UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE
PRÓ – REITORIA DE PESQUISA E PÓS – GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - MPECIM

ELISABETH MACHADO BASTOS

GEOGEBRA - UMA OPÇÃO PARA CONSTRUIR OBJETOS DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE FRAÇÃO.

Rio Branco – Acre
2017

ELISABETH MACHADO BASTOS

GEOGEBRA - UMA OPÇÃO PARA CONSTRUIR OBJETOS DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE FRAÇÃO.

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Acre, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre Profissional em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientação: **Prof. Dr. José Ronaldo Melo**

Rio Branco – Acre
2017

ELISABETH MACHADO BASTOS

GEOGEBRA - UMA OPÇÃO PARA CONSTRUIR OBJETOS DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE FRAÇÃO.

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Acre, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre Profissional em Ensino de Ciências e Matemática.

Aprovado em: 22/11/2017.

Banca examinadora:

____

Prof. Dr. José Ronaldo Melo
(Orientador/Presidente)

____

Profª. Drª Sueli Liberatti Javaroni UNESP – Bauru/SP
(Membro externo)

____

Prof. Dr. Itamar Miranda da Silva – CELA/UFAC
(Membro Interno)

Rio Branco – Acre
2017

Dedico este trabalho aos meus filhos, Taynara Bastos Trindade e Hiago Bastos Trindade como incentivo para busca de conhecimentos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus pela vida, pela saúde e pelas pessoas que colocou em meu caminho;

Aos meus pais João e Lair *in memoriam*, que me ensinaram os valores, religiosidade e a lutar pelos meus sonhos, saudades eternas;

Aos meus filhos, Taynara e Hiago que amo com todo meu coração e tornam meus dias mais alegres;

Ao orientador José Ronaldo Melo pelos ensinamentos, paciência e alegria;

Aos Professores doutores do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Acre, pelo incentivo ao conhecimento. Em especial à profª Dra Salete Maria Chalub Bandeira que despertara em mim a sensibilização para com a acessibilidade;

Aos colegas da turma de Mestrado por todas as contribuições na aprendizagem e momentos de alegrias que me propiciaram;

À amiga Raimunda Darque de Souza pela solidariedade e companheirismo;

E a todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa.

“Se não receio o erro, é porque estou sempre pronto a corrigi-lo. ”

Bento Jesus de Caraça.

RESUMO

Esta pesquisa teve por escopo investigar na sala aula de Matemática, do 6° ano do Ensino Fundamental, em qual perspectiva se desenvolve o ensino dos números fracionários. Para a produção dos dados foram aplicados dois questionários, que resultaram num mapa conceitual, bem como sete atividades que se deram com o uso de materiais manipuláveis e digitais. Os resultados obtidos através desses recursos revelaram apropriação do algoritmo comum, apresentados nos livros didáticos, assim como a não compreensão do conceito de equivalência, o que caracteriza a aprendizagem como mecânica, em que o aprendiz não vincula os conceitos prévios aos conceitos presentes em sua estrutura cognitiva. Considerando que o mapeador desenha as proposições de acordo com o objetivo focal proposto pelo professor e o seu conhecimento prévio, foi possível estabelecer a comparação dos dois mapas e, assim, verificar um avanço considerável na abstração dos conceitos de equivalência, potencializados mediante o uso do material desenvolvido para esse fim. Sabe-se que a aprendizagem significativa é dependente da estrutura cognitiva idiossincrática do indivíduo e requer a associação de um conceito a outro dentro de um sistema hierarquicamente organizado, uma vez a aprendizagem sendo formal depende de mecanismo para a apresentação dos conceitos e da retenção pelo indivíduo. Nessa perspectiva, é emergente a mudança na prática docente, no sentido do uso de uma variedade maior de recursos que fomentem a assimilação de informações. Avaliar constantemente seu método de ensino e repensar suas práticas procurando sempre potencializar as condições ideais da aprendizagem são medidas que devem ser tomadas assim que se percebe o declínio na efetividade do resultado que o professor espera, qual seja a internalização de conceitos.

Palavras-chave: Frações. Geogebra. Mapas conceituais. Materiais manipuláveis.

ABSTRACT

The purpose of this research was to investigate in the Mathematics classroom, the 6th year of elementary school, in which perspective the teaching of fractional numbers develops. For the production of the data, two questionnaires were applied, which resulted in a conceptual map, as well as seven activities that occurred with the use of handling and digital materials. The results obtained through these resources revealed appropriation of the common algorithm presented in the textbooks, as well as the lack of understanding of the concept of equivalence, which characterizes learning as mechanics, in which the learner doesn't link the previous concepts to the concepts present in their structure cognitive. Considering that the mapper draws the propositions according to the focal objective proposed by the teacher and his previous knowledge, it was possible to establish the comparison of the two maps and, thus, to verify a considerable advance in the abstraction of the concepts of equivalence, potentialized through the use of the material developed for this purpose. It is known that meaningful learning is dependent on the individual's idiosyncratic cognitive structure and requires the association of one concept with another within a hierarchically organized system, since learning being formal depends on the mechanism for the presentation of concepts and retention by the individual. In this perspective, the change in the teaching practice, in the sense of the use of a greater variety of resources that foment the assimilation of information, is emerging. Constantly evaluating his teaching method and rethinking his practices, always seeking to optimize the ideal conditions of learning are measures that must be taken as soon as one realizes the decline in the effectiveness of the result that the teacher expects, namely the internalization of concepts.

Keywords: Fractions. Geogebra. Conceptual maps. Handling materials.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

"Só se é curioso na proporção de quanto se é instruído."
(Jean Jacques Rousseau)

O professor consciente terá a sensibilidade de fazer com que suas aulas abram horizontes. Dessa forma em seus planejamentos terá como prioridade oportunizar aos discentes situações de aprendizagens, em que todos participem de alguma forma, conhecendo, se envolvendo e aprendendo significativamente, em uma relação intrínseca em busca do conhecimento.

Segundo a Teoria da Assimilação de David Ausubel, o fator isolado mais importante capaz de influenciar a aprendizagem é tomar o conhecimento prévio do aprendiz como ponto de partida. Descobrindo o que ele já conhece, o professor poderá repensar a sua prática pedagógica fazendo a diferença para que o estudante se mostre capaz de estabelecer relações e vínculos em sua estrutura cognitiva os conhecimentos adquiridos, ocorrendo assim, a aprendizagem significativa. E nessa perspectiva de investigação que se desenvolveu este trabalho, fundamentado na experiência em sala de aula, que se deu por cinco anos consecutivos, quando a pesquisadora lecionou para turmas de 9° ano a disciplina de Matemática.

Observou-se que os alunos ao resolverem exercícios sobre os conteúdos, tais como: semelhança de polígonos, potenciação com expoentes inteiros negativos, racionalização, construções de gráficos de uma função, equações do 1° e 2° grau, e, em quaisquer outros conteúdos, que exigem cálculos com os números racionais, a dificuldade estava presente.

Essa dificuldade transpassava a sala de aula e refletia nas avaliações externas, Prova Brasil[1] e SADEAM (Sistema de Avaliação do Desempenho Educacional do Amazonas), onde as Matrizes de referências[2] para avaliação em Matemática têm como foco a habilidade de resolver problemas contextualizados. Os temas selecionados como Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Números e Operações, Álgebra e Funções e Tratamento da

---

[1] Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (Anresc) é uma avaliação censitária bianual envolvendo os alunos do 5º ano (4ª série) e 9º ano (8ª série) do Ensino Fundamental das escolas públicas que possuem, no mínimo, 20 alunos matriculados nas séries/anos avaliados. Disponível em: <https://goo.gl/z5jgVL>. Acesso em: Jul. 2017.

[2] Compõe-se de um conjunto de descritores que especificam o que cada habilidade implica e são utilizados como base para a construção dos itens de diferentes disciplinas. Disponível em: < https://goo.gl/F7yB5C>. Acesso em: Jul. 2017.

Informação, reúnem descritores[3] que expressam habilidades em Matemática a serem avaliadas a cada etapa de escolarização.

Após a aplicação da avaliação, com o propósito de fomentar práticas pedagógicas alternativas para transformar a realidade educacional, os resultados são apresentados à escola, em formato de planilhas, organizado por turma e descritores, possibilitando ao professor verificar o nível de conhecimento de cada aluno em cada habilidade que compõe a avaliação.

Em análises das planilhas do 9° ano, das duas escolas onde a pesquisadora atuava, revelaram índices de baixos rendimentos nos descritores D25 cuja habilidade é efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais e D26 cuja habilidade é de resolver problema com números racionais envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).

A escola requeria da pesquisadora a aplicação de um plano de intervenção pedagógica em prol da aprendizagem desses conceitos. Porém, sobrecarregada com questões burocráticas e diante das múltiplas cobranças relacionadas à profissão, sempre faltava tempo para planejar e preparar atividades complementares, ou melhor, prezar pelo que realmente é importante - o aprendizado do aluno. Então somente revisava os conteúdos em momento de aula, sem muito êxito.

Era necessário entender como o aluno aprende, bem como saber o motivo pelo qual chegava ao 9° ano sem saber operar com os números racionais. Quais seriam as causas dessa situação? Como intervir para que o aprendizado fosse efetivo?

Percebeu-se a oportunidade de se fazer um estudo sistemático sobre os números fracionários para investigar as formas de ensinar e compreender como se dá a aprendizagem significativa. Deste modo, com o objetivo de investigar em qual perspectiva se desenvolve o ensino dos números fracionários no 6° ano do Ensino Fundamental, foi proposto verificar se uma das causas, da não abstração dos conceitos de fração, refere-se a obstáculos epistemológicos ou à aprendizagem mecânica dos conceitos, que exige somente a memorização dos algoritmos e, por isso, são esquecidos com o passar do tempo. Também foi especulado se com o uso de materiais didáticos seria favorecido a formação desses conceitos.

A partir daí, foi elaborado um estudo à luz da Teoria da Assimilação, que foi pensada para um contexto de sala de aula no aprendizado por receptividade, sobre a origem e os conceitos fundamentais dos números fracionários, apresentados por Roque (2012) e Caraça

[3] Têm origem na associação entre conteúdos curriculares e operações mentais desenvolvidas pelo aluno que se traduzem em certas habilidades. PDE/SAEB (2011, p. 18).

(1970), além de se refletir sobre os obstáculos epistemológicos e os aspectos de um número fracionário discutidos por Mandarino (2010), Barbosa (1966) e em Toledo e Toledo (2010). E para a construção de materiais que abordam frações com esquemas geométricos utilizados na investigação das questões de pesquisa, buscou-se definições em Lorenzato (2009).

Procurou-se descobrir através da aplicação de dois questionários e de sete atividades, os conhecimentos que 20 alunos dos 6° ano do Ensino Fundamental, da Escola SESI, da cidade de Rio Branco – AC, tinham sobre números fracionários. Isso para responder as questões da pesquisa e contribuir com um produto educacional para o processo de ensino e aprendizagem desses conceitos.

O resultado desse trabalho foi organizado com uma Introdução e 5 capítulos:

Na introdução é apresentado o problema de pesquisa, explicitado como surgem as perguntas da pesquisa, os instrumentos utilizados na investigação, os sujeitos da pesquisa e como estão organizados os capítulos.

O capítulo 1 trata sobre a revisão da literatura, que serve de fundamentação para as considerações abordadas neste trabalho. Apresentam os conceitos fundamentais dos números fracionários, seus aspectos, suas representações, os problemas epistemológicos que se opõem como desafios em seu aprendizado e os fundamentos para práticas em sala de aula.

O capítulo 2 aborda as descrições dos materiais utilizados na pesquisa tais como: os mapas conceituais, os materiais didáticos e tecnológicos.

No capítulo 3 organiza a metodologia, no qual se descreveu detalhadamente os métodos da pesquisa, os instrumentos e procedimentos para produção de dados.

O 4° capítulo apresenta os resultados e discussões da pesquisa e, também, o produto educacional. E por fim, porém não menos importante, no 5°, capítulo as Considerações Finais.

Esta pesquisa é de um Mestrado Profissional que almeja como resultado um produto educacional que contribua para a Educação Matemática. Como resultado, disponibiliza-se um objeto de aprendizagem construído através das funções do *software* geogebra, para impressão e *download*, que poderá ser um importante auxiliador no processo ensino e aprendizagem de frações.

Esse material foi construído pensando em fornecer informações necessárias, para que propiciem confrontos de concepções para a formação de conceitos de frações, sua representação geométrica, numérica, algébrica, os conceitos de equivalência e da habilidade de operar com adição de frações próprias e contínuas.

O que sugere as Orientações Curriculares do Ensino Fundamental é que a aprendizagem se realize pela construção dos conceitos formulados pelo próprio aluno, com situações oferecidas pelo professor. De acordo com essa proposta, além de organizador, o professor é também o facilitador nesse processo. Dessa forma, caberia a ele oferecer situações de aprendizagem relevantes para formação de conceitos e informações necessárias, aquelas que o aluno ainda não tem condições de obter sozinho para que propiciem confrontos de concepções para a construção do seu conhecimento, estabelecendo então uma aprendizagem significativa.

Um professor, segundo PCN (1998. p. 36) "precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área e uma concepção de Matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos".

CAPÍTULO 1 – REFERENCIAL TEÓRICO

"Deus criou os inteiros, todo o resto é obra do Homem."
(Leopold Kronecker)

A história se refere às antigas civilizações que necessitavam da expressão numérica de medição de terras que margeavam os rios, que eram fundamentais para a sobrevivência do povo. Assim, este capítulo trata-se do que se conjectura sobre a origem desses números, alguns de seus conceitos fundamentais, a apresentação desses conceitos em sala de aula, uma discussão sobre os aspectos que se apresentam e alguns fatores de ordem didática a se considerar, ao relacionar o ensino desses números com a aprendizagem significativa.

1.1 Origem dos Números Racionais

Uma das principais conjecturas da origem dos números racionais é a apresentada por Roque (2012, p. 27), fundamentada em fragmentos de registros feitos pelos egípcios em papiros[4], entre eles o papiro de *Rhind* [5], escrito de forma hierático (forma cursiva de escrita) e datado cerca de 1650 a.E.C., "embora no texto seja dito que seu conteúdo tenha sido copiado de um manuscrito mais antigo ainda", e pelas impressões feitas por *tokens*[6] nos tabletes de argilas pelos babilônicos.

No período em que os faraós eram os reis que governavam o Antigo Egito, cerca de 3.000 a.E.C., a escrita tinha dois formatos: hieroglífico[7], presentes nas inscrições monumentais em pedra; e o hierático, uma forma cursiva usada pelos egípcios nas escritas dos papiros e documentos administrativos, cartas e literatura.

Conforme Geronimo e Saito (2012, p. 123 e 126) o papiro de *Rhind* contém uma "tabela de $2/n$ com n ímpar variando de 5 a 101, uma tabela de $n/10$ com n variando de 2 a 9

---

[4] Caules das plantas trabalhadas pelos escribas egípcios para escreverem textos e registrarem as contas do império. Disponível em: < https://goo.gl/yJ1apG> Acesso em: Maio 2017.

[5] O nome do papiro homenageia o escocês Alexander Henry Rhind, que o comprou, por volta de 1850, em Luxor, no Egito e também é designado papiro de Ahmes, o escriba egípcio que o copiou, e encontra-se no British Museum. (Roque, 2012, p. 27).

[6] Pequenos objetos feitos de argila de diversos formatos: cunhas, cones, esferas discos círculos, ovais, triângulos etc., encontrados em escavações na região de Uruk, no Iraque. Roque (2012, p. 29).

[7] É o conjunto de sinais pictográficos criados pela civilização egípcia, que compõem um dos primeiros sistemas de escrita da humanidade, desenhos feitos para representar objetos seres vivos e até a vida dos faraós. Disponível em: < https://goo.gl/jGgj5n> Acesso em: Maio 2017.

e 87 problemas, demonstrando assim, que os egípcios apresentavam necessidade de se trabalhar com o conceito de frações, o que pode ser constatado nos problemas de divisões de pães e rações para animais, entre outros". Estes registros foram exaustivamente estudados e explorados por educadores e historiadores da Matemática, que, não só permitiram fazer análise da importância dos egípcios nos primórdios do desenvolvimento de conhecimentos matemáticos, mas também, traçar um paralelo entre os conhecimentos desse povo e os conhecimentos atuais.

No Egito e na Mesopotâmia, surgiram as primeiras grandes civilizações da humanidade que se desenvolveram às margens do rio Nilo, no norte da África. A base econômica destas civilizações estava na agricultura, ou seja, na produção de alimentos. Com as construções das pirâmides há 3000 a.E.C, nos leva a crer em uma sociedade totalmente organizada.

O professor João Bosco Pitombeira, em seu vídeo-aula[8] de História da Matemática do Mestrado PROFMAT, cita que toda sociedade com esse grau de desenvolvimento e sofisticação usa e tem que usar a Matemática. Ressalta também que os escribas reais detinham o conhecimento organizado e eram encarregados de controlar toda administração civil e militar do Egito.

> A divisão da sociedade em classes e a propriedade privada levam à criação de medidas para regular posses e à cobrança de impostos. Segundo o historiador grego Heródoto, as inundações do Nilo desmarcavam os limites das propriedades, gerando a necessidade de remarcá-las. Isso era feito com o auxílio de medidas e plantas, pelos chamados "esticadores de corda". Daí o desenvolvimento dos números fracionários (NETO, 1987, p. 12).

Segundo Toledo e Toledo (2010, p. 207), "as exigências de medição impuseram a criação de padrões de medidas ou unidades. Estas unidades, em contrapartida, levantaram o fato de que é raro a unidade (ou padrão) caber um número inteiro de vezes na grandeza a medir".

A criação e o estabelecimento único de um sistema de comparação para todas as grandezas da mesma espécie, chamado de unidade de medida da grandeza de que se trata, hoje conhecido como padrões de medidas de comprimento, pesos, tempo, etc., tornou possível estabelecer comparações com a ideia de quantas vezes cabe a unidade menor dentro da maior ou vice-versa, relacionando, dessa forma, duas grandezas de mesma espécie.

---

[8] História da Matemática para Professores 2 - **Números no Egito Antigo**. Publicado em 12 de dez de 2014. Disponível em: <https://youtu.be/Oa7IiFCbqUY>. Acesso em: Jan. 2017.

