Revista
ELEMENTOS

Uma Certa Equação Irracional

Dedicado para Emanuel e Demetrius

José Ivan da Silva Ramos
Universidade Federal do Acre

Resumo

Esta é uma pequena narrativa de um episódio que envolveu a busca da solução da equação irracional $\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x}{2}}=\frac{x^2}{8}+\sqrt[3]{\frac{4}{x^2}}$, sugerida como exercício por um professor do Ensino básico de Matemática em formação.

Abstract

This is a short narrative of an episode that involved the search of the solution of the irrational equation $\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x}{2}}=\frac{x^2}{8}+\sqrt[3]{\frac{4}{x^2}}$, suggested as an exercise by a teacher from school basic training in mathematics.

Palavras Chaves: Equações irracionais, raízes e método de solução.

Introdução: Justificativa e Objetivos

Esta narrativa envolve os conteúdos de Matemática do 8º ano do ensino fundamental, antes chamado de 7ª série ginasial do Ensino de 1º grau. Essencialmente, chamamos a atenção para as discussões que devem ser feitas à respeito das equações irracionais, aquelas em que a variável aparece sob o sinal de um radical. O episódio que iremos narrar começou no ano de 1986. Nessa época, somente um dos autores deste texto havia ingressado no Ensino Superior, fazendo parte de uma das turmas de alunos do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Acre. Porém, o "inocente" problema que motivou este trabalho não fora assim percebido por pessoas "experientes" no ensino de Matemática, tidas como referência em nossa comunidade, em Rio Branco, no Estado do Acre. Este é um texto que, podemos dizer, representa um "relato de falta de experiência".

Por se tratar da história de um problema de Matemática básica que começa numa Escola pública de ensino básico e que, depois de ser levado para o ambiente da nossa Universidade, passar pelas mãos de um professor doutor da Universidade de Brasília, terminou compondo um trabalho acadêmico de um aluno de Matemática da UFAC, ela aconteceu paralelamente à formação do agora experiente professor de Matemática. Sendo assim, entendemos que o conhecimento desses fatos pode contribuir para as discussões a cerca do Ensino de Matemática nas séries iniciais.

Esperamos com essas informações também chamar a atenção do leitor para uma reflexão sobre procedimentos e metodologias que devem ser usados pelo professor de Matemática. Principalmente, quando da sua atuação frente a uma sala de aula onde os alunos têm pouca experiência.

É provável que a narrativa em questão, se constitua num alerta para o fato de que os objetos de estudo da Matemática, em geral, estão relacionados com conceitos mais profundos e que não devem ser abordados isoladamente como se fossem "pacotes" de conhecimento.

Fundamentos Teóricos - Metodológicos

A formalização de um dado conceito obtida por exaustão pode significar um tipo de metodologia de ensino. Para algumas Ciências, resultados significativos podem ser obtidos por empirismo. Para a Matemática, dados empíricos podem significar o estabelecimento de um resultado, antes de darmos a ele a formalização e o rigor exigido nos estudos desenvolvidos dentro das áreas dessa ciência. Mas, no geral, esses dados não passam de ilustrações que permitem compreender sistemas ou proposições matemáticos.

Muitas vezes uma definição matemática pode acabar criando alguns "conflitos". Então, se ela tem algum valor é preciso entender as relações que surgem com os demais conceitos acumulados ao longo do tempo, sob pena de adotarmos, por eleição, uma ou outra relação matemática. Uma forma casuística que não convém e que não deve ser aceita. Por exemplo, o "*teorema do núcleo e da imagem*" que permite avaliar se certos espaços vetoriais são ou não isomorfos, não deve ser mencionado sem que antes entendamos que $\emptyset$ (o conjunto vazio) é um conjunto L.I. (Linearmente Independente) e que $\{0\}$, o subespaço nulo, é o menor dentre os subespaços que contém $\emptyset$ e que por isso, temos $[\emptyset] = \{0\}$ e $\dim\{0\} = 0$. Dessa forma podemos entender que dois espaços de mesma dimensão são isomorfos, bastando existir entre eles uma aplicação linear injetiva.

Não foi possível continuar ignorando os triângulos retângulos cujas medidas dos lados não formam ternos pitagóricos. E, apesar das contribuições da mística Escola Pitagórica, esse pensamento de "retaliação"a a levou a um certo descrédito. Para o bem da ciência, o misticismo não se sustentou como metodologia de ensino de Matemática. Nessa particular questão podemos perceber o conflito com os números irracionais. O fato de que $\sqrt{2}$ aparece naturalmente como uma das medidas dos lados de um triângulo retângulo cujos catetes são iguais a 1, pode ser justificado por meio de um axioma da Geometria de Euclides, sobre medição de segmentos: *Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre esses números meça a distância entre os pontos correspondentes*.

