.

Mais il est curieux de savoir si le degré peut s'abaisser.

Et d'abord il ne peut s'abaisser plus bas que p, puisqu'une équation de degré moindre que p, ne peut avoir p pour facteur dans le nombre des permutations de son groupe.

Voyons donc si l'équation de degré $p+1$ dont les racines x_k s'indiquent en donnant à k toutes les valeurs y compris l'infini et dont le groupe a pour substitutions

$$x_k \qquad x_{\frac{ak+b}{ck+d}} \qquad ad-bc \text{ étant un carré}$$

peut s'abaisser au degré p.

Or il faut pour cela que le groupe se décompose (improprement, s'entend) en p groupes de $(p+1)\frac{p-1}{2}$ permutations chacun.

Soient 0 et ∞ deux lettres conjointes dans l'un de ces groupes. Les substitutions qui ne font pas changer 0 et ∞ de place seront de la forme

$$x_k \qquad x_{m^2k}$$

Donc si M est la lettre conjointe de 1 la lettre conjointe de m^2 sera m^2M. Quand M est un carré on aura donc $M^2=1$. Mais cette simplification ne peut avoir lieu que pour $p=5$.

Pour $p=7$ on trouve un groupe de $(p+1)\frac{p-1}{2}$ permutations où ∞ 1 2 4 ont respectivement pour lettres conjointes 0 3 6 5.

Ce groupe a ses substitutions de la forme

$$x_k \qquad x_{a\frac{k-b}{k-c}}$$

b étant la lettre conjointe de c et a une lettre qui est à la fois résidu ou non résidu en même temps que c.

Pour $p=11$ les mêmes substitutions auront lieu avec les mêmes notations,

∞ 1 3 4 5 9 ayant respectivement

pour conjointes 0 2 6 8 10 7

Ainsi, pour les cas de $p=5, 7, 11$, l'équation modulaire s'abaisse au degré p.

En toute rigueur, cette réduction n'est pas possible dans les cas plus élevés.