Caraça (1970) cita que a unidade para medição pode escolher como se quiser, mas na prática, o resultado da medição condiciona a escolha da unidade. Sendo assim, devemos nos utilizar do caráter prático mais conveniente em cada situação.

Nesse sentido, uma unidade fica estabelecida quando estabelecemos um padrão. O padrão pode estar associado a um objeto ou a um procedimento experimental. O metro, por exemplo, já foi associado a um objeto, sendo definido como equivalente a distância entre os dois traços, gravados numa barra feita de uma liga de platina iridiada guardada a uma temperatura fixa no Museu Internacional de Pesos e Medidas, na cidade de Sèvres, na França[9]. E com a unidade metro foram definidos seus múltiplos e submúltiplos em um mesmo escalão de grandezas.

> Para comparar, por exemplo, os comprimentos de segmentos de rectas AB e CD aplica-se um sobre o outro, fazendo coincidir dois extremos, [...] feita essa operação, vê-se que o ponto D cai entre A e B e o resultado da comparação exprime-se dizendo que o comprimento AB é maior que o de CD ou que o comprimento de CD é menor que o de AB (CARAÇA, 1970, p. 29).

O simples fato de sobrepor um segmento ao outro possibilita comparar se são de tamanhos diferentes ou de medidas iguais e, também verificar a quantia de vezes que cabe o segmento menor no maior e/ou, quantas vezes o segmento maior contém o menor.

Ao tomar um segmento menor para medir um maior, fazendo coincidir um de seus pontos extremos, podem-se observar duas situações: o segmento maior suportar um número inteiro de vezes o menor, ou ainda ser necessárias, partes do segmento menor para expressar unidade maior. A ideia dessa segunda situação, nos leva a noção de uma medição que não se estabelece nos inteiros, e nos remete a pensar na necessidade de novos números que representem essa medição, ou seja, números que expressem a medida de um segmento dividido, o que se discute na próxima seção.

1.2 Reflexões dos Conceitos Fundamentais do Campo Racional

Nesta seção apresenta-se a conjectura dos conceitos fundamentais do campo racional apresentados por Caraça (1970), sua ordenação, suas propriedades e como se define a operação de adição neste campo numérico e suas representações.

---

[9] IEZZE, G.;DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e Realidade**: 6° ano. 6.ed. São Paulo; Atual, 2009. p. 236.

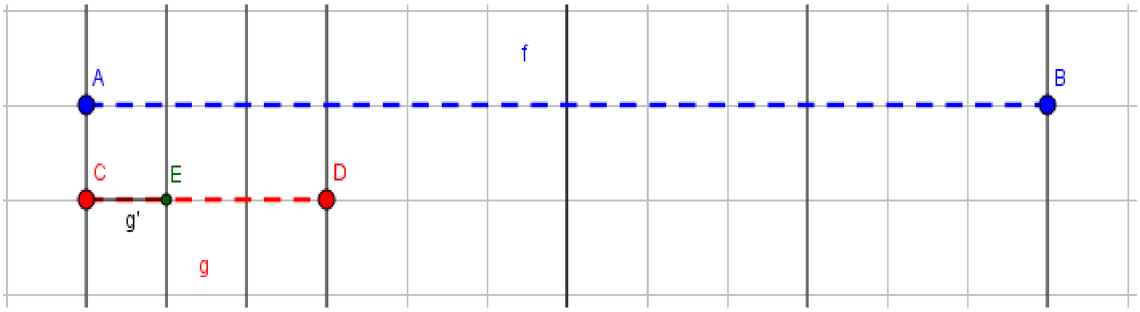
1.2.1 O princípio de extensão e a análise da impossibilidade da divisão exata

São analisadas duas conjecturas: A e B, apresentadas em Caraça (1970, p. 33), para que leve à compreensão da necessidade de construção de um novo campo numérico.

Situação A – Seja um segmento AB de medida f e um segmento CD de medida g como apresentada na Figura 1. Observam-se dois aspectos:

- Medindo o segmento AB com a unidade de medida g, conclui-se que AB mede 4 vezes g;
- Dividindo o segmento CD em 3 partes iguais, tem-se 3 segmentos de medida g'. Tomando para nova unidade de medição o segmento g', verifica-se que AB mede 12 vezes g'.

Figura 01 – Representação dos segmentos: AB, CD e CE.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 15/11/2016.

Então, pode-se dizer que AB vale 4 unidades g, ou que AB vale 12 das terças partes g' de g. O que satisfaz o que diz Caraça (1970, p. 31), "uma mesma grandeza tem, portanto, tantas medidas as unidades com que a medição se faça. Se, com a unidade *u*, uma grandeza tem medida *m*, com a outra unidade $u' = m \div k$ a mesma grandeza tem medida $m' = m \times k$".

E assim, pode-se concluir que na situação A, o resultado da medição de AB pode ser expressa como unidade g pelo número 4 como pela razão[10] dos dois números, 12 e 3. Isto é, $12 \div 3$ ou ainda $\frac{12}{3}$.

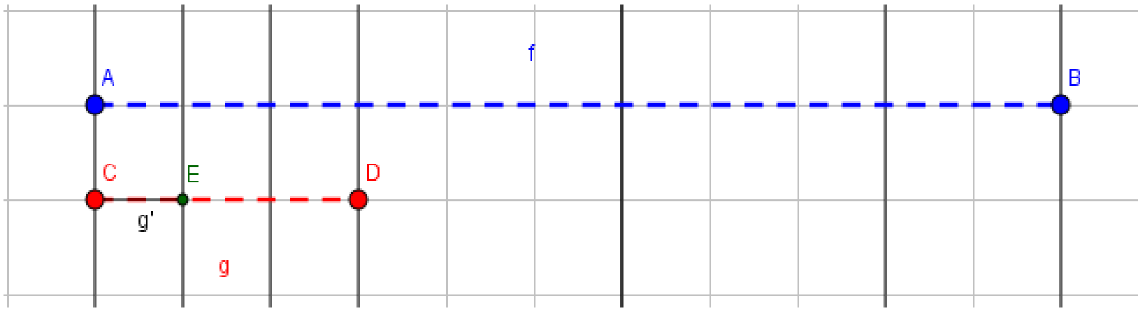
Percebe-se que o exemplo apresentado no caso A (Figura 1), é uma situação em que a unidade contém um número inteiro de vezes na grandeza a medir, o que não ocorre na situação B.

[10] Considerar razão nesse caso como quociente entre dois números. (CARAÇA, 1970, p. 33)

Situação B - Seja um segmento AB, de medida f, e um segmento CD, de medida g (Figura 2), também se têm dois aspectos:

- Medindo AB com unidade g, pode-se dizer que AB mede 3 g mais partes de g.
- Subdividindo o segmento CD em 3 partes iguais (g') suficientes para que cada uma delas caiba um número inteiro de vezes em AB, verifica-se que a medida de AB em relação à nova unidade é 11 g'.

Figura 02 – Representação dos segmentos: AB, CD e CE.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 15/11/2016.

Pode-se dizer assim que, AB vale 3 unidades g mais partes de g (que é 2g') ou que, AB vale 11 das terças partes de g, ou seja, 11 g'. Portanto o resultado da medição de AB pode ser expressado como unidade g pelo número 3 ou pela razão dos dois números 11 e 3, isto é, 11÷3, ou $\frac{11}{3}$. Aqui se verifica que não existe um número inteiro que satisfaça essa razão, visto que 11 não é divisível por 3.

Para Centurión e Jakubovic (2009, p. 97 e 100), "um número natural é divisível por outro número natural, excluindo-se o zero, se a divisão entre eles é exata, ou seja, tem resto zero". E que, "um número natural é divisível por 3 se a soma de seus algarismos é um número divisível por 3". Logo, 11 não é divisível por 3, pois 1+1 = 2 e 2 não é divisível por 3.

Consequentemente, o número representado como razão $\frac{11}{3}$ não se define nos inteiros. Em geral, sempre que se divide um segmento *m* em *n* partes iguais e verifica-se que *n* não é divisor de *m*, ou seja, não existe um número inteiro *x* que satisfaça a razão $\frac{m}{n}$, um caso da impossibilidade da divisão em partes inteiras; constata-se, então, a necessidade de se criar um novo conjunto capaz de comportar números que representem quantidades menores que o inteiro.

> O homem tem tendência a generalizar e estender todas as aquisições de seu pensamento seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências. Todo trabalho intelectual do homem é, no fundo, orientado por certas normas, certos princípios. Àquele princípio em virtude

> do qual se manifesta a tendência que acabamos de mencionar, daremos o nome de princípio de extensão (CARAÇA, 1970, p. 10).

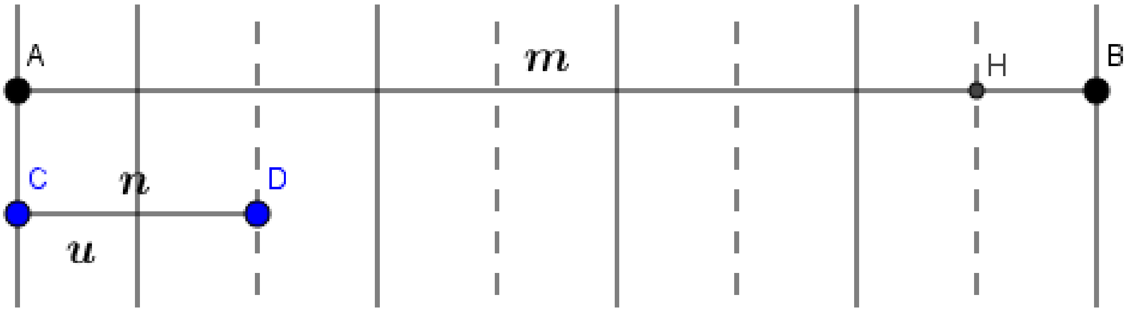
O princípio de extensão e a análise da impossibilidade da divisão exata (quando o resto da divisão não é zero) pode ter levado as civilizações antigas, conforme argumenta Roque (2012), a criar um novo número: os fracionários. Os moldes de construção do novo campo numérico requereram consideração do princípio da economia, que preconiza o máximo resultado com o mínimo emprego possível de energia mental. Visando, dessa forma, as aplicações práticas. Finalmente, este novo campo numérico procurou manter todas as propriedades dos números inteiros e abranger todas as hipóteses de medição análogas. Quer estejam nos casos em que a razão pode ser expressa por um número inteiro, como na Situação A, ou onde a razão não pode ser expressa por um número inteiro, exemplificado na Situação B.

1.2.2 Características do campo racional

A caraterística do novo campo numérico se define, conforme afirma Caraça (1970, p. 35-36), satisfazendo as seguintes situações:

Dados dois segmentos AB e CD, conforme Figura 3. Considera-se *m* a medida de AB e *n* a medida de CD, assim m(AB) = *m* e m(CD) = *n*. Em cada um dos segmentos se contém um número inteiro de vezes o segmento *u*. AB contém *m* vezes, e o segmento CD contém *n* vezes o segmento *u*.

Figura 03 - Representação dos segmentos: AB, CD e o Segmento u.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 05/12/2016.

Apresenta-se, por definição, que a medida do segmento AB, tomando CD como unidade, é o número $\frac{m}{n}$, isto é, cabe $\frac{m}{n}$ segmentos CD em AB.

Escreve-se: AB = $\frac{m}{n} \times \text{CD}$, ou seja, a m(AB) é o produto entre m(CD) e a quantia de segmentos CD que cabem em AB, quaisquer que sejam os números inteiros *m* e *n* (*n* não nulo).

Verificam-se duas possibilidades:

- A primeira quando *m* for divisível por *n*, o número $\frac{m}{n}$ coincide com o número inteiro que é quociente da divisão (Situação A, Figura 1);
- A segunda se *m* não for divisível por *n* (Situação B, Figura 2) o número $\frac{m}{n}$ diz-se fracionário.

A qualquer número que pode ser escrito como $\frac{m}{n}$ diz-se, em qualquer hipótese racional, ao número *m* chama-se numerador e ao número *n* denominador (com *n* ≠ 0).

Da igualdade "AB = $\frac{m}{n} \times \text{CD}$, resulta que $\frac{n}{1} = n$, visto que, se AB = *n* × CD, é também AB = $\frac{n}{1} \times \text{CD}$, e que $\frac{n}{n} = 1$ porque as igualdades AB = AB e AB = $\frac{n}{n}$ × AB são equivalentes." (CARAÇA, 1970, p. 36).

Depara-se, portanto, com um conjunto numérico formado pelos inteiros e os números fracionários. Sendo agora possível representar sempre a medida de um segmento, tomando outro e representá-los algebricamente pelo número racional $\frac{m}{n}$.

Para dar as definições desse novo campo numérico, foi considerada a origem concreta dos números racionais, isto é, o seu significado como expressão numérica de medição de segmentos e o princípio da economia, que se traduz em dois aspectos: analogia de definições, como as dadas em números inteiros e a manutenção das leis formais das operações, pois por convenção essas novas definições deveriam sair:

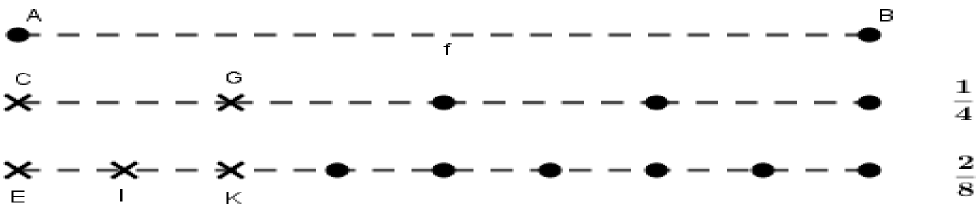
> O menos possível, dos moldes das antigas, para que a introdução delas no cálculo se faça com o menor dispêndio possível de energia mental, não só no dar da definição, como nas suas consequências. Esta diretriz corresponde a um princípio geral da economia do pensamento que nos leva, seja nos atos elementares da labuta diária, seja nas construções mentais mais elevadas, a preferir sempre, de dois caminhos que levam ao mesmo fim, o mais simples e mais curto (CARAÇA, 1970, p. 26).

Finalmente, definido o novo campo numérico que mantém as leis formais das propriedades da multiplicação, a comutatividade e a preservação do que é conveniente e necessário ao cálculo, sua ordenação é estabelecida de acordo com as definições de igualdade e desigualdade.

Definição de igualdade – “Dois números racionais $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$ dizem-se iguais quando exprimem a medida do mesmo segmento, com a mesma unidade inicial.” (CARAÇA, 1970, p. 39).

Exemplo: Dado um segmento AB de medida f, como na Figura 4.

Figura 04 – Segmento AB exprimindo as medidas r e s como 1/4 e 2/8.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 06/12/2016.

Consideram-se duas formas de divisão do segmento AB, em 4 partes e tomando como medida o segmento CG, se diz que CG é $\frac{1}{4}$ de AB; e dividido em 8 partes tomando como medida o segmento EI se diz que EI é $\frac{1}{8}$ de AB.

Verifica-se que $\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 2 \times \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$ facilmente pode-se chegar à conclusão que, para que os segmentos sejam de mesmas medidas, é necessário considerar dois segmentos $\frac{1}{8}$ para equivaler a $\frac{1}{4}$.

Esse fato pode traduzir-se ainda pelo que diz Centurión e Jakubovic (2010, p. 139) com o seguinte enunciado: “multiplicando o numerador e o denominador de qualquer fração por um mesmo número natural, não nulo, sempre se obtém uma fração equivalente à inicial”. Esta propriedade permite efetuar sempre a redução de dois números racionais ao mesmo denominador e:

> Conclui-se daqui que - um dado número racional $r = \frac{m}{n}$, todo número racional $s = \frac{p}{q}$ onde $p = mk$ e $q = nk$ (k inteiro qualquer não nulo) é igual a r. Façamos o produto mq e pn; tem-se que $mq = mnk$, e pn = mnk, donde $mq = pn$; a definição de igualdade pode pôr-se, portanto, assim: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \leftrightarrow mq = n\,p$ (CARAÇA, 1970, p. 39).

Essa igualdade obedece às relações de dependência válidas reciprocamente (multiplicando r ou s por um número k ou dividindo por um número k).

Dados dois números $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$, pode-se escrevê-los: $r = \frac{m}{n} \times \frac{q}{q}$ e $s = \frac{p}{q} \times \frac{n}{n}$.

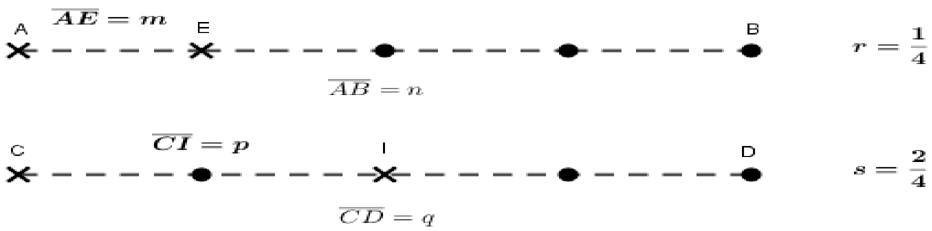
Definição de Desigualdade: Dado dois números racionais r e s, $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$, "diz-se maior aquele que, com o mesmo segmento unidade, mede um segmento maior." (CARAÇA, 1970, p. 40).

E para compará-los observa-se que diz nas seguintes consequências:

- "Se dois números têm os mesmos denominadores, é maior (menor) o que tiver o maior (menor) numerador." (CARAÇA, 1970, p. 40).

  Exemplo apresentado na Figura 5:

Figura 05 – Números r e s representado pelos segmentos AB e CD.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 06/12/2016.

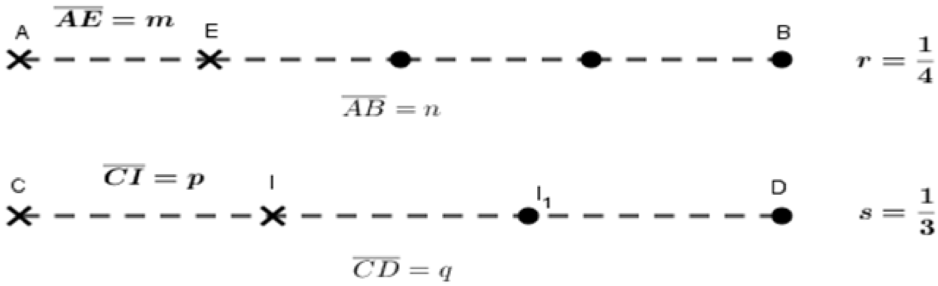
Percebe-se que os segmentos AB e CD foram divididos em 4 partes de mesma unidade, essas divisões representam os denominadores n e q das frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$, e $n = q = 4$.