Embora, na Matemática, sejamos mais velozes em repassar ou aprender um conceito já estabelecido, é necessário não perdermos de vista um dos principais objetivos da educação que é o de formar indivíduos com senso crítico capazes de propor coisas novas.

Em meio à “aventura” do formalismo e da lógica precisamos cuidar para que “agradáveis” testes ou simulações com números, equações e outras relações matemáticas não induzam erros ou a banalização do conhecimento.

Ações Desenvolvidas

Para dar uma ideia bastante aproximada do que aconteceu foi necessário recorrer aos antigos livros didáticos doados pelo Governo do Estado e adotados pelas Escolas públicas daquela época.

As lembranças do professor e as velhas folhas de papéis contendo as argumentações que, essencialmente, apontam a solução de $\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x}{2}}=\frac{x^2}{8}+\sqrt[3]{\frac{4}{x^2}}$ e que depois de reencontradas motivaram a elaboração deste texto, foram as principais estratégias utilizadas para desenvolvermos a narrativa a seguir.

O assunto tratado numa sala de aula da 7° série ginasial foi equação irracional. Esse Tema foi trabalhado durante uma semana. Depois de dar as definições, o professor resolveu algumas equações e antes de explicitar seus conjuntos soluções, fazia cuidadosamente testes para verificar se os supostos números encontrados eram de fato raízes das equações. Os métodos de solução empregados eram de certa forma descuidados e seguiam as receitas do livro texto. Sem perceber o abismo que cerca esses objetos, o professor propôs, no fim de uma aula, que seus alunos resolvessem como forma de treinamento a equação:

$$\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x}{2}}=\frac{x^2}{8}+\sqrt[3]{\frac{4}{x^2}}$$

Esta equação foi montada em segundos sem que os alunos percebessem que, adotando $x=2$, o professor estava simplesmente somando $\frac{1}{2}+1$ em cada membro da igualdade.

Como não se tratava de parte de uma avaliação, aquele exercício caiu no esquecimento e não foi mais suscitado pelo professor e nem pela maioria dos estudantes daquela turma. Porém, havia um pequenino aluno que, em segredo, trabalhava incansavelmente na tentativa de resolvê-lo.

Certo dia o jovem foi apresentado por seu pai a um professor da UFAC, Mestre em Álgebra. Eles freqüentavam o mesmo clube nos fins de semana. De pronto o garoto apresentou o problema e quis logo saber que número poderia substituir x, naquela equação.

Provavelmente, o jovem aluno teve outra decepção. Naquele encontro, mesmo percebendo que 2 é uma solução para o problema, o professor não conseguiu apresentar argumentos que sustentasse isso. Acredito que deve tê-lo convencido de que aquela era uma raiz da equação, ao fazer a substituição dos x pelo número 2 e obter assim $\frac{3}{2}$ em cada membro da equação.

No final de uma das reuniões do Colegiado do Curso de Matemática, o professor procurado pelo aluno, no citado fim de semana, estava um pouco nervoso. Junto com outros colegas de área ainda não haviam sido capazes resolver algebricamente aquela equação.

Acontece que isso batia como uma afronta para aqueles detentores do saber. Seus comentários, colocados publicamente para as pessoas que ali estavam, eram, agora, sobre os professores do ensino ginasial. Quase em fúria condenavam o fato de que eles, muitas vezes, passavam problemas sem antes medir a dificuldade que os alunos teriam na tentativa de obter as soluções dos mesmos.

Então um dos mestres exemplificou, narrando que um pequenino aluno do Colégio Acreano pediu-lhe ajuda para resolver uma equação irracional e, até aquele momento, não tinha como lhe dar uma solução algébrica. Seguiu comentando que com a ajuda de outro colega professor, haviam utilizado o Cálculo Numérico e, por aproximação, encontrado $x = 2$. Mas aquilo não lhe agradava.

Um de seus alunos acabou por perceber que foi o proponente do tal problema. Lembrou-se que se tratava da tal equação deixada como exercício para os seus alunos daquela 7ª série. Em silêncio, custou a crer que naquele Departamento, professores experientes e qualificados não tivessem conseguido ainda uma solução algébrica para aquela equação.

O então professor do ginásio, responsável pela tal afronta, confessou que havia deixado o exercício que fora elaborado a partir de uma soma de números racionais. Então houve um murmúrio e muitos que ali estavam acaram tomando rumo deixando-o a só com o seu professor de Álgebra. Em pouco tempo foi convencido de que tinha criado uma “situação absurda”. Assim, devia pedir aos seus alunos não considerassem aquela questão, o que já tinha caído no esquecimento da turma, exceto agora, para o professor e seu pequeno aluno.