Considerando AE o segmento m e CI o segmento p, têm-se $m = 1$ e $p = 2$ formando a fração $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{4}$, verificando que $p > m$ conclui-se que $\frac{2}{4} > \frac{1}{4}$.

- "Se os dois números têm o mesmo numerador, é maior (menor) o que tiver menor (maior) denominador." (CARAÇA, 1970, p. 40).

Exemplo $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ como na Figura 6:

Figura 06 – Segmentos r e s representando as frações 1/4 e 1/3.



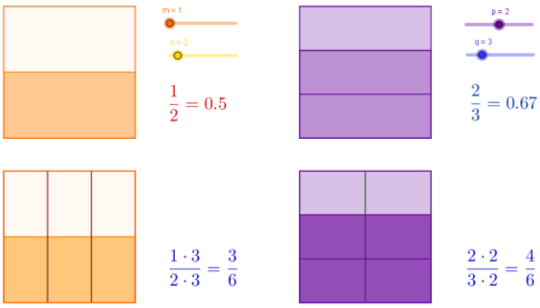
Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 06/12/2016.

Observa-se que $m = p = 1$, $n = 4$ e $q = 3$ e, portanto $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ ou vice e versa. Pelo tamanho dos segmentos visualmente nota-se que $s > r$.

- "Se dois números não têm o mesmo numerador e nem o mesmo denominador reduzem-se ao mesmo denominador e comparam-se em seguida." (CARAÇA, 1970, p. 41).

  Exemplo: $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$, na Figura 7.

Figura 07 – Representação de frações equivalentes 1/2 = 3/6 e 2/3 = 4/6.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 06/11/2016.

Comparando as frações $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ e $\frac{p}{q} = \frac{2}{3}$, nota-se que n = 2 e q = 3. Fazendo $\frac{m}{n} \times \frac{q}{q} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{6}$ e $\frac{p}{q} \times \frac{n}{n} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{6}$ obtém-se duas frações com mesmo denominador (6); sendo possível a comparação pela primeira consequência, chega-se à conclusão que $\frac{4}{6} > \frac{3}{6}$, portanto:

$$\frac{m}{n} > \frac{p}{q} \leftrightarrow m \times q > p \times n.$$

Isto é,

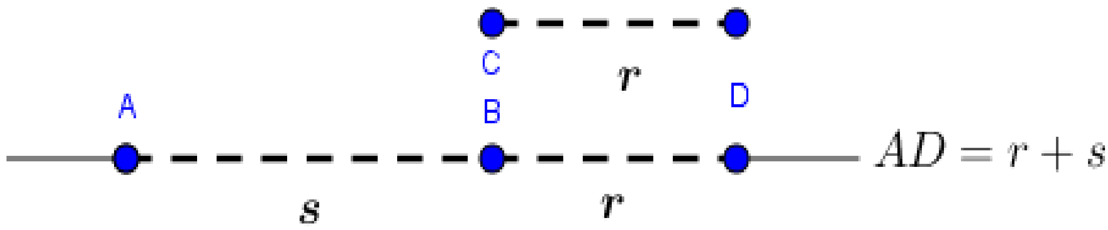
$$\frac{4}{6} > \frac{3}{6} \leftrightarrow 4 \times 6 > 3 \times 6. \;\; 24 > 18 \text{ (Verdade).}$$

1.2.3 A adição de frações

"Dados dois números racionais r e s medindo, com a mesma unidade, dois segmentos, chama-se soma $r + s$ ao número racional que mede, ainda com a mesma unidade, o segmento soma dos dois." (CARAÇA, 1970, p. 41).

Assim, dados dois segmentos AB e CD, como na Figura 8, chama-se soma (AB + CD) o segmento AD que se obtém transportando CD para a reta sobre a qual existe AB, e fazendo coincidir a origem C de CD com a extremidade B de AB. Portanto, (AB + CD = AD) = $r + s$.

Figura 08 – Representação de soma de dois segmentos.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 06/11/2016.

Podem ocorrer duas situações quando se soma *r* e *s*:

a) Quando $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{n}$ (denominadores iguais, $n = q$, $q \neq 0$).

Fazendo $\frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m+p}{n}$. Analogamente, $\frac{m}{n} - \frac{p}{n} = \frac{m-p}{n}$. Ou seja, "na adição ou subtração de frações com denominadores iguais, somamos ou subtraímos os numeradores, mantendo o denominador comum." (CENTURIÓN e JAKUBOVIC, 2010, p. 164).

Exemplo: $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$.

b) Quando $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$ (denominadores diferentes, $n \neq q$).

Fazendo $\frac{m}{n} \times \frac{q}{q}$ e $\frac{p}{q} \times \frac{n}{n}$, donde $r + s = \frac{m \times q + p \times n}{n \times q}$, logo $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m \times q + p \times n}{n \times q}$. Analogamente, $r - s = \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{m \times q - p \times n}{n \times q}$.

Na adição ou subtração de frações com denominadores diferentes:

"Reduzimos as frações ao menor denominador comum, obtendo frações equivalentes às iniciais; somamos ou subtraímos essas novas frações." (CENTURIÓN e JAKUBOVIC, 2010, p. 165).

Exemplo: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \times 3 + 1 \times 2}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$.

Verifica-se que se mantêm todas as propriedades da adição de números inteiros, citado em Caraça (1970, pág. 16), que são as propriedades de:

- ✓ $a = a'$, $b = b' \rightarrow a + b = a' + b'$ (unicidade);
- ✓ $b > b' \rightarrow a + b > a + b'$ (monotónica);
- ✓ $a + 0 = a$ (elemento neutro);
- ✓ $a + c = b + c \rightarrow a = b$ (redução);
- ✓ $a + b = b + a$ (comutativa);

- ✓ $a + (b + c)$[11] $= (a + b) + c$ (associativa).

"Frações e números decimais representam números racionais. Do ponto de vista matemático, frações e decimais são 'a mesma coisa'. No entanto, no dia a dia, os decimais são muito mais usados. Seus principais usos são indicar quantias em dinheiro e medidas." (CENTURIÓN e JAKUBOVIC, 2010, p. 156, grifo do autor).

Desse modo, embora presente explícita ou implicitamente no cotidiano social, os números fracionários possuem um código de leitura específico, conforme apresentado no tópico seguinte.

1.2.4 As Representações de um número fracionário

Todo número fracionário pode ser escrito como uma fração decimal "que é, por definição, uma fração (ordinária) cujo denominador é uma potência de 10. Assim, por exemplo, $\frac{3}{10}, \frac{152}{100}, \frac{13}{1000}$, são frações decimais." (LIMA, 1991, p. 158).

Algumas frações como $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}, \frac{1}{40}$ não são explicitamente, frações decimais, pois seus denominadores não são potências de 10, mas podem ser escritas como, encontrando suas frações equivalentes. Assim, $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$, $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$ e $\frac{1}{40} = \frac{25}{1000}$.

Considerando a possibilidade de apresentação de frações equivalentes pelo produto do numerador e denominador de uma fração por um mesmo número natural n, sendo $n > 0$, apresenta-se em contrapartida, frações irredutíveis como $\frac{1}{9}, \frac{4}{15}$ e $\frac{3}{11}$, não poderão ser escritas como frações equivalentes com denominadores de potência 10, pois não existem n tal que $9n$, $15n$ *e* $11n$ sejam uma potência de 10. Ou seja, toda "fração irredutível cujo denominador contenha algum fator primo[12] diferente de 2 ou 5 não é equivalente a uma fração decimal. (Pois 2 e 5 são os únicos fatores primos que ocorrem numa potência de 10)." (LIMA, 1991, p. 159).

Nesse caso, admitiu-se a fração decimal como ilimitada, para que pudessem representar as frações com denominadores primos diferentes de 2 e 5 como uma fração decimal, chamadas de dízimas periódicas. Por exemplo, a fração $\frac{1}{9}$, a maneira bem conhecida

---

[11] A colocação de parênteses significa que se considera a soma efetuada.

[12] "É todo número natural maior do que 1 que tem exatamente dois divisores distintos: o 1 e ele mesmo". Dante (2015, p. 151).

de transformá-la em fração decimal consiste em escrever 1 como 1,0 = 1,00 = 1,000 etc., e efetuar a divisão por 9, assim, $\frac{1}{9}$ = 0,111... Observando que "um número decimal não muda quando acrescentamos ou suprimimos zeros à sua direita." (DANTE, 2015, p. 219).

Uma dízima periódica é considerada como um valor aproximado da fração ordinária. Por isso pode-se escrever $\frac{1}{9}$ escolhendo para representá-la infinitas frações decimais como 0,1; 0,11; 0,111; etc. Quanto mais casas decimais forem consideradas, menor é o erro de aproximações com a fração ordinária.

Efetuando a divisão do numerador pelo denominador pode-se obter como resultado dois tipos de quocientes: quando a divisão é exata (com resto zero) um quociente com finitas casas decimais, exemplo, $\frac{1}{5} = 0{,}2$; e quando a divisão não é exata, ou seja, pode-se continuar fazendo sucessivamente divisões, obtendo infinitas casas decimais, como por exemplo, " $\frac{1}{7}$ = 0,142857142857... Nesse caso, o grupo de algarismos que se repete periodicamente é 142857. Esse é o período da dízima." (CENTURIÓN e JAKUBOVIC, 2010, p. 16).

Nota-se que a periocidade só aparece quando se busca representar uma fração ordinária na sua forma decimal.

A esses quocientes, são chamados de números decimais. Em que "a vírgula separa a parte inteira da parte decimal. Cada algarismo tem valor posicional dez vezes maior do que teria se estivesse uma 'casa' à direita." (DANTE, 2015, p. 220).

Outra forma de representação se origina quando são consideradas as frações com denominadores 100 ou frações equivalentes a ela. Chamados de porcentagem ou percentagem onde é trocado o denominador da fração pelo símbolo (%).

Exemplos: $\frac{25}{100} = 25\%$ (vinte e cinco por cento) e $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\%$ (setenta e cinco por cento).

> A utilização de porcentagem acontece desde a época do Império Romano (27 a.C. a 476 d.C.). O imperador Augusto (27 a.C. a 14 d.C.) impunha uma taxa de $\frac{1}{100}$ sobre os negócios realizados em leilões. O símbolo de porcentagem só apareceu muito mais tarde. No século XV, os escribas italianos começaram a abreviar a expressão 'por cento'. Algumas das abreviações foram: P100; p cento e pc° (DANTE, 2015, p. 202).

Então, se pode escrever um mesmo número fracionário, além de suas classes de equivalências, como frações equivalentes decimais, número decimal, ou porcentagem. Como por exemplo a fração $\frac{6}{30}$ representar em um mesmo sentido numérico os números $\frac{1}{5}, \frac{20}{100};\ 0{,}2, 20\%$; etc. .

Mas existem certos números na Matemática, como π, e, $\sqrt{2}$, etc., como afirma Lima (1991, p. 161) “que não são racionais, isto é, não podem ser expressos como quocientes de dois números naturais. Eles são chamados de *números irracionais*. Cada um deles é representado por uma fração decimal infinita não periódica”. Fazendo assim parte de um novo campo numérico chamado de Irracionais, que não será abordado nesta pesquisa.

Neste capítulo, traçando um panorama histórico por meio do resgate das questões pertinentes à origem das frações, é visto que, com a necessidade do homem em resolver situações práticas, como a medição, por exemplo, verificando a insuficiência dos números inteiros para resolução de problemas cotidianos, constatou-se da necessidade de extensão e construção do campo racional.

Roque (2012) cita que os egípcios produziam tabelas de cálculos que continham representações das somas de frações e, sempre que se necessitasse do resultado, recorriam-se às tabelas para as soluções. Isso nos remete a pensar que buscavam uma generalização matemática para empregar em casos distintos e a conjecturar as dificuldades de operar com os números fracionários desde os primórdios.

1.3 Aportes Teóricos para o Ensino dos Números Fracionários

Na prática docente, é comum observar que o conceito de números racionais e as suas operações fundamentais trazem grandes dificuldades aos alunos, em vista disto, nesta seção apresentam-se uma discussão de como são apresentados esses conceitos em sala de aula no decorrer das séries iniciais que compõem o Ensino Fundamental, alguns aspectos que as frações assumem de acordo com o contexto inserido e os obstáculos epistemológicos verificados nas respostas dos alunos frente às atividades com frações.

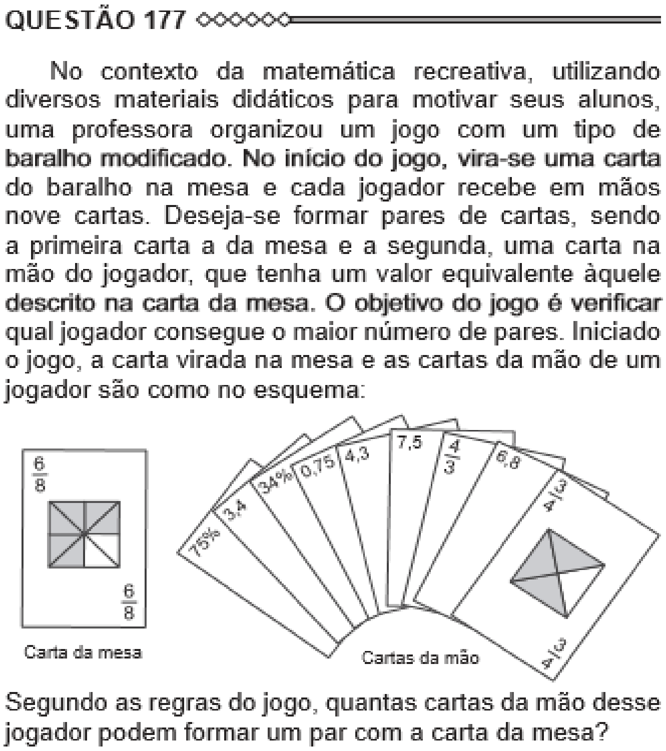
1.3.1 Apresentação dos conceitos racionais em sala de aula

No Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de 2015, a questão 177 (Figura 9) de Matemática aborda as representações de um número fracionário, de modo que a habilidade exigida é de resolver uma situação problema envolvendo conhecimentos sobre números racionais.

Segundo o portal de notícias brasileiro (G1 Globo.com, 26/10/2015), essa questão foi uma das 10 mais difíceis do ENEM 2015.

Nessa questão a carta virada que está na mesa é $\frac{6}{8}$. O aluno deveria interpretar o texto e comparar $\frac{6}{8}$ com os valores numéricos correspondentes que estão na mão do jogador. As possibilidades seriam 3 cartas - a fração equivalente $\frac{3}{4}$, o número decimal 0,75 e a porcentagem 75%, mas para tais conclusões é necessário que se identifique os tipos de representação de números racionais.

Figura 09 – Enem 2015: Questão de Matemática.



QUESTÃO 177

No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:

Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

Fonte: Estudante, 2015b.

O motivo dessa deficiência é que não foi construído realmente, o conceito de número racional, Toledo e Toledo (2010, p. 8) dizem que “quando os alunos são desafiados com questões simples como, por exemplo: $\mathbf{1-\frac{1}{3}}$; $\mathbf{4} \times \frac{1}{4}$; 2 – 1,4; 25% de 600, é muito comum estarem munidos, como estratégia de cálculo, apenas de regras decoradas à custa de grande esforço”.

De acordo com Barbosa (1966) existem vários fatores que convergem para essa fonte de dúvidas, tais como: a notação das frações (não é tão trivial a associação de uma parte através de dois números inteiros separados por um tracinho), a troca desses números por outros diferentes que represente o mesmo valor (frações equivalentes), os diferentes aspectos da fração (dependendo do contexto inserido), entre outros.

Um dos fatores de ordem didática que causam obstáculos e ocorrem com mais frequência é o da restrição em dar regras e não orientar o ensino por processos racionais, o que pode conduzir o aluno a um processo de aprendizagem mecânica.

> As habilidades que um indivíduo possui não aparecem de repente. Elas também resultam de um processo que ocorre por etapas. É uma evolução que se dá do concreto para o abstrato. Muitas vezes, a experiência concreta se realiza na escola, com materiais apropriados. Outras vezes, é a própria vivência que o aluno traz, aprendida no dia-a-dia (NETO, 1987, p. 35).

A construção do conceito de número por parte das crianças é a base de toda sua aprendizagem Matemática. É fundamental conforme Mandarino (2010) que se inicie o ensino deste conceito relacionando-o com objetos de natureza concreta, como por exemplo, atribuir o número a coleções de coisas, quantidades, códigos, idades, sequências, etc. e à medida que a aprendizagem acontece incluir novos campos numéricos e novas aplicações dentro desse processo.

> A experiência concreta se inicia com a manipulação curiosa, com o contato físico, com os sentidos. À medida que as experiências vão se acumulando, começam a surgir semelhanças e classificações, que levam à formação dos conceitos. Surge depois a capacidade de descrever, comparar, representar graficamente e, por fim, de equacionar e demonstrar (NETO, 1987, p. 35).

Toledo e Toledo (2010, p. 163) citam que “nos livros didáticos e nas salas de aulas, a introdução aos números racionais é dada com a ideia de fração, de modo bastante rígido”.

É comum iniciar o ensino apresentando frações contínuas e próprias, dizendo que um inteiro foi dividido em n partes e considerado m destas partes, utilizando como exemplos retângulos divididos, divisões em pizza ou barras de chocolates, etc. E como representação a fração $\frac{m}{n}$ em que $m < n$. Depois se apresentam as frações impróprias onde $m > n$ deixando uma lacuna de dúvidas na cabeça do aprendiz, visto que, ora divide-se o todo e pega partes, ora se divide o todo e pegam partes a mais que compõe esse todo.

Segundo Caraça (1970), o número fracionário surgiu pelo princípio da extensão e da impossibilidade de divisão exata. Pelos princípios da economia seria conveniente esse conteúdo oriundo de tão fácil interpretação ser apresentado como uma divisão não realizada, e como uma extensão dos números inteiros, utilizados para medição, contextualizados e de modo simples de apresentação.

Como por exemplo, uma maçã dividida igualmente entre três crianças. Nesse caso, a divisão com números naturais não se resolve o problema, uma vez que cada criança receberia 0 maçãs, sobraria 1 e ninguém sairia satisfeito. Com as frações, porém é possível fazer essa divisão de 1 por 3. Cada criança receberia $\frac{1}{3}$ da maçã.

E, gradativamente vai se apresentando as várias formas de representações dos números racionais conforme o contexto a que se apresenta, e provavelmente o aprendiz ancorará os conceitos em um mesmo campo cognitivo.

As primeiras experiências com cada campo numérico, conforme Mandarino (2010) são fundamentais para o bom desenvolvimento de todo o processo de abstração dos conceitos. Nesse caso o fato de oferecer situações cuidadosamente contextualizadas, possibilita ao aprendiz o uso da criatividade e a descoberta das características de cada campo numérico.

1.3.2 Aspectos de um número fracionário

Barbosa (1966) nos indica que no ensino das frações devem-se levar em conta os quatro diferentes aspectos que um número fracionário pode apresentar, sendo necessário que o ensino seja orientado por esses aspectos, ou seja, a fração, como parte de um todo de grandezas continuas, parte de um todo de grandezas discretas, uma razão e uma divisão indicada. Apesar disso, Mandarino (2010) ressalta que não faz sentido apresentar as classificações desses aspectos aos alunos, somente precisam ser explorados e incorporados em atividades diversificadas, com as ampliações dos tipos de problemas que vão enriquecendo as possibilidades de aplicações. Seguem-se os aspectos:

Primeiro aspecto - a fração representa parte de um todo de grandezas contínuas.

Entende-se esse ‘todo’ como um bloco intacto; exemplo: uma fruta; uma pizza, uma barra de chocolate, etc. A representação fracionária, nesse caso, indica a relação que existe entre um número de partes e o total das partes.

Exemplo: um chocolate que foi dividido em quatro partes e comido uma parte. Diz-se que comeu $\frac{1}{4}$ (uma parte, das quatro partes que formam o todo).

Nesta fase de aprendizado é importante oferecer à criança experiências concretas, como cita Mandarino (2010), e a partir destas, pode-se aos poucos introduzir a representação simbólica e as nomenclaturas.

Segundo aspecto - a fração representa parte de um todo de grandezas discretas.

Nesse aspecto, o ‘todo’ é construído de vários elementos separados (conjunto).

Exemplo: algumas crianças, alguns livros, uma dúzia de ovos, balas, etc. A representação fracionária indica a relação entre o número de elementos com o conjunto. A fração apresenta-se mais claramente em um sentido operatório. Observa-se, portanto, que é necessário delimitar a quantia de elementos e a conveniência de não exemplificar com coisas sem sentidos. Exemplo: uma pessoa dividida em três partes iguais, duas bolinhas de gudes divididas para três crianças, etc.

Terceiro aspecto – quando a fração representa uma comparação entre dois números naturais. Aspectos que permitirá apresentar os conceitos de porcentagem[13], representação muito utilizada para a vida prática.

"Essa ideia da fração está associada à de razão. Por exemplo, cinco em oito, dois em três, quatro em sete, etc." (DANTE, 2015, p. 175).

A fração representa a relação entre duas grandezas contínuas ou discretas, iguais ou diferentes. Os exemplos a e b representam cada caso, conforme cita Mandarino (2010, p. 112 - 113).

a) Fração como razão de uma grandeza contínua:

- Como comparação de duas medidas de uma mesma grandeza.

Exemplo: A razão da altura entre dois prédios, em metros, é de 2 para 5.

- E como razão de grandezas diferentes.

Exemplo: A velocidade é uma razão entre as grandezas distância e o tempo, ou seja, $\text{velocidade} = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}}$. Neste caso, a fração representa uma nova grandeza, com uma nova unidade de medida.

b) Fração como razão de uma grandeza discreta:

A fração também pode representar a comparação de dois subgrupos distintos de uma coleção de objetos. Por exemplo: em um grupo de 8 pessoas, 3 são mulheres e 5 são homens. Diz-se que a razão é de 3 para 5. É óbvio que quando se diz que a razão de mulheres para homens em uma cidade é de 3 para 5, não se limita a 8 habitantes.

Nesse caso, é necessário o esclarecimento de que essa razão representa o coeficiente de proporcionalidade, e que se pode a partir dele estabelecer-se qualquer número de habitantes e determinar a quantia de mulheres e homens, como apresentado no Quadro 01:

[13] "(ou percentagem) pode ser identificada como uma forma de expressar uma proporção em que uma das razões tem denominador 100. Quando falamos que a razão entre 1 e 4 é a mesma que a razão 25 e 100, usamos a expressão 'vinte e cinco por cento'". (PIRES, 2010, p. 66).

Quadro 01 – Representação da razão 3 para 5.

Habitantes	Mulheres	Homens
8	3	5
16	6	10
...	...	...
8×n	3×n	5×n

Fonte – Elaboração da pesquisadora, 10/01/2017.

Verifica-se que, à medida que se dobra o número de habitantes o mesmo ocorre com a quantia de mulheres e homens, e assim, sucessivamente. A ideia que todas essas frações $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{3000}{5000} = \cdots = \frac{3\times n}{5\times n}$ representam a mesma razão, fundamenta e dá sentido ao uso de simplificações de frações e explorações dos múltiplos.

Experiências desse tipo, afirma Mandarino (2010, p. 113), auxiliam os alunos a compreender razões anunciadas como resultados de várias pesquisas estatísticas, ainda que muito utilizadas em situações reais, não estão suficientemente presentes nos livros didáticos e nas salas de aula.

Quarto aspecto – A fração como uma divisão indicada.

Nesse aspecto o número fracionário $\frac{a}{b}$ é interpretado como notação da divisão $a \div b$ não realizada. Como a divisão de dois números inteiros quaisquer, considerando que o segundo não pode ser nulo. Ou melhor $\frac{a}{b} = a \div b$, com $b \neq 0$.

Como exemplo, dividir cinco folhas de papel para três crianças. Cada criança receberá $\frac{5}{3}$ (cinco terços) de folha.

Além desses quatro diferentes aspectos, apresentados por Barbosa (1966), Pires (2010, p. 57) acrescenta um quinto aspecto:

Quinto aspecto - A fração como um operador**.**

O significado da fração como operador diz respeito à fração que desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica. Essa ideia está presente, por exemplo, num problema do tipo ‘que número x deve multiplicar 3 para obter 2?’ Visto que, teremos a expressão $x \times 3 = 2$, então esse número será $\frac{2}{3}$, logo $x = \frac{2}{3}$.

As crianças não têm facilidades com as representações abstratas dessas ideias, por esse motivo os PCN (1998), ressaltam que é importante abordar os números racionais como uma extensão dos naturais, para que percebam que os números naturais são insuficientes para resolver determinados problemas. Desse modo, devem ser apresentadas aos alunos situações em que, usando apenas números naturais, não conseguiriam exprimir a medida de uma grandeza ou o resultado de uma divisão.

Segundo Mandarino (2010), a compreensão dos conceitos da fração como divisão acontece no final do Ensino Fundamental por requerer um aprofundamento do pensamento matemático, precisam ser abstraídos de suas representações concretas e ganhar certa independência delas.

A ação em preparar o aluno aos poucos para que ele possa chegar a essa abstração, requer uma boa estratégia de ensino. Também há de se considerar que, os alunos precisam realizar rupturas com as ideias construídas para os números naturais para aceitar ideias mais complexas.

1.3.3 Obstáculos epistemológicos na aprendizagem dos números racionais

Cinco obstáculos epistemológicos se apresentam como desafios para entendimento sobre os números racionais, conforme Pires (2010, p. 52), é necessário compreender que:

- Um número racional pode ser representado por diferentes escritas fracionárias. Ou seja, suas frações equivalentes.

Exemplo: $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}$, ... são algumas das possíveis representações do número $\frac{1}{3}$;

- A possibilidade de representações dos números racionais na forma decimal.

Exemplo: $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{1}{3} = 0{,}333$...

- O denominador da fração representa a divisão do todo.

Assim, quanto maior o número que está no denominador, em mais partes será dividido o todo, resultando em menores frações. Por exemplo: Comparando duas frações como $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ percebe-se que a parte maior é referente à metade e não à terça parte. No entanto, acostumadas com a relação $3 > 2$, as crianças acabam achando que $\frac{1}{3}$ é maior que $\frac{1}{2}$.

- Na comparação de dois números racionais na representação decimais, pressupõe-se que é maior o número decimal que tiver o maior valor apresentado em sua casa posicional, respeitando a ordem das casas, ou seja, comparando os inteiros, depois seus décimos, centésimos, milésimos e assim por diante. (DANTE, 2015).

Como exemplo, os números 0,5 e 0,25, no qual as crianças costumam indicar que 0,25 é maior que 0,5 relacionando com os números naturais que são maiores os que têm mais algarismos, no caso o que não ocorre com os números racionais, pois não obedecem ao mesmo critério.

Como os números decimais formam um sistema posicional, e 0,25 e 0,5 não têm partes inteiras, a comparação fica na observação da casa dos décimos, 5 é maior que 2 então 0,5 é maior que 0,25.

- Para os números racionais, não faz sentido definir seu antecessor e sucessor, uma vez que entre dois números racionais existem uma infinidade de outros.

Esses obstáculos epistemológicos apresentados pelos alunos, ao resolver questões com os números racionais, possibilitam ao professor identificar que, de certa forma, o aprendiz possui em sua estrutura mental as características dos números naturais e, por vezes, devem ser trabalhados e esclarecidos que os números racionais têm suas características próprias. Os usos e significados dos números racionais são diversos e importantes para lidar cotidianamente com informações necessárias ao exercício da cidadania.

Conforme argumentado anteriormente, operar com os números racionais é um quesito básico, um descritor necessário para resoluções de problemas e o desenvolvimento de outras habilidades.

As frações, para Mandarino (2010), são essenciais como nos cálculos algébricos que surgem inevitavelmente em problemas de geometria ou de grandezas e medidas. Ao chegar nesses estágios é importante que o aluno já tenha essas habilidades e, assim, possa se concentrar no próprio problema e não ficar impossibilitado de resolvê-lo devido às possíveis dificuldades operatórias capazes de impedi-lo.

Devendo o aprendiz apropriar-se dos significados dos conceitos e procedimentos matemáticos para saber aplicá-los em situações novas, é fundamental que tais conceitos e procedimentos sejam trabalhados e com a tal compreensão de todos os significados associados a eles.

Ausubel, Novak e Hanesien (1980), dizem que para a aprendizagem ser significativa[14], o aprendiz deverá ancorar os conceitos novos em seus subsunçores (conceitos presentes na estrutura cognitiva do aprendiz). Se não houver esse relacionamento, a aprendizagem será mecânica, de forma não substancial e provavelmente o aluno esquecerá com o passar do tempo.

Percebe-se a responsabilidade do professor, em sua prática escolar, apresentar os conceitos fundamentais dos números racionais de maneira que o aluno internalize e se tornem

---

[14] "Alteração quer das informações recentes adquiridas, quer do aspecto especificamente relevante da estrutura cognitiva, à qual estão ligadas as novas informação." (AUSUBEL, 2000, p. 3).

subsunçores para novos conhecimentos. Para isso, é preciso planejar o ensino com estratégias que promovam significados para o aluno em uma perspectiva qualitativa visando à aprendizagem significativa.

1.4 Fundamentos Teóricos para a Prática Pedagógica

Ausubel, Novak e Hanesien (1980, p. 19) citam que muitos psicólogos tenderam a classificar diferentes tipos de aprendizagens, considerando um único aspecto, independente do que está sendo aprendido, admitindo que "a natureza da mudança chamada aprendizagem era fundamentalmente à mesma", sem levar em consideração o ato de diferenciar esses tipos de aprendizagem, em termos do tipo de mudança na capacidade por eles exigidas.

Segundo Ferraz e Belhot (2010) na Taxonomia de Bloom[15], a aprendizagem ocorre simultânea e interativamente em, pelo menos, três grandes domínios: o cognitivo (que abrange a aprendizagem intelectual), o afetivo (que abrange os aspectos de sensibilização e gradação de valores) e o psicomotor (que abrange as habilidades de execução de tarefas que envolvem o aparelho motor). Este processo pode ser analisado a partir de diferentes perspectivas, de forma que há diferentes teorias de aprendizagens.

A teoria da Assimilação, de David Ausubel, pressupõe como principal processo de aprendizagem, o escolar. Com o foco no processo da aprendizagem no contexto de sala de aula, defende que a aprendizagem significativa ocorre tanto por receptividade, quanto por descoberta, em um processo ativo, exigindo do aprendiz ação e reflexão, facilitada pela organização das matérias e das experiências de ensino.

Ausubel distinguiu os tipos principais de aprendizagem (automática e significativa, formação de conceito, solução de problemas verbais e não verbais) que ocorrem em classe, de maneira individual, analisando dois processos decisivos que atravessam por todos eles. O primeiro é a distinção entre aprendizagem por recepção e aprendizagem por descoberta e outro entre a aprendizagem automática (por decoração) e significativa, que se apresenta nas próximas seções.

1.4.1 Aprendizagem por recepção

[15] Estrutura de organização hierárquica de objetivos educacionais, resultante do trabalho de vários especialistas de universidades dos Estados Unidos, liderada por Benjamin S. Bloom, no ano de 1956,

A **aprendizagem receptiva** deve ser entendida como aquela à qual o aprendiz recebe um conteúdo de forma pronta e acabada, como por exemplo, a explanação de um conceito apresentado no livro didático. Dessa forma, Ausubel, Novak e Hanesien (1980, p. 20) reforçam que o aluno precisa "somente internalizar ou incorporar o material (uma lista de sílabas sem sentido ou adjetivos emparelhados; um poema ou um teorema geométrico), que é apresentado de forma a tornar-se acessível ou reproduzível em alguma ocasião futura".

Poderá ocorrer de duas formas: automática (mecânica) e significativa, ou seja, essas duas classificações dependerão, exclusivamente, da recepção cognitiva e da predisposição do aprendiz.

A aprendizagem receptiva ocorrerá de forma mecânica em duas situações:

- Se a tarefa ou matéria de aprendizagem apresentada ao aluno não for potencialmente significativa nem se torna significativa no processo de internalização;
- Se o aluno não possuir conceitos prévios sobre determinados assuntos apresentados a ele (os subsunçores).

Assim, a recepção será ruim, os conceitos ficarão por momentos memorizados, não serão assimilados de forma substancial e não serão internalizados. Isso significa que a aprendizagem foi automática. Entretanto, se a tarefa ou matéria de aprendizagem for potencialmente significativa e compreendida ou tornada significativa no processo de internalização, a aprendizagem será considerada significativa.

> Grande parte da confusão nas discussões de aprendizagem escolar tem origem na deficiência de se reconhecer que as aprendizagens automática e significativa não são completamente dicotomizadas. Embora sejam *qualitativamente* descontínuas em termos dos processos psicológicos subjacentes *a cada uma* e, portanto, não possam estar situadas em pólos opostos do mesmo contínuo, há dois tipos intermediários de aprendizagem que compartilham algumas das propriedades, tanto da aprendizagem automática como da significativa (por exemplo, a aprendizagem representacional ou aprendizagem de nomes de objectos, eventos e conceitos). Além disto, ambos os tipos de aprendizagem podem ocorrer concomitantemente na mesma tarefa de aprendizagem (AUSUBEL, NOVAK e HANESIEN, 1980, p. 20).

Podem-se distinguir três tipos de aprendizagem por recepção significativa: a representacional, conceitual e a proposicional.

A **aprendizagem representacional,** "aproxima-se da aprendizagem por memorização. Ocorre sempre que o significado dos símbolos arbitrários se equipara aos referentes (objectos, acontecimentos, conceitos[16]) e tem para o aprendiz o significado, seja ele qual for que os referentes possuem." (AUSUBEL, 2000, p. 1).

Consideram-se quatro sistemas representacionais dominantes, são eles:

O visual, que faz uso da visão como forma para obter e reter informações, tais como abstrair as características de um objeto;

O cinestésico, em que se apropria de experimentos e materiais concretos para obter o conhecimento;

O auditivo, que aprende pela oralidade;

E o digital, que tendem a buscar a lógica das coisas.

Apesar do uso de todos os quatro sistemas, na maioria das vezes as pessoas tendem-se a um que usam mais. E isso, explica em partes o porquê de pessoas distintas terem diferentes memórias de um mesmo evento. Cada ser é singular e, portanto, os significados para todos os referentes também serão singulares. "Devido à estrutura cognitiva de cada aprendiz ser única, todos os novos significados adquiridos são, também eles, obrigatoriamente únicos." (AUSUBEL, 2000, p. 1).

Na **aprendizagem conceitual** definida por Ausubel (2000) existem dois métodos gerais:

O processo de formação de conceitos, que ocorre principalmente em crianças, adquirido através de experiência direta, através de fases sucessivas de formulação de hipóteses, testes e generalização e;

A assimilação conceitual, que ocorre na fase escolar, onde o processo de aprendizagem ocorre a partir de ancoragens com os conceitos formados, sendo um processo continuo de um conceito subordinado a um conceito subordinante de uma forma não arbitrária e substancial na construção do conhecimento.

A **aprendizagem proposicional** busca compreender o significado de ideias em forma de proposição. Ocorre quando uma ideia potencialmente significativa é relacionada às ideias superordenadas de conteúdos específicos, na estrutura cognitiva do aprendiz. Pode ser subordinada, subordinante ou uma combinação das duas.

A aprendizagem proposicional subordinada ocorre quando uma nova informação adquire um significado, em interação com os subsunçores o novo material fica subordinado à estrutura cognitiva. Classifica-se de acordo o relacionamento entre as proposições. Diz-se derivativa, se a nova proposição exemplifica ou explica uma ideia pré-existente na estrutura

---

[16] Definem-se "como objetos, acontecimentos, situações ou propriedades que possuem atributos específicos comuns e são designados pelo mesmo signo ou símbolo." (AUSUBEL, 2000, p. 2).

cognitiva ou, correlativa, se a nova proposição, segundo Ausubel (2000, p. 3), "for uma extensão, elaboração, modificação ou qualificação de proposições previamente aprendidas".

Quando um conceito, potencialmente significativo e mais geral do que as ideias que já estão na estrutura cognitiva do aprendiz é adquirido, e os conceitos que já existiam são subordinados a esse novo conceito, diz-se que a aprendizagem é subordinante.

Finalmente, a aprendizagem proposicional por combinação da subordinação com a subordinante, conforme Ausubel (2000, p. 3), "não se pode relacionar com ideias especificas subordinantes ou subordinadas da estrutura cognitiva do aprendiz, mas pode relacionar-se a uma combinação de conteúdos geralmente relevantes, bem como outros menos relevantes, em tal estrutura".

Nesta seção apresentou-se a aprendizagem por recepção que se distingue da aprendizagem por descoberta, pois são processos distintos, ressaltam-se essas diferenças no próximo tópico.

1.4.2 Aprendizagem por descoberta

A **aprendizagem por descoberta** é diferente da aprendizagem por recepção, porque o conceito que vai ser aprendido não é apresentado, mas deve ser incitado para a descoberta pelo próprio aprendiz, seja a formação de um conceito ou uma solução de um problema, antes que possa ser significativamente integrado à sua estrutura cognitiva.

> O aluno deve reagrupar informações, integrá-las à estrutura cognitiva existente e reorganizar e transformar a combinação integrada, de tal forma que dê origem ao produto final desejado ou à descoberta de uma relação perdidas entre meio e fins. Concluída a aprendizagem por descoberta, o conteúdo descoberto torna-se significativo da mesma forma que o conteúdo apresentado torna-se significativo na aprendizagem significativa (AUSUBEL, NOVAK e HANESIEN, 1980, p. 21).

A prioridade dessa tarefa em descobrir algo requer que o aprendiz seja ativo na produção de seu conhecimento. O aluno se depara com um labirinto em que deverá escolher a solução que resolva o desafio proposto, levando em consideração critérios segundo seu entendimento e ao final da etapa da aprendizagem por descoberta, internalizar o que descobriu em sua estrutura cognitiva.

A aprendizagem receptiva e a aprendizagem por descoberta são dois processos distintos, desempenhando um papel importante na construção do conhecimento do aprendiz.

Em geral, segundo Ausubel, Novak e Hanesien (1980), grande parte da aprendizagem formal é adquirida por recepção, enquanto a aprendizagem não formal, como resoluções de problemas cotidianos, é adquirida por descobertas. No entanto, algumas superposições de funções supostamente existem, por exemplo, utiliza-se a aprendizagem por recepção para resolução de problemas cotidianos, assim como a aprendizagem por descobertas é comumente usada em sala de aula para aplicar, ampliar, clarificar, integrar e avaliar matérias. Em situações experimentais, a aprendizagem por descoberta fornece *insight* ao método cientifico e leva à redescoberta de proposições já conhecidas.

1.4.3 Aprendizagem significativa em sala de aula

Ausubel, Novak e Hanesien (1980) citam que há discussões sobre a aprendizagem receptiva ser invariavelmente automática e a aprendizagem por descoberta inerente e necessariamente significativa. Embora existam muitas discussões em torno dessas duas dimensões de aprendizagem, eles afirmam que ambas as suposições são infundamentadas e baseadas em crenças. Eles enfatizam ainda que, se há um único conhecimento que se possui realmente e se compreende, esse é o conhecimento que se descobre por conta própria.

> O "método da descoberta" pode ser especialmente adequado a certas finalidades como, por exemplo, a aprendizagem de procedimentos científicos em uma certa disciplina, porém, para a aquisição de grandes corpos de conhecimento, é simplesmente inexequível e, de acordo com Ausubel, desnecessário. Segundo essa linha de pensamento, não há, então, por que criticar o "método expositivo", ou a instrução organizada através de linhas de aprendizagem receptiva, quanto a seus méritos. Podem ser ineficientes se forem mal empregados, porém, na medida em que facilitarem a aprendizagem receptiva significativa, poderão ser mais eficientes do que qualquer outro método ou abordagem instrucional, no que se refere à aquisição de conteúdo cognitivo (MOREIRA, 2016, p. 10).

O método de ensino dominante nas instituições escolares é a transferência de conteúdos por aulas expositivas dialogadas, organizadas conforme o currículo e o planejamento sequencial de conceitos hierarquizados de acordo com as propostas apresentada nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, e propostos pelos livros didáticos (conteúdos não arbitrários), em que professor é um mero transmissor do conhecimento e o aluno um receptor dos conceitos.

Ausubel, Novak e Hanesien (1980), ressaltam que, em alguns momentos das aulas poderá o estudo ser dirigido pelo método da descoberta, considerada altamente significativo, para transmitir um conteúdo ou partes de um conteúdo de um componente curricular.

Todavia, nem sempre poderá ser utilizado, considerando a aprendizagem por descoberta, o aluno poderá precisar de um tempo maior do que a hora aula para descobrir os conceitos ou talvez nem os perceba sem a ajuda do professor.

Dependendo dos conceitos envolvidos, não será viável nem eficiente aplicar essa metodologia de ensino, devendo ser considerado a aprendizagem por recepção como método mais eficiente; como exemplo, os algoritmos, que exigem do aluno o entendimento de regras, um deles a racionalização, que consiste na obtenção de uma fração com denominador racional, equivalente a uma anterior, que possui um ou mais radicais em seu denominador. Contudo, uma proposição mais aceitável, condição sobre a qual a aprendizagem ocorre, deve ser calcada em atividades práticas potencialmente significativas capazes de favorecer o aprendizado.

A aprendizagem por recepção, por sinal a mais evidenciada, poderá ser ou não significativa dependendo dos fatores de transmissão e a recepção cognitiva do aprendiz.

> O conceito central da teoria de Ausubel é o de aprendizagem significativa, um processo através do qual uma nova informação se relaciona, de maneira substantiva (não-literal) e não arbitrária, a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo. Neste processo a nova informação interage com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel chama de "conceito subsunçor" ou, simplesmente "subsunçor", existente na estrutura cognitiva de quem aprende (MOREIRA, 2016, p. 7).

Na medida em que a educação do indivíduo é formal e a aprendizagem por recepção evidente, convém ao professor utilizar-se de práticas e estratégias de ensino para aferir o interesse e a motivação do aprendiz. Para Ausubel, Novak e Hanesien (1980), a aprendizagem por recepção é significativa quando o aprendiz relaciona de forma não arbitrária e substantiva (não literal) uma nova informação à outra que já lhe são familiares, e o aluno adota uma estratégia similar para assim proceder.

De acordo com as relações que ocorrem entre um novo conceito e a estrutura mental do aprendiz, seja no âmbito escolar ou informal, a aprendizagem poderá ser mecânica ou significativa. Ainda por Ausubel, Novak e Hanesien (1980), na aprendizagem formal o processo é sistemático e interativo de troca de informações entre pessoas de uma dada comunidade, com o propósito específico de ajudá-las a elaborar conhecimentos e significados, incorporando-os à sua estrutura cognitiva, enquanto a não formal poderá ocorrer de forma arbitraria através de leituras, assistir vídeos de aulas, manipulando materiais, com jogos etc. Porém o melhor âmbito para utilização e melhoramento sistemático da aprendizagem por recepção e da retenção significativa – para a aquisição e retenção de conhecimentos – reside nas práticas de instrução formais das escolas.

> O conhecimento é significativo por definição. É o produto significativo de um processo psicológico cognitivo ("saber") que envolve a interacção entre ideias "logicamente" (culturalmente) significativas, ideias anteriores ("ancoradas") relevantes da estrutura cognitiva particular do aprendiz (ou estrutura dos conhecimentos deste) e o "mecanismo" mental do mesmo para aprender de forma significativa ou para adquirir e reter conhecimentos (AUSUBEl, 2000, p. 4).

Quando há aprendizagem significativa pode-se dizer que houve conhecimento, pois o conhecimento é a resultante do processo de ancoragem, e se tornam novos subsunçores para novos conhecimentos. Assim, quando a aprendizagem ocorre, significa que os conceitos se uniram em um só compartilhamento e ampliaram a estrutura cognitiva do aprendiz, ou seja, ocorreu a aprendizagem significativa e a aquisição do conhecimento sobre o assunto.

> As ideias de Ausubel sugerem aos aprendizes os seguintes princípios para facilitar a assimilação de conteúdos:
> 1. As ideias mais gerais de um assunto devem ser apresentadas primeiro ao aprendiz e então, progressivamente, devem ser diferenciadas em termos de seus detalhes e de suas especificidades.
> 2. Os materiais instrutivos devem tentar integrar o material novo com informação prévia através de comparações e da conexão recíproca entre ideias novas e antigas. (OLIVEIRA e PACHECO, 2010 p. 39).

O ensino escolar deve priorizar a ação do aluno sobre o seu próprio meio e promover as condições necessárias a compreensão efetiva dos conceitos, através de instrumentos adequados e\ou adaptados potencialmente significativos, oferecendo condições necessárias a formação de conceitos e a compreensão para promover a aprendizagem significativa.

A Teoria da Assimilação, uma teoria cognitivista e construtivista, tem por objetivo maior valorizar o que o aluno já sabe. Assim, sua leitura nos remete a pensar rigorosamente em como se dá o processo de ensino e aprendizagem dos números fracionários, a conhecer seus conceitos fundamentais e aprofundar na realidade da apresentação desses conceitos em sala de aula.

> A própria história dos conceitos pode sugerir caminhos de abordagem deles, bem como os objetivos que se pretendem alcançar com eles. Por exemplo, isso fica evidente quando se percebe que a ampliação dos campos numéricos historicamente está associada à resolução de situações-problema que envolvem medidas (PCN, 1998, p. 43).

Então, como ponto de partida nesta pesquisa, procurou-se investigar os conhecimentos prévios que os sujeitos tinham sobre os números fracionários (que para Ausubel atuam como subsunçores ou ancoradouros dos novos conhecimentos), e verificar se com o uso de materiais manipuláveis dinâmicos e digitais favoreceriam a formação dos conceitos supracitados, os quais serão apresentados no próximo capítulo.

CAPÍTULO 2 – MATERIAIS DIDÁTICOS UTILIZADOS NA PESQUISA

“Conte-me e eu me esqueço. Mostre-me eu apenas me lembro. Envolva-me e eu aprendo”. (Confúcio)

O capítulo anterior trouxe os aportes teóricos que fundamentaram esta pesquisa, nos quais foram apresentados os conceitos dos números fracionários, uma discussão sobre como os números racionais são apresentados em sala de aula e o processo pelo qual ocorre a aprendizagem significativa. Neste capítulo serão apresentados os materiais didáticos – os Mapas Conceituais, os Materiais manipuláveis e digital - utilizados na investigação da pesquisa, algumas experiências e considerações relacionadas ao ensino e a aprendizagem da Matemática e para concluir será explicitado os motivos da escolha desses materiais.

2.1 Mapas conceituais como Instrumento de Investigação

Mapa Conceitual, como o nome já sugere, é uma estrutura esquemática para representar um conjunto de conceitos[17] imersos numa rede de proposições. Ele pode ser entendido como uma representação visual utilizada para partilhar significados.

Segundo Oliveira e Pacheco (2010 p. 39), foi criado por Joseph Donald Novak na Universidade de Cornell na década de 1960, que fundamentou suas pesquisas nas teorias de David Ausubel que, por sua vez, foi influenciado pela teoria cognitiva do desenvolvimento de Jean Piaget. Novak entende que a aprendizagem significativa “envolve a assimilação de conceitos e de proposições novas em estruturas cognitivas preexistentes”. Então propõe o uso de diagramas (mapas) especiais para “estimular e organizar a geração e a comunicação de ideias complexas”.

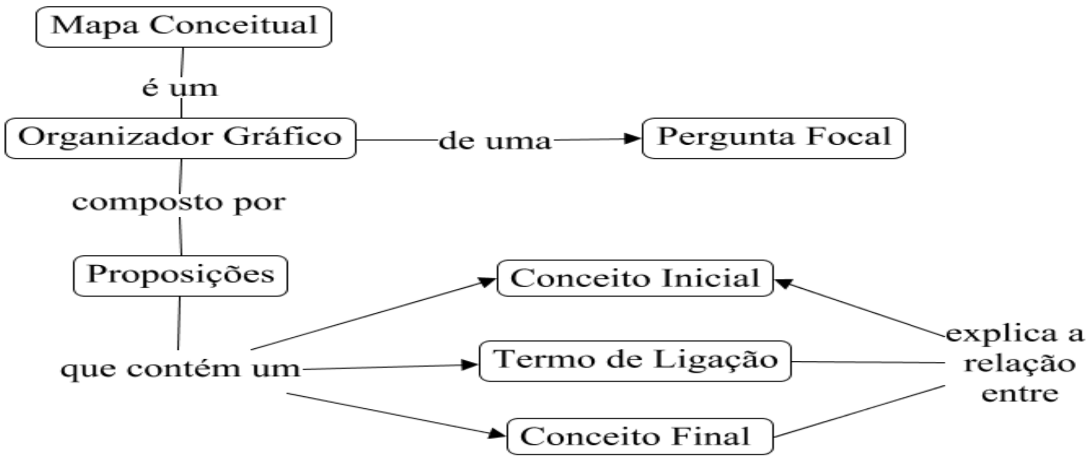
Podem ser criados/editados através de ferramentas digitais tais como *Cmap Tools* desenvolvido pelo IHMC *(Institute for Human & Machine Cognition*) disponíveis para *donwload* no *site* em:<https://goo.gl/XBFeIj>.

Os mapas conceituais mais comuns são os do tipo hierárquico, teia de aranha e de fluxograma. Segundo Oliveira e Pacheco (2010), as estruturas do mapa conceitual são dependentes do contexto no qual ele será usado, logo, antes de começar a desenhá-lo, é

[17] São “objetos, acontecimentos, situações ou propriedades que possuem atributos específicos comuns e são designados pelo mesmo signo ou símbolos.” (AUSUBEL, 2000, p. 2).

necessário traçar os objetivos, que devem ser alcançados com os mapeamentos, o segmento de texto, o problema ou pergunta particular que o aprendiz vai apresentar. Suas estruturas se definirão no momento de organização e relação de um conceito com os outros. Também é útil selecionar um domínio de conhecimento o mais restrito possível para desenhar o primeiro mapa conceitual.

Figura 10 – Exemplo de um Mapa Conceitual.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 30/10/2016.

De acordo com Correia (2015), **c**om esse organizador gráfico pode-se representar um conhecimento de forma sistematizada, sendo que as proposições mapeadas os diferenciam de outros organizadores gráficos, tais como mapas mentais, infográficos, fluxogramas, etc.

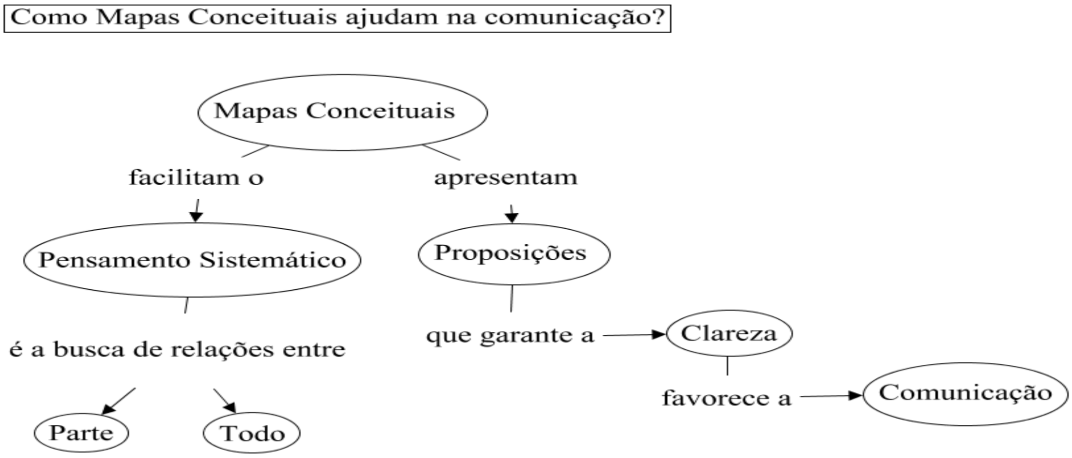
As proposições são o conjunto formado pelo conceito inicial, um termo ou frase de ligação e um conceito final, como exemplificado na Figura 10. A frase de ligação por sua vez a rigor precisa conter um verbo formando uma oração, pois externaliza a relação conceitual entre o conceito inicial e o conceito final, por isso, é tão importante colocar setas para indicar o sentido de leitura.

Em síntese, os elementos que constituem um mapa conceitual são os seguintes:

- Conceito: representado graficamente por um círculo, oval ou retângulo;
- Frase de ligação: que forma as unidades semânticas (unidades de significado) e
- As setas ou linhas: que direcionam o sentido da leitura.

Como exemplo, observa a Figura 11.

Figura 11 – Exemplo de um Mapa Conceitual.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 05/02/2017.

"As proposições constituem uma declaração significante. Às vezes as proposições são chamadas unidades semânticas ou unidades de significado." (OLIVEIRA e PACHECO, 2010, p. 36).

Segundo Correia (2015), o grau de clareza semântica das proposições é garantido pela frase de ligação quando esta apresenta um verbo, explicitando as relações entre os conceitos. Cada proposição carrega um conteúdo semântico, claro e preciso, passível de um julgamento. Podendo ser avaliado se está certo ou errado, e, se um conteúdo revelado é conveniente ou não ao tema que está em debate. Por isso é importante definir uma questão focal que vai orientar a construção do mapa conceitual. O conteúdo é revelado de acordo com o verbo do termo de ligação.

Os relacionamentos entre conceitos indicados por setas ou linhas conectando dois ou mais conceitos direcionam e dão sentido à leitura. A combinação de imagens e conteúdos na forma de textos visa tornar mais prática e fácil a leitura das informações, favorecendo a transmissão das relações conceituais do mapeador.

Ainda Oliveira e Pacheco (2010) reforçam que os mapas conceituais podem ser utilizados como um instrumento de apoio ao ensino e aprendizagem, pois com o mapeamento de uma questão focal em uma rede de proposições, enfatizam as concepções cognitivas que fundamentam a teoria da aprendizagem significativa.

> A teoria da assimilação de Ausubel, apropriada por Novak para formular os mapas conceituais, pressupõe que cada novo conceito, para ser bem aprendido pelo aluno, precisa ser vinculado a conceitos preexistentes. Ausubel afirma que é necessário que o novo material a ser aprendido, para formar um novo conceito, precisa ser potencialmente significativo para acentuar no aluno a predisposição para o aprendizado (OLIVEIRA e PACHECO, 2010, p. 44).

Para construir mapas conceituais espera-se do aluno produção individual, no qual, deverá descrever e relacionar os conceitos hierarquicamente internalizados por ele. Nesse momento, segundo Novak e Gowin (1984), o aluno busca dentro de sua estrutura mental tudo o que está relacionado com o tema investigado, exteriorizando seus conhecimentos. Então, essa exigência possibilitará ao aluno aprender significativamente. Uma vez que, a aprendizagem é uma questão de interesse pessoal do aprendiz e não pode ser compartilhada. Observando que se acaso o aluno não domina certo assunto, o professor poderá orientá-lo, e, fornecer outra oportunidade para que construa agora seu mapa, significativamente.

> A elaboração de mapas de conceitos é uma técnica para patentear exteriormente conceitos e proposições. Até este momento, só se podem fazer conjecturas sobre o grau de precisão com que os mapas conceptuais representam os conceitos que possuímos, ou a gama de relações entre conceitos que conhecemos (e que podemos expressar como proposições). É indubitável que, no processo de elaboração dos mapas, podemos desenvolver novas relações conceptuais, especialmente se procurarmos activamente construir relações preposicionais entre conceitos que até então não considerávamos relacionados: Os estudantes e os professores fazem notar frequentemente, durante a elaboração de mapas conceptuais, que reconhecem novas relações e portanto novos significados (ou pelo menos significados que eles não possuíam conscientemente antes de elaborarem o mapa). Neste sentido, a elaboração de mapas de conceitos pode ser uma actividade criativa e pode ajudar a fomentar a criatividade (NOVAK e GOWIN, 1984, p. 33).

A avaliação é parte integrante do processo de ensino e aprendizagem, de modo que o principal foco é verificar os avanços dos alunos em relação às metas e objetivos estabelecidos e reorientar as práticas do professor em sala de aula, possibilitando-o ofertar sentido significativo às suas aulas, direcionando os alunos para uma aprendizagem significativa.

> Avaliar não significa constatar o que ocorreu, mas fazer um balanço entre o que se pretendia e o que foi conseguido. É algo que compromete muito o educador, mas também é o único instrumento capaz de apontar em que direção e com que intensidade caminha o desenvolvimento do aluno (NETO, 1987, p. 41).

Conjectura-se que com mapeamento de uma questão, o professor terá informações sobre como está se desenvolvendo a aprendizagem do aprendiz do ponto de vista conceitual, possibilitando interferência e esclarecimentos dos conceitos ou proposições que não estão esclarecidos ou adequadamente apresentados nas construções.

Oliveira e Pacheco (2010) dizem que ao fazer a leitura de um mapa conceitual estamos frente ao desenho cognitivo dos conceitos que o aprendiz possui. As setas ou linhas de ligação nos indicam os relacionamentos que um conceito tem com o outro, um conceito mais acima e outros abaixo a subordinação de um para com o outro. As ligações cruzadas nos ajudam a perceber como alguns domínios do conhecimento, representados no mapa, estão relacionados entre si, e constatar o nível de abstração de certos conceitos e até mesmo os conceitos inconscientes que o aprendiz possui.

Segundo Gava, Menezes e Cury (2002), em seu artigo sobre Aplicações de Mapas Conceituais na Educação como Ferramenta Metacognitiva, relatam que Mapas Conceituais podem ser usados para esclarecer ou descrever as ideias que as pessoas têm sobre um determinado assunto. E que usadas como avaliações nos processos de aprendizagem são representações explícitas da estrutura cognitiva. Pode-se ter uma clareza mais próxima do conhecimento prévio do aprendiz, ponto de partida para a aprendizagem significativa. Uma vez que retrata como o aprendiz estrutura, hierarquiza, diferencia, relaciona, discrimina e integra os conceitos de um assunto em observação, por exemplo. Eles consideram essas construções como uma fotografia, pela observação de várias fotografias (vários mapas construídos), de diferentes momentos do processo, possibilita acompanhar o desenvolvimento cognitivo do aprendiz e melhorar o *feedback* oferecido a ele.

Moreira (2012) cita na revisão do artigo sobre Mapas Conceituais e Aprendizagem Significativa que como instrumento de avaliação da aprendizagem, mapas conceituais podem ser utilizados para se obter uma visualização da organização conceitual que o aprendiz atribui a um dado conhecimento. É uma técnica não tradicional de avaliação que busca informações sobre os significados e relações significativas entre conceitos-chave da matéria de ensino segundo o ponto de vista do aluno, sendo mais apropriada para uma avaliação qualitativa ou formativa, da aprendizagem.

Toigo e Moreira (2008), em suas experiências sobre o uso de mapas conceituais como instrumento de avaliação, em três disciplinas do curso de educação física, ilustra a potencialidade dos mapas conceituais como facilitadores da aprendizagem significativa. Relatam que mapas conceituais usados para o ensino permitem investigar mudanças na estrutura cognitiva dos alunos durante a instrução. Os alunos produzem seus mapas em versões sequenciais, de acordo com o ensino e assim ficam passíveis a julgamentos, comparações e a intervenção pedagógica. Ao invés de decorar definições de conceitos, os alunos explicavam as relações construindo ao longo do curso todo seu conhecimento.

Para Novak segundo Oliveira e Pacheco (2010, p. 43), “os sucessivos aperfeiçoamentos de um mapa conceitual é uma operação que se identifica com altos níveis de desempenho cognitivo do aprendiz, ou seja, com a possibilidade de efetuar auto-avaliação e síntese do conhecimento”. Ao elaborar um mapa, provavelmente, as imprecisões conceituais ficarão claras, é possível verificar aquilo que o aluno já conhece e o que precisa estudar mais, isso, possibilita ao professor buscar estratégias para uma correção, buscando unificar o conhecimento.

Há discussões que giram em torno de uso dos mapas conceituais como instrumentos de avaliação, uma delas é de como mensurar valores para as proposições certas ou erradas. Porém nesta pesquisa, sua utilização se restringiu na possibilidade de revelar os conceitos prévios dos alunos sobre números fracionários, ficando em aberto este questionamento para uma pesquisa futura.

Gouveia *et al.* (2012), traz uma reflexão sobre o que é avaliar e para que avaliar? E nos remete a pensar sobre os avanços na área da avaliação educacional a partir do século XX, que teve como base o princípio de educabilidade, isto é a ideia que todos podem aprender. Instiga-nos a refletir sobre o papel da avaliação formativa; avaliação que nos proporciona verificar ao longo do processo, e em várias etapas a aprendizagem do aluno e sua maneira de pensar, com enfoque de reorientar o trabalho pedagógico e apoiar a busca de novos métodos e estratégias que auxiliem o aluno aprender melhor.

Essa forma de avaliar descaracteriza as avalições tradicionais, uma vez que seu enfoque não é nos registros dos fracassos ou sucesso através de notas ou conceitos nem, tampouco, na manutenção de aprovação ou reprovação, mas em entender o significado do desempenho do aluno frente aos desafios propostos. Com o propósito de análise do processo de aprendizagem, como o aluno interpretou o problema, quais foram as etapas percorridas, quais as dificuldades encontradas e quais as estratégias de resolução que utilizou. Trata-se, portanto, de uma avaliação que tem como finalidade diagnosticar e apontar caminhos a serem percorridos. Sendo assim, uma avaliação a serviço da aprendizagem.

Ainda Gouveia *et al.* (2012) citam vários instrumentos de avaliações, tais como prova objetiva, operatória, observação e registro, etc., que de acordo com suas dimensões pedagógicas contribuem com o ensino aprendizagem.

Pode-se observar que o uso de mapa conceitual como instrumento de avaliação apresenta características de uma avaliação operatória, que é formulada com questões abertas para avaliar o desempenho de operações mentais, tais como a análise, a comparação, a generalização e a interpretação. Sendo que o professor poderá delimitar a etapa de construção do conhecimento a que pretende avaliar e mapear as possíveis linhas de raciocínios percorridas de acordo com a pergunta.

A partir das avaliações é possível o professor propor métodos e estratégias de ensino, considerando a diversidade de ritmos e o processo de aprendizagem dos alunos. Selecionar e adaptar materiais didáticos auxiliadores que contribuam para a abstração dos conceitos oferecendo atividades com graus variados de compreensão que permitam aproximações com o conhecimento.

Nas próximas seções apresentam-se duas sugestões de auxiliadores, os Materiais Didáticos manipuláveis e digitais, discorre-se sobre a definição, função e a importância do uso dos materiais didáticos para o ensino e aprendizagem da Matemática, dando ênfase à resolução de uma questão sobre as frações com o uso dos materiais didáticos, para que se reflita sobre sua eficácia no processo de ensino e aprendizagem.

2.2 Materiais Didáticos para o Ensino dos Números Racionais

Material didático (MD), definido por Lorenzato (2009), é qualquer instrumento útil que dê suporte auxiliar ao professor /aluno no processo ensino e aprendizagem.

Exemplos: um giz, uma calculadora, um filme, um livro, uma embalagem, entre outros quaisquer.

Os MD’s podem desempenhar várias funções conforme o objetivo a que se almeja. Manoel Jairo Bezerra (1962, pp. 10-13, apud RÊGO e RÊGO, 2009, p. 42), nos diz que suas principais funções são “auxiliar o professor a tornar o ensino da Matemática mais atraente e acessível”, o que despertará no aprendiz o interesse no estudo dessa ciência.

Porém Lorenzato (2009) diz que, é preciso ter clareza para quais finalidades serão utilizados os MD’s, se para introduzir ou rever um assunto, motivar os alunos, auxiliar na memorização de resultados ou para facilitar a redescoberta pelos alunos. Assim, a escolha dos MD’s será mais plausível ao que se espera. Logo a escolha dos MD’s sobre quais são mais significativas para os alunos e integrá-los dentro de suas vivências é uma forma de o professor ajudá-lo a interpretar e assimilar os conceitos novos.

Como citado acima, qualquer instrumento utilizado ao processo de ensino e aprendizagem pode ser considerado como sendo um recurso didático, assim não há possibilidade de abordar a utilização didática da variedade de materiais que existem para se utilizar no ensino da Matemática. Por essa razão, são denominados por Lorenzato (2009) de Material Didático Manipulável Concreto, e classificado como:

- Estáticos - aqueles que suas formas são definidas e não se pode alterar e
- Dinâmicos - aqueles cuja estrutura física do material vai mudando à medida que ele vai sofrendo transformações, por meio de operações.

Entre diversos materiais concretos utilizados no ensino e aprendizagem da Matemática escolar, Gitirana e Carvalho (2010, p. 38) sugere que, podemos e devemos “adaptar aqueles que são propostos no livro didático, de forma a adequá-los aos alunos, respeitando os seus conhecimentos prévios e, principalmente, valorizando sua cultura”. Também ressalta a importância de que os alunos manuseiem os MD’s, para que assim propiciem o início da construção dos conceitos e procedimentos.

Para Lorenzato (2009, p. 21), “a realização em si de atividades manipulativas ou visuais não garante a aprendizagem. Para que esta efetivamente aconteça, faz-se necessária também a atividade mental, por parte do aluno”.

De acordo com a Teoria de Assimilação para que a aprendizagem seja significativa deverão os conceitos ancorar em conceitos prévios de mesma característica, em uma relação subordinante, subordinada ou as duas. A questão que se levanta é: Como um aluno que não tem os conceitos formados sobre os números racionais irá operar com esse conjunto e entender que os números racionais é uma extensão dos números inteiros?

A partir desse tipo de questionamento, uma das alternativas de sugestões para a construção de conceitos primários seria a utilização do MD, que proporciona além da possibilidade de formação de conceitos, uma estratégia para que o aluno se sinta motivado a aprender significativamente.

A utilização de MD permite o desenvolvimento da habilidade de fazer conjecturas matemáticas. É possível validar as propriedades quando o aluno começa a perceber que a propriedade pode ser verdadeira ou falsa, essa prática é essencial para que a criança entenda o porquê da validade da propriedade e não se limite a gravá-la simplesmente na memória.

Assim como Gitirana e Carvalho (2010, p. 38) dizem que para que o “aluno compreenda que a soma de dois números ímpares é sempre par, oferecendo dois conjuntos de quantias ímpares de botões emparelhados, facilmente ele chegará a essa conclusão”, Toledo e Toledo (2010) reforçam que para que o aluno compreenda o conceito de fração o professor deverá propor atividades, com uso de materiais concretos, evitando o uso de regras, e, após várias atividades desse tipo, os alunos estarão mais preparados para resolver problemas mais complexos de operações com números fracionários.

> Durante a idade pré-escolar e os primeiros anos do ensino primário, os conceitos são adquiridos primordialmente por um processo de formação de conceito, processo este significativo e orientado por hipóteses. Mais simplificadamente, objetos ou eventos dados imediatamente pela percepção ou os conceitos (primários) do dia-a-dia são adquiridos relacionando seus atributos à estrutura cognitiva, depois de serem relacionados a vários exemplos particulares a partir dos quais foram derivados. Durante os últimos anos da escola primária, as provas empírico-concretas (exemplo

> tangíveis, perceptíveis ou verbais dos atributos) são necessárias para a assimilação do conceito. Este último processo ocorre quando os atributos essenciais do conceito são apresentados, por definição ou pelo contexto, e então relacionados diretamente à estrutura cognitiva do aluno (conceitos secundários) (AUSUBEL, NOVAK e HANESIEN, 1980, p. 72).

No que diz respeito à importância da utilização de MD no ensino dos números fracionários, justifica-se pela possibilidade de apresentar os conceitos e ou retomá-los em uma perspectiva prática de modo mais integrado. Ou melhor, apresentar os conceitos de frações e as operações com esquemas gráficos, para que visualmente assimilem as frações como partes de um todo e compreendam suas possíveis representação diante das situações reais.

Considerando que os números racionais assumem diferentes significados de acordo com o contexto inseridos, como visto em Barbosa (1966) e Mandarino (2010) e, que a compreensão depende do entendimento destas diferentes interpretações, convém que o professor ofereça situações de aprendizagem, que enfoquem cada significado, diante desses aspectos, respeitando o tempo necessário para que os alunos assimilem os conceitos em cada situação proposta.

Uma das ideias fundamentais a ser construídas pelas crianças na aprendizagem de números racionais é a ideia de equivalência de representações fracionárias de um mesmo número. Um dos recursos indicados por Toledo e Toledo (2010), são as tiras de frações coloridas em que diferentes tiras do mesmo tamanho são divididas em 2, 3, 4,..., partes iguais.

> Para uma melhor aprendizagem, é recomendável que as crianças, nessa fase conceitual, operem elas próprias sobre os materiais didáticos; assim, a utilização de blocos de madeiras, de fitas de cartolinas, de coleção de palitos e fichas, flanelógrafos para fixação e retirada de figuras, é o preferível. São bastantes práticas as fitas de carolinas previamente picotadas (BARBOSA, 1966, p. 150).

A manipulação de materiais didáticos segundo Barbosa (1966), considerados como parte de processo racional de ensino faz com que o aluno intuitivamente aprenda o conceito de fração, de seus termos e denominações e consequentemente obtenha o entendimento das regras. Todavia é necessário fazer o uso de MD e ir diversificando a prática, o tipo e forma de exemplos, fornecendo aos alunos os vários aspectos relacionando com as formalidades dos conceitos abstratos.

> O trabalho de comparação de números fracionários deve ser realizado com o apoio de materiais concretos, pois os alunos, presos ainda nos critérios relativos aos números naturais, tendem considerar maior a fração que representa um dos termos (ou ambos) maior que o correspondente na outra fração. Acreditam, por exemplo, que $\frac{4}{9}$ é maior que $\frac{1}{2}$. Um detalhe muito importante é que, na comparação, todas as frações devem se referir a partes de um mesmo inteiro (TOLEDO e TOLEDO, 2010, p. 172).

As resoluções de situações-problema, com o auxílio de esquemas geométricos facilitam a compreensão dos conceitos abstratos e percepção das características próprias dos números racionais. O exemplo abaixo apresenta essa proposição:

“Em dois canteiros de tamanhos iguais foram plantados alguns pés de alface. Em um deles, foram ocupados $\frac{2}{3}$ do terreno e, no outro, $\frac{2}{7}$. Qual dos dois tem a maior superfície plantada com alfaces?” (TOLEDO e TOLEDO, 2010, p. 173).

Se os alunos não tiverem construído a habilidade de comparar frações e relacionarem a leitura das frações com os números naturais, responderão que, o segundo terreno tem a maior parte plantada, pois em sua concepção como $7 > 3$ logo $\frac{2}{7} > \frac{2}{3}$. O que não é verdade.

Porém, a mesma situação apresentada por esquema geométrico observa-se que potencializa a interpretação:

Considerando dois retângulos A e B como a Figura 12, em que A representa o canteiro que tem $\frac{2}{3}$ ocupado por pés de alfaces e B o de $\frac{2}{7}$ ocupados por pés de alfaces. De acordo com umas das características das frações (parte/todo) consideram-se que: A foi dividido em três partes e duas dessas partes foi plantado pés de alfaces, o mesmo ocorreu com B, que foi dividido em sete partes e, ocupado duas dessas partes pela mesma plantação.

Figura 12 – Retângulos representando os canteiros A e B.

Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 27/01/2017.

Com a exposição do problema geometricamente, o aluno intuitivamente verificará que $\frac{2}{3} > \frac{2}{7}$ e chegará ao entendimento do por que a maior área ocupada ser a do canteiro que tem $\frac{2}{3}$ de pés de alfaces.

Dispõe-se de uma gama de materiais e ideias para aprimorar as aulas de Matemática, metodologia de trabalho didaticamente mais produtiva para trabalhar com os números racionais, apresentado tanto em Barbosa (1966) quanto em Toledo e Toledo (2010) e outros mais, aqui não citados, no uso de MD tais como: utilizar folhas de revistas usadas, para apresentar as frações como partem de um todo, dobrando sucessivamente encontrando, assim, frações equivalentes; compor e decompor figuras numa variedade de representação possível para um mesmo número fracionário; utilizar-se de tiras feitas de papel-cartão de diferentes cores e de mesmo comprimento divididos em uma sequência de 2 a 10, canudos, lápis ou palitos dividindo em copinhos descartáveis, barbantes para medir o comprimento de uma sala de aula, etc.

O uso de Materiais Didáticos auxilia na construção do conhecimento, uma vez que os objetivos da aprendizagem sejam traçados pelo professor. A escolha e a adequação dos MD's com os conceitos almejados são critérios específicos para alcançar os resultados esperados. Após determinado sua utilização o aluno poderá manuseá-los adquirindo significados conceituais ora por descobertas, por compartilhamento de informações ou pela inferência do professor. Lorenzato (2009, p. 25), reforça que "o modo de utilizar cada MD depende fortemente da concepção do professor a respeito da Matemática e da arte de ensinar".

Pela potencialidade que se apresentam o computador e as tecnologias como auxiliadores no processo de ensino e aprendizagem, surgiu-se a crítica de que os MD's se tornaram obsoletos e desnecessários. Porém Lorenzato (2009), nos lembra de que, infelizmente nem todas as escolas brasileiras dispõem de computadores, e quando têm, ora são em números insuficientes, ora a escola e os professores nem sabem o que fazer com eles, uma vez que é necessário um *software* apropriado para desenvolver as atividades matemáticas e depende de um professor preparado para elaborar as suas práticas com o auxílio desse instrumento, sendo mais viável em certas situações a utilização de MD.

Segundo Oliveira e Pacheco (2010) é preciso desenvolver habilidades que propiciem a utilização da tecnologia para busca, seleção, análise e articulação entre informações e, dessa forma, construir e reconstruir continuamente os conhecimentos, utilizando-se de todos os meios disponíveis, em especial dos recursos do computador, já que eles possuem um enorme potencial educativo para complementar e aperfeiçoar o processo de ensino e aprendizagem.

O próximo tópico traz uma discussão referente a nova maneira de ensinar, aprender e desenvolver o currículo ao integrar a informática à prática pedagógica voltada para a aprendizagem significativa do aluno. Sob essa perspectiva, o aluno, sujeito ativo da aprendizagem, aprende ao fazer, levantar hipóteses, experimentar, aplicar conhecimentos e representar o pensamento.

2.3 A Informática e o Ensino de Matemática

Segundo Borba e Penteado (2001, p. 11), no final da década de 70, do século passado quando se discutiam a inserção da informática na educação, muito se cogitava, principalmente por “aqueles que concebem a Matemática como a matriz do pensamento lógico”, que o computador iria substituir o papel do professor e tornar a aprendizagem mecânica, ou ainda mais, transformar o aluno em um mero repetidor de tarefas. Porém, após diversos estudos e experiências houve uma ruptura com as ideias iniciais e muito se tem falado no uso da informática como auxiliador no ensino e aprendizagem.

O computador deve ser utilizado:

> Como uma ferramenta de aprendizagem, por meio do qual o aluno atua e participa do seu processo de construção de conhecimentos de forma ativa, interagindo com a ferramenta de aprendizagem. A partir dessas perspectivas, o computador poderá assumir o lugar de aprendiz, deixando para o aluno o lugar de professor. Assim, o indivíduo vai aprender com seus próprios ensinamentos e descobertas (OLIVEIRA e PACHECO, 2010, p. 68).

Quando o aluno aprende a utilizar a ferramenta de aprendizagem, de acordo com os objetivos almejados propostos pelo professor, poderá encarregar-se de sua própria aprendizagem. Uma vez aliviado da carga de ser o responsável pela aprendizagem, o professor poderá concentrar-se no processo de ensino.

O uso do computador no ensino da Matemática contribui para:

> i. Uma relativização da importância das competências de cálculo e de simples manipulação simbólica, que podem ser realizadas agora muito mais rápida e eficientemente;
> ii. Um reforço do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem dos mais variados problemas;
> iii. Uma atenção redobrada às capacidades intelectuais de ordem mais elevada, que se situam para além do cálculo e da simples compreensão de conceitos e relações matemáticas;
> iv. Um crescendo de interesse pela realização de projectos e actividades de modelação, investigação e exploração pelos alunos, como parte fundamental da sua experiência matemática;
> v. Uma demonstração prática da possibilidade de envolver os alunos em actividades matemática intensa e significativa, favorecendo o desenvolvimento de atitudes positiva em relação a esta disciplina e uma visão muito mais completa de sua verdadeira natureza (PONTES, 1995, p. 2).

As inovações educacionais pressupõem mudanças na prática do professor. O uso do computador como apoio pedagógico exigem uma predisposição e comprometimento de sua parte. Umas delas, conforme Borba e Penteado (2001, p. 54), é sair de uma “zona de conforto, onde quase tudo é previsível e controlável” e se dispor a uma “zona de risco, na qual é preciso avaliar constantemente as consequências das ações propostas.”

Para que o uso da informática signifique uma transformação substancial no contexto da aprendizagem escolar, muitas coisas precisam mudar. Os professores, segundo Sancho (2008, p. 36), terão que “redesenhar seu papel e sua responsabilidade”, o quadro característico da realidade escolar, que se apresentam com recursos insuficientes, além de mudanças na mentalidade da administração e dos sujeitos envolvidos nesse processo, o que não ocorre de um dia para outro.

> Precisamos desconstruir a ideia de que ensinamos o tempo todo aos nossos alunos. Se faz necessário respeitar cada vez mais o saber dos alunos. Em se tratando de novas tecnologias, é impossível negar: eles aprendem a lidar com elas com muito mais facilidade que nós. Então, o melhor a fazer é aprender junto com eles, criando ambientes de aprendizagem abertos e motivadores através da multimídia, contribuindo para promover a competência de aprender a aprender e orientar a utilização desses recursos com uma visão pedagógica bem planejada (OLIVEIRA e PACHECO, 2010, p. 50).

As novas tecnologias computacionais colocam desafios irrecusáveis como auxiliadores no processo ensino e aprendizagem, dada a sua possibilidade de proporcionar poder ao pensamento matemático, automatizar os processos de rotina e concentrar nossa atenção no pensamento criativo. Mas essa ferramenta não ensina por si só, como diz Pontes (1995, p. 2) “ao professor cabe um papel decisivo na organização das situações de aprendizagem”.

> A informática, atualmente, é considerada um dos componentes tecnológicas mais importantes para a efetivação da aprendizagem matemática no mundo moderno. Sua relação com a Educação Matemática se estabelece a partir das perspectivas metodológicas atribuídas à informática como meio de superação de alguns obstáculos encontrados pelos professores e estudantes no processo ensino-aprendizagem (MENDES, 2008, p. 61).

As características da escola e os processos para integrar a informática ao ensino foram relacionados à ideia de que sua presença deve ser interpretada como sinônimo de qualidade educativa, e que o confronto com situações novas ao ensinar exige do professor atualização e capacitação frente aos novos instrumentos de apoio.

> A contribuição mais significativa das tecnologias da informação e comunicação, com um caráter geral, é a capacidade para intervir como mediadores nos processos de aprendizagem e, inclusive, modificar a interatividade gerada, de tal maneira que, no campo educativo, a qualidade vinculada ao uso das tecnologias, na realidade, une-se à qualidade da interatividade, como fator-chave nos processos de ensino-aprendizagem. Esta interatividade só pode ser avaliada pelos ambientes e *espaços de trabalhos* que as tecnologias propõem. E esses ambientes são consequências dos modelos de aprendizagem em que se sustentam (condutistas, cognitivos, construtivistas, holísticos, etc.) (PABLOS, 2008, p. 74).

Ainda Pablos (2008) nos diz que, os sistemas hipermídias e multimídias, como ambientes de aprendizagem, se constituem hoje em uma opção formativa que se apoia nas tecnologias digitais (*e-learning*) e sua utilização de redes como a internet proporcionou uma profunda reformulação dos modelos de formação a distância.

Ao produzir os materiais usados para *e-learning* é preciso além do educador, serviços diversos de outros profissionais, para dar suporte, ficando caro e inviável para as instituições de ensino.

> Havia a necessidade de uma metodologia para o processo de criação e gerenciamento de conteúdos (*framework*) que propiciasse a otimização e melhor organização desses esforços, propiciando um maior controle sobre o seu ciclo de vida (*lifecicle*) - isto é, da sua concepção até sua utilização e posterior arquivamento, modificação ou descarte (BALBINO, 2007, p. 1).

Uma das soluções encontradas foi a catalogação e armazenamento em repositórios específicos para estes fins, como exemplo o australiano CAREO e, no Brasil, a ABED e o RIVED, mantido pelo governo federal, assim os *e-learning* contemplam agora uma gama de objetos de aprendizagem (*learning objects*), que poderão ser utilizados em prol da educação.

Quaisquer "produtos ou materiais digitais ou não-digitais que podem ser combinados entre si e ser utilizados em diferentes contextos de aprendizagem" se definem como objetos de aprendizagem. (CONCEIÇÃO e LEHMAN, 2002, apud SANCHO, HERNÁNDEZ e COLS. 2008, p. 74).

A primeira definição formal de objetos de aprendizagem ocorreu após uma década de estudos, em 1998, segundo Balbino (2007, p. 1) incluem "conteúdo multimídia, conteúdos instrucionais, objetivos de ensino, *software* instrucional e *software* em geral e pessoas, organizações ou eventos referenciados durante um ensino com suporte tecnológico". Ou seja, qualquer recurso digital que pode ser reutilizado para dar suporte ao ensino como imagens, vídeos, *softwares* e animações podem ser considerados objetos de aprendizagem, desde que sejam reutilizados para auxiliar no conhecimento.

Atualmente existem várias formações continuadas *online* voltadas para o uso das tecnologias em sala de aula disponíveis aos professores. Dentre outros tantos portais que existem, citaremos a Secretaria de Estado de Educação e Esporte do Acre que oferece cursos *online* à distância validado pelo MEC, cujo objetivo é propiciar a reflexão sobre tecnologia e educação, bem como auxiliar coordenadores pedagógicos e diretores a dar suporte a seus professores a incorporar recursos digitais para a aprendizagem e organizar a infraestrutura tecnológica da escola.

O portal que pode ser acessado na página < http://educ.see.ac.gov.br/> dispõe aos professores, uma gama de materiais pedagógicos com planos de aula e, atividades para o planejamento de aulas inovadoras e atrativas, além de fornecer cursos de formações à distância apoiando a incorporação da tecnologia ao currículo.

A informática nos traz muitas facilidades de acesso à informação, de serviços e de comunicação. Oferece-nos um leque de ações pedagógicas, permitindo e possibilitando uma ampla diversidade nas atividades de sala de aula. Apresenta, todavia, uma série de vantagens e riscos, conforme os modos de uso e com base em cada proposta pedagógica a ser observados e considerados, ao apropriar-se dela como auxiliador do conhecimento.

Riscos esses, que segundo Borba e Penteado (2001), são situações imprevisíveis, como problemas técnicos, e da diversidade de contratempos que poderão ocorrer quando o professor aplica uma atividade com o auxílio do computador, fazendo com que todo seu planejamento em função a este auxiliador seja desafiador.

Também se deve atentar para o tempo disponível para sua utilização, pois um simples aperto de combinações de teclas exigirá um dispêndio de tempo e de pessoas qualificadas para solucionar o problema apresentado momentaneamente. Pois afirma Borba e Penteado (2001, p. 61) que "ao adentrarmos um ambiente informático, temos que nos disponibilizar a lidar com situações imprevisíveis", assim eles reforçam que "não é possível se manter em uma zona de risco sem se movimentar em busca de novos conhecimentos".

Atualmente disponibilizam-se na internet vários *softwares* livres educacionais que apresentam várias possibilidades de utilização como recurso didático para o ensino de Matemática, cabe ao professor adaptá-lo as suas práticas de ensino.

Eis alguns exemplos de *software* e seus respectivos campos de aplicação:

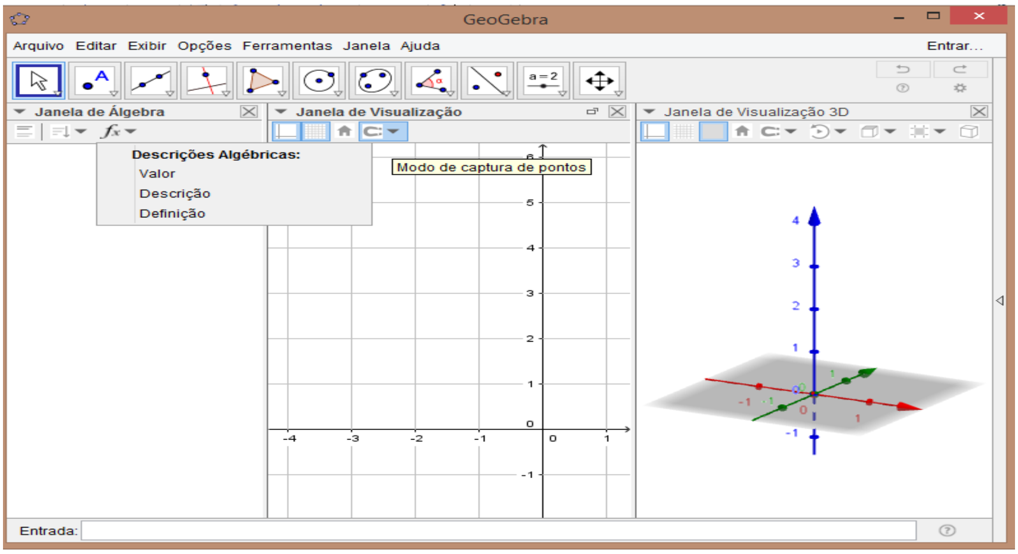
- *Asymptopia* – Palavras cruzadas com expressões matemáticas;
- *Calc 3D* – Gráficos: geometria e estatística;
- *Dr. Geo* – *Software* interativo para o aprendizado de geometria. Permite a construção de figuras geométricas interativas;
- *Kalcul* – Aplicativo para teste de equações matemáticas;
- *Kmplot* – Matemática Geometria interativa;
- *Kpercentage* – Estudo de porcentagem;
- *Modellus* – Modelação;
- *WinPlot* – Desenho e animação de superfícies e o;
- Geogebra – que se descreve sua função e possibilidades na próxima seção.

2.3.1 O *software* geogebra

Geogebra[18] é um *software* matemático que reúne geometria, álgebra e cálculo. Ele foi desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de *Salzburg* para educação matemática nas escolas.

O *software* geogebra fornece diferentes visualizações para objetos matemáticos: Janela de Álgebra, Janela de Visualização e Janela de Visualização 3D, como Figura 13.

Figura 13 – Vista do Geogebra.



Fonte: Registro da pesquisadora, 20/06/2017.

Cada vista oferece sua própria barra de ferramentas que contém uma seleção de ferramentas e alcance de comandos, bem como funções predefinidas e operadores que permitem criar construções dinâmicas com diferentes representações de objetos matemáticos.

É um sistema de geometria dinâmica que permite realizar construções tais como: pontos, vetores, segmentos, retas, sólidos geométricos, planificações, seções cônicas, entre outras, com funções que podem se modificar posteriormente de forma dinâmica. Permite trabalhar com agilidade, buscar diversos caminhos de resolução de problemas e avaliar o que está sendo feito.

Dependendo da matemática para a qual se deseja usar o geogebra, pode-se selecionar as perspectivas que se quer.

Também oferece uma ampla gama de comandos que podem ser usados para criar objetos na vista de menu álgebra. Basta começar a digitar o nome de um comando no campo de entrada e o geogebra oferecerá uma lista de comandos que combinam com sua entrada.

---

[18] *Software* livre disponível em:< https://www.geogebra.org/>.

A possibilidade de abordar os conceitos matemáticos de modo interativo e dinâmico apresenta esse *software* como um auxiliador atrativo no conhecimento.

2.4 Justificativa da Escolha dos Materiais utilizados na Pesquisa

A primeira experiência da pesquisadora com o geogebra ocorreu nas aulas de mestrado da Universidade Federal do Acre em 2016, onde a professora doutora Salete Maria Chalub Bandeira, apresentou a ferramenta como um recurso didático para o ensino de geometria, propondo aos mestrandos a construção de sólidos geométricos.

O encanto pela ferramenta e a constatação de possibilidades práticas e atrativas com o uso do geogebra, motivaram-na a buscar mais conhecimento sobre esse *software*. Então estudou seu tutorial e aprendeu utilizar suas funções, além de, participar de grupos em redes sociais que discutem e compartilham materiais produzidos com o geogebra, com foco pedagógico. Assim, através de observações de alguns protocolos de construções de materiais para ensinar fração, disponível na página do geogebra <https://www.geogebra.org/> pode construir um material digital, com característica própria para utilizar na investigação da pesquisa.

Por esse material ser um recurso com característica pedagógica e técnica, foi necessário rever conceitos matemáticos necessários para inserção dos comandos no campo de entrada do geogebra, adequados com a linguagem do *software* e o que se almejava nas características deste material.

O uso do geogebra como um auxiliador no ensino dos números racionais apresenta vantagens em relação ao trabalho no papel ou no quadro. Por exemplo:

Podem-se movimentar as figuras, construir várias frações - tanto contínuas quanto discretas, colorir e apresentar num cenário dinâmico suas representações como: números decimais, fracionários e porcentagens através de setores circulares, reta numérica, esquemas geométricos, algebricamente, etc., além de voltar ao aspecto inicial.

Para apresentar os conceitos e com perspectiva de favorecer a comunicação, entre professor/aluno e aluno/aluno, pensou-se construir um material para ser utilizado como recurso tecnológico, porque o que se propõe hoje, conforme o PCN (1991, p. 46), “é que o ensino de Matemática possa aproveitar ao máximo os recursos tecnológicos, tanto pela sua receptividade social como para melhorar a linguagem expressiva e comunicativa dos alunos”.

Assim, o uso do Geogebra se fez necessário para construções dos materiais manipuláveis e digitais que se apresenta nesta pesquisa.

Ainda, fugindo dos procedimentos convencionais em utilizar-se de questionários com questões objetivas ou dissertativas, algo que seria comum aos sujeitos da pesquisa, propôs-se como instrumento de investigação a resolução do questionário através de mapeamento de questões. O que se esperava era que os sujeitos desenvolvessem estratégias próprias ao fazerem o mapeamento, participassem da construção de seu próprio conhecimento, pensassem e estruturassem o seu raciocínio para apresentarem os resultados.

Acredita-se que ser capaz de traçar o percurso com clareza e esboçar uma boa estratégia para se alcançar o objetivo da pesquisa, são passos fundamentais para o êxito. Assim no próximo capítulo descreve-se mais claramente o caminho percorrido e a estratégia para a investigação.

CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA DA PESQUISA

"A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original."
(Albert Einstein)

No capítulo anterior foram especificadas as ferramentas utilizadas para produção de dados, descritos suas características, sua relevância no processo de ensino e aprendizagem e os objetivos pelas quais foram selecionadas para esta pesquisa.

Portanto, este capítulo trará o caminho percorrido para realizar a pesquisa. Desde a escolha do tema, as perguntas da pesquisa, o tipo de pesquisa, o universo pesquisado, os teóricos, o instrumento utilizado e os procedimentos para coleta de dados com o uso de tais ferramentas**.**

Segundo Araújo e Borba (2001, p. 49), a metodologia que embasa o desenvolvimento de uma pesquisa, "deve ser coerente com as visões de Educação e de conhecimento sustentadas pelo pesquisador, o que inclui suas concepções de Matemática e de Educação Matemática".

Acredita-se que, traçar o caminho a ser percorrido com objetividade e clareza se faz necessário. Nem todos os passos podem ser previsíveis, mas, na medida em que se enfoca a pesquisa como um processo em busca de conhecimento e define-se o sentido e a direção, as chances de êxitos nas respostas certamente aumentam.

3.1 A escolha do Tema

A escolha do tema GEOGEBRA - UMA OPÇÃO PARA CONSTRUIR OBJETOS DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE FRAÇÃO ocorreu em função de duas situações: por se tratar de uma pesquisa em Educação Matemática de um mestrado profissional, onde se almeja um produto educacional e pelos anseios da pesquisadora com suas experiências ao ensinar Matemática. Pensando nisso, escolheu-se um tema que pudesse contribuir com o ensino e aprendizagem de Matemática.

Após a delimitação do tema, Araújo e Borba (2001, p. 45) nos diz que, é importante que "seja encontrado um foco, que se traduz de forma mais específica, em um problema ou pergunta de pesquisa".

Com esses esclarecimentos, procurou-se ajustar as lentes da pesquisa à luz de uma teoria cognitivista (Teoria da Assimilação), que explica os mecanismos internos que ocorrem na mente humana com relação ao aprendizado e à estruturação do conhecimento, e voltadas para um contexto matemático. Objetivando assim, contribuir no processo de conhecimento para a comunidade científica.

Através de alguns teóricos como Caraça (1970), que aborda os números racionais em um contexto social, Barbosa (1966), Toledo e Toledo (2010) e Mandarino (2010), que descrevem os aspectos de número racional de acordo com o contexto inserido e suas facetas junto ao ensino, e Pires (2010), que traz os obstáculos epistemológicos relacionado com a aprendizagem dos números racionais, formulou-se questões que buscam confirmar o que dizem as teorias e que pudessem levar ao entendimento dos porquês os alunos chegarem ao 9° ano sem saber resolver problemas e cálculos com os números fracionários.

3.2 O Problema e as Perguntas da Pesquisa

Durante anos de vivência em sala de aula com alunos do 9° ano, a pesquisadora pode constatar, através de suas observações, que os alunos ao resolverem exercícios dos conteúdos do 9° ano em que era necessário operar com números racionais, em especial a adição de frações com denominadores diferentes, apresentavam dificuldades. Diante dessas circunstâncias era notório o desânimo deles em prosseguir com o desenvolvimento da proposta de ensino.

Podia-se também comprovar nos resultados apresentados à escola que, dentre os 20 descritores (habilidades relacionada a cada conteúdo) que compõe a avaliação do SADEAM[19], os alunos não tinham a habilidade em resolver problemas e cálculos com números racionais.

A escola frente a essa situação requeria da pesquisadora a aplicação de um plano de intervenção que abordassem os descritores mais críticos, para que os alunos abstraíssem as habilidades necessárias, que compõe o currículo de Matemática do Ensino Fundamental, no entanto, esse desafio, necessariamente, não era cumprido, pois a pesquisadora se via sobrecarregada frente à responsabilidade de cumprir um planejamento anual e a emergência

---

[19] Sistema de Avaliação Educacional do Desempenho Educacional do Amazonas.

de retomar os conceitos ensinados em anos anteriores com estratégias diferentes. Assim, quando era necessário e possível revisava os conceitos, no momento de aula.

Como professora de Matemática se sentia, em partes, responsável por esse cenário lamentável, logo se preocupava em entender como ocorre o processo de aprendizagem dos conceitos e de que forma poderia contribuir para que os alunos aprendessem de modo significativo. Visto que, essa situação era um entrave para desenvolver outras habilidades, causando aos alunos desânimo e rejeição com a Matemática, preocupou-se em investigar quais as causas possíveis que os levariam não abstrair os conceitos de frações. Se o fato está relacionado com obstáculos epistemológicos ou com a aprendizagem mecânica e se esquecem com o passar dos tempos. Através dessas conjecturas formularam-se as perguntas da pesquisa:

- Os alunos representam as diferentes escritas fracionárias de um número racional?
- Os alunos compreendem que o denominador de uma fração representa a divisão do todo?
- Os alunos abstraem os conceitos de fração na série ensinada?
- Qual a relevância do uso de materiais manipuláveis e dinâmicos como auxiliadores para a aprendizagem de frações em uma perspectiva significativa?

A partir desses questionamentos, foi necessário refletir sobre qual fase e nível de ensino era possível investigar os porquês dos alunos chegarem ao 9° ano sem abstraírem os conceitos de fração. Concluiu-se que, deveria buscar resposta na série em que são preferencialmente ensinados esses conceitos, no caso o 6° ano do Ensino Fundamental. Então com o objetivo de investigar em qual perspectiva se desenvolve os números fracionários, pode se definir o tipo de pesquisa a ser realizada.

3.3 Tipo da Pesquisa

Segundo Gil (2002, p. 43), toda pesquisa é classificada mediante algum critério. Pode ser classificada com base em seus objetivos gerais, em três grandes grupos: exploratórias, descritivas e explicativas. “Todavia, para analisar os fatos do ponto de vista empírico, para confrontar a visão teórica com os dados da realidade, torna-se necessário traçar um modelo conceitual e operativo da pesquisa”.

Do ponto de vista dos procedimentos técnicos de coleta e análise de dados, torna-se possível, na prática, classificar as pesquisas segundo o seu delineamento em dois grandes grupos: o primeiro abrange a pesquisa bibliográfica e a documental, onde é desenvolvida com base em material já elaborado, e no segundo, a pesquisa experimental, a *ex-post facto*, o levantamento e o estudo de caso, cada um com suas especificidades.

Do ponto de vista da forma de abordagem do problema a pesquisa pode ser qualitativa e quantitativa, que independentemente do tema e a área escolhida pelo pesquisador se distinguem pela sua natureza. Enquanto a pesquisa quantitativa busca por resultados que possam ser quantificados, pelo meio da coleta de dados, a pesquisa qualitativa por sua vez:

> Se preocupa nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ser quantificado. Ou seja, ela trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos a operações de variáveis (MINAYO,1994, p. 21).

Diante de tais classificações, esta pesquisa melhor se enquadra como: exploratória, qualitativa e bibliográfica, pois através de um estudo bibliográfico de como ocorre à aprendizagem significativa e sobre o objeto de estudo em questão, apresentados em documentos publicados tais como artigos, dissertações, livros, etc. buscou-se investigar, em sala de aula, as causas possíveis que levariam o aluno não abstrair os conceitos de frações, não ansiando quantificar dados, mas preocupando-se em analisar os porquês dos alunos chegarem ao 9° ano, sem saber resolverem problemas e cálculos com as frações.

3.4 Delimitação do Universo da Pesquisa

O universo da pesquisa definiu-se pelo objeto da pesquisa, pelos instrumentos de coleta de dados e pelos materiais a serem utilizados.

“Segundo Piaget o conceito de fração é construído pela criança no período operatório-concreto[20], desde que ela já seja capaz de conservar quantidades – tanto discreta quanto continua. Não é aconselhável, portanto, iniciar o trabalho com os números racionais antes do 5° ou 6° ano." (TOLEDO e TOLEDO, 2010, p. 164).

De acordo com escolha da série dos sujeitos da pesquisa e dos instrumentos a serem utilizados na investigação, buscou-se uma escola de Ensino Fundamental com laboratório de informática que dispusessem de recursos tecnológicos, como projetor e computadores.

[20] De 7 aos 12 anos.

Então foi feito um levantamento junto a três escolas públicas, na cidade de Rio Branco - AC, que dispunham desses critérios, porém a maioria dos computadores estava inutilizados. Confronte essa situação encontrou-se interesse em escolas particulares.

Por se tratar de uma pesquisa onde o objetivo é investigar em qual perspectiva se desenvolve os números fracionários para que fosse possível analisar quais as causas que levariam os alunos não aprender os conceitos de fração, acreditou-se que, a escolha do modelo de escola para a investigação, não influenciariam para responder essas questões, uma vez que, o currículo e os métodos são parecidos ao das escolas públicas, e o comportamento humano relacionado ao processo de aprendizado é praticamente o mesmo.

A escolha da escola SESI adveio por ter os requisitos para aplicar a projeto de pesquisa, além de disponibilizar de um funcionário para dar suporte com o uso dos 20 computadores que se encontravam em perfeito funcionamento. Todavia, assim como as escolas públicas, o laboratório de informática é pequeno e com números de computadores insuficientes para a demanda de classe. Fatores que alguns professores citam como justificativa por não utilizar desse ambiente para suas aulas.

A professora de Matemática, dos sujeitos da pesquisa, adequou suas aulas permutando com outros professores os horários agendados. Como era período de avaliações e fechamento do ano letivo, também planejou para os 18 alunos, que ficariam em sala de aula, a revisão de conteúdos, para o fechamento da nota do 4° bimestre, disponibilizando outros 20 para a investigação.

Localizada na cidade de Rio Branco - Acre, a escola SESI (Serviço Social da Indústria) é de caráter particular, acessível aos filhos dos trabalhadores e para os próprios trabalhadores da indústria e comunidade. Segundo portal da FIEAC (Federação das indústrias do Estado do Acre, disponível em: <http://www.fieac.org.br/>).

A escola SESI tem como objetivo contribuir para o desenvolvimento da criança e do adolescente, nos seus aspectos físico, sócio emocional e cognitivo, através da utilização de diferentes modalidades de atendimento, desenvolvendo a capacidade de inovação e criatividade e a conquista do conhecimento, numa dimensão interdisciplinar e atua nos seguintes níveis educacionais: Educação Infantil e Ensino Fundamental.

A organização do trabalho pedagógico está relacionada ao uso dos diferentes espaços, como forma de favorecer as aprendizagens, cada ambiente tem uma agenda fixa para a utilização dos ambientes, feita através de planejamentos semanais. A escola é equipada com laboratório de informática educacional, laboratório de física, química e biologia, biblioteca, sala multiuso, refeitório, e quadra poliesportiva.

Definido o universo da pesquisa, buscou-se informação junto a professora de Matemática dos sujeitos, sobre os conhecimentos que tinham sobre mapas conceituais e o *software* geogebra, por ser esses quesitos necessários para se utilizar os instrumentos de investigação. Então foi traçado um plano com as sequências didáticas para tais esclarecimentos, preparado os materiais informativos sobre Mapa Conceitual e impresso os materiais manipuláveis utilizado na investigação.

Instalou-se nos computadores da escola o *software* geogebra e o *cmaptools* (programa para construções de mapas conceituais) e os objetos de aprendizagem, materiais produzidos com a função do geogebra, para ser utilizado na investigação e ficar disponível para que os professores de Matemática da escola utilizassem posteriormente em suas aulas.

3.5 Produção de Dados

A produção de dados ocorreu através da proposta do mapeamento da resolução de dois questionários A e B e no desenvolvimento de sete atividades pelos sujeitos da pesquisa. A aplicação do questionário ocorreu em dois momentos:

O questionário A, foi aplicado no primeiro encontro com o sujeito, com a perspectiva de descobrir os conceitos prévios que os sujeitos tinham sobre os números fracionários e o questionário B, de verificar se houve avanços na aprendizagem dos números fracionários após o desenvolvimento das sete atividades investigativas.

Os foram questionários apresentados assim:

Questionário A

1. Um terreno terá $\frac{2}{15}$ de sua área ocupada por um jardim, $\frac{6}{15}$ por uma praça e $\frac{7}{15}$ por um estacionamento[21].

a) Que fração corresponde à área do terreno destinada:

- à praça e o jardim?
- à praça e o estacionamento?
- ao jardim e ao estacionamento?

b) Que fração corresponde à diferença entre as áreas destinadas ao:

[21] Questão retirada do livro **Vontade de Saber Matemática**, 6° ano, pág.144 – 2017. Ed. FTD.

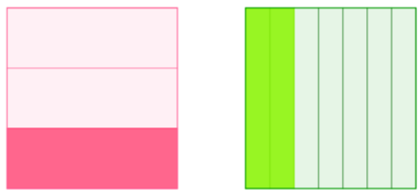
- estacionamento e a praça ?
- estacionamento e jardim?
- jardim e praça?

2. Pela manhã uma balsa percorreu $\frac{2}{3}$ de uma distância e a tarde, $\frac{1}{4}$. Que fração da distância ela percorreu nos dois períodos? [22]

Questionário B

1. A figura A mostra duas barras idênticas de chocolate que foram divididas, cada uma delas em partes iguais, sendo que a área destacada representa a quantidade de chocolate consumido por uma pessoa.

Figura A



1. Júlia comeu a parte destacada da primeira barra e Matheus comeu a parte destacada da segunda barra. [23]

a) Quem comeu mais, Júlia ou Matheus? Por quê?

b) Qual a fração que representa a quantia que os dois comeram juntos?

2. Pela manhã uma balsa percorreu $\frac{2}{3}$ de uma distância e à tarde, $\frac{1}{4}$. Que fração da distância ela percorreu nos dois períodos? [24]

3.5.1 Procedimentos para a produção de dados e cronograma

A investigação ocorreu no laboratório de informática da escola SESI, com o acompanhamento do responsável pelo ambiente. Foram dois encontros, em duas quartas feiras

[22] Questão retirada do livro **Projeto Teláris**, 6° ano, pág.178 – 2016. Ed. Ática.

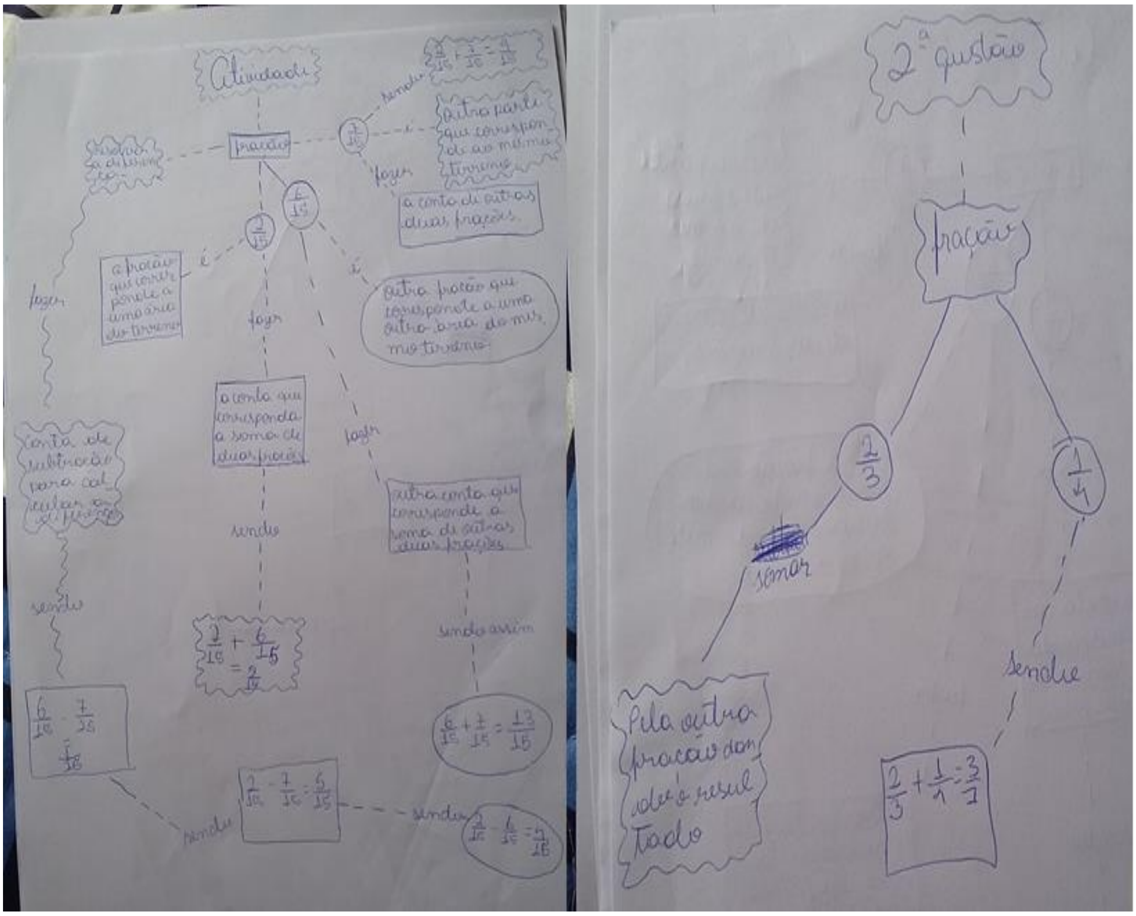
[23] Questão formulada pela pesquisadora.

[24] Questão retirada do livro **Projeto Teláris**, 6° ano, pág.178 – 2016. Ed. Ática.

sequenciais, com duração de 1h e meia cada um, horários únicos possíveis, disponibilizados pela professora de Matemática dos sujeitos da pesquisa, devido a ser o término de ano letivo e a programação da escola ser de período de avaliações.

No primeiro encontro com os sujeitos, foram fornecidas informações verbais, impressas sobre o que é um mapa conceitual e um exemplo de como construir o mapeamento de uma questão através do *software cmaptools*. Com exposição visual em projetor foi mostrado aos sujeitos como se estrutura um mapa conceitual. E como exemplo, foi mapeada a resolução de uma expressão numérica. Com informações necessárias sobre como fazer um mapa conceitual, mapearam por fim a resolução do questionário A, como visto na Figura 14:

Figura 14 – Mapeamento do questionário A, por um sujeito da pesquisa.



Fonte: Acervo da pesquisadora, 01/12/2017.

No segundo encontro, foram