Mas, sem os conhecimentos da Álgebra pura o aluno do 6º período e professor daqueles pequeninos fez com que aquela questão fosse banida para sempre das discussões em sala de aula. Isso não foi difícil dada a disciplina e respeito que imperava naquela sua sala de aula.

Ocupado em entender o volume de conteúdos e em resolver os problemas que naturalmente surgiam durante as aulas da graduação, o professor abandonou essa questão e passou a se contentar com aquela solução que seu professor havia elaborado, que consistia em abandonar as argumentações algébricas em um certo ponto da investigação para olhar as aproximações de uma raiz de um polinômio, o que levava a crer que a solução $x = 2$ havia sido deduzida.

Em fevereiro de 1991 estava de saída para começar o mestrado em Brasília, aquele professor do antigo ginasial, agora efetivado como professor do Departamento de Matemática da UFAC. Foi tudo muito difícil. Sem os conhecimentos e treinamento necessário, quase que desistiu dos estudos. Mas situação foi acomodando-se.

O primeiro curso de Álgebra o deixou encantado. Apesar de não ter conseguido uma média superior a 6, definiu que seria naquela área da Matemática que iria se especializar.

Chegou o fim do 1º semestre. Antes de voltar a Rio Branco para rever sua família, decidiu colocar a antiga questão para o seu professor. Pediu permissão para isso e depois, foi até o seu escaninho e deixou em um papel de rascunho a equação que ele mesmo havia, no ano de 1986, colocado como um exercício de fixação. Agora ela estava com um professor da UnB, doutor em Álgebra e que ministrara o primeiro curso em Teoria dos Grupos naquele 1º semestre de 1991, portanto já havendo se passado mais de quatro anos depois.

Após o recesso do meio de ano o referido doutor entregou-lhe algumas folhas de papel lhe dizendo que ali estava deduzida uma solução da equação e que essa solução era 2.

A argumentação segue abaixo.

"Temos

$$\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{x^2}{8} + \sqrt[3]{\frac{4}{x^2}} \Leftrightarrow \frac{x^2}{8} - \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt[3]{\frac{4}{x^2}} = \sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt[3]{\frac{8}{x^3}.\frac{x}{2}} = \sqrt{\frac{x}{2}} - \frac{2}{x}\sqrt{\frac{x}{2}}.$$

Pondo $y = \sqrt[6]{\frac{x}{2}}$, obtemos $y^2 = \sqrt[3]{\frac{x}{2}}$, $y^3 = \sqrt{\frac{x}{2}}$, $y^6 = \frac{x}{2}$ e $y^{12} = \frac{x^2}{4}$.

Portanto, valem as seguintes relações: $\frac{1}{x} = \frac{2}{y^6}$ e $\frac{x^2}{8} = \frac{y^{12}}{2}$.

Consequentemente, vale a igualdade $\frac{y^{12}}{2} - \frac{2}{y^6} = y^3 - \frac{4}{y^6}.y^2$ e assim, temos $\frac{y^{18}-4}{y^6} = \frac{y^7}{y^4} \Leftrightarrow y^{18} - 4 = y^9 - 4y^6 \Leftrightarrow y^{18} - y^9 + 4y^6 - 4 = 0$. Fatorando, vem que $y^9(y^9 - 1) + 4(y^6 - 1) = 0 \Leftrightarrow y^9((y^3)^3) - 1) + 4((y^3)^2 - 1) = 0$.

Fazendo $z = y^3$, vem que $z^3(z-1)(z^2+z+1) + 4(z-1)(z+1) = 0$. E uma simples fatoração mostra que $[z^3(z^2+z+1) + 4(z-1)(z+1)](z-1) = 0$ e que uma solução desta última equação é $z = 1$. Substituindo, temos $y^3 = 1$ e uma das soluções desta equação é $y = 1$. Substituindo novamente vemos que $\frac{x}{2} = 1$ e desta relação, $x = 2$".

Tudo terminado então! O professor mestrando havia finalmente se convencido de que na sua Universidade, a Álgebra ensinada era deficiente. E a resposta dada através daquelas argumentações era a prova disso.

Em 2 anos e sete meses de curso muita coisa foi vista, muito papel foi colecionado e livros e mais livros lidos foram se juntando para compor uma bibliografia sobre os assuntos da Álgebra.

Depois de 6 anos de trabalho e dedicação ao Ensino de Matemática, em março de 2000, o então mestre em Matemática retornou à UnB para fazer o doutorado em Álgebra. Em novembro de 2003, com o termino dos estudos, o professor viu efetivada a estabilidade e a segurança para que finalmente estivesse frente a uma sala de aula, dentro de uma Universidade.

Em março de 2004, novamente aquela equação irracional se fez presente. O então professor doutor resolveu olhar com cuidado aqueles papeis antigos. Lembrou parte daquela história e dos medos e das inseguranças no início de sua carreira docente. Estava ali de volta às suas atividades na Universidade organizando seus arquivos e biblioteca particular quando novamente se deparou com aquilo que teria se constituído em um problema acadêmico e relacionamento com seus professores da graduação. Uma questão ingênua, mas que parecia acompanhar sua vida acadêmica.

Um olhar cuidadoso e veio a surpresa! É que ao investigar aqueles argumentos escritos, ele percebeu que a solução apresentada precisava de um ajuste! Foi usada como verdadeira a seguinte equivalência: $y^6 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y^6}$.

Observado que a relação correta a ser usada seria $y^6 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2y^6}$, de onde obtemos $\frac{y^{18}-4}{y^6} = \frac{y^7-4}{y^4} \Leftrightarrow y^{18} - 4 = y^9 - 4y^2 \Leftrightarrow y^{18} - 2y^9 + 2y^2 - 1 = 0$, novamente estávamos a trabalhar na determinação de uma solução para aquela equação.

Em 2007, a orientação de um Trabalho de Conclusão de Curso relacionado com as equações e a estrutura de seus conjuntos universos, levou o professor a sugerir que seu orientando incluísse essa questão como um exemplo de equações que possuem soluções no corpo ordenado dos números reais. Essa "solução" trivialmente escrita a mais de duas décadas, foi refeita e apresentada por Cleber Pereira, durante o princípio da elaboração de seu TCC.

Agora, o ano já é 2014 e mais uma vez volto sobre esse assunto. Depois de 28 anos de tê-lo iniciado agora percebi que os fatos que o cercaram até aqui podem vir a servir de uma agradável leitura, a cerca das experiências de um professor de Matemática.

Discussão dos Resultados

O texto deixa claro que, de início, as tentativas de apresentar uma solução algébrica para essa equação esbarraram na falta de hábito de estudo e na indiferença por parte dos antigos professores de Matemática da UFAC, em terem que cumprir as ementas dos cursos de Álgebra.

Acreditamos que o fato desse tipo de problema ser bem elementar para a realidade do Ensino de Matemática na UnB, o professor não revisou as argumentações que o levaram a concluir que $x = 2$ é uma solução da nossa equação irracional.

Como um exercício proposto para aqueles pequenos alunos do Ginásio, o professor iniciante que acabou se envolvendo com o problema político que, sem querer, causou dentro do antigo Departamento de Matemática da UFAC, poderia ter evitado essa pequena "novela", se, contrariando a sua falta de experiência, tivesse tido o cuidado em dimensionar o esforço necessário para resolver a questão proposta. O que certamente teria o feito refletir sobre a necessidade de ele próprio ter que fazer leituras complementares e desenvolver outras habilidades.

Conclusão

O relato apresentado pode ser visto como um texto apropriado para debates que envolvam a metodologia de ensino e a avaliação continuada. Ele aponta erros "graves" que devem ser evitados na prática do ensino de Matemática como, por exemplo, a sugestão de problemas sem o devido dimensionamento do quanto de raciocínio e esforço são necessários desprender para solucioná-los.

As argumentações aqui utilizadas para encontrar a solução $x = 2$ acabam sendo ofuscadas pelas narrativas e as situações em que essa equação reaparece.

Bibliografia

__BARBOSA, João Lucas Marques; **Geometria Euclidiana Plana**; Coleção do Professor de Matemática-SBM; Rio de Janeiro-RJ; 1995.

__GONÇALVES, Adilson; **Introdução à Álgebra**; 4ª edição, Editora IMPA; Rio de Janeiro-RJ; 1999.

__PEREIRA, Cleber e FERREIRA, Cristhiane de Sousa; TCC (Trabalho de Conclusão de Curso); **A Influência do Conjunto Universo nos Métodos de Resolução de Certas Equações**; Rio Branco-AC; 2008.

__ PIAGET, Jean.**Fazer e Compreender**.São Paulo: Melhoramentos. Editora Universidade de São Paulo, 1978.

_____. **A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imitação e representação**. Rio de Janeiro: LTC, 1990.

_____. **O Nascimento da Inteligência na Criança.** Rio de Janeiro: Guanabara, 1991.

__ VYGOTSKY, Lev Semenovich. **Pensamento e Linguagem.** São Paulo, Martins Fontes, 3ª edição, 1991.

_____. **Lesorigenes de lapensée chez l' enfant (Origens do Pensamento da Criança).** PUF, Paris, 1945, reed. 1963 (Manole. São Paulo. 1989).

José Ivan da Silva Ramos

Rua Maranhão I, nº 133 – Bairro Bosque.

Rio Branco – Acre – CEP: 69900-484

ivanr@ufac.br

Tels.: 0xx68-3901-2536 e 0xx68-99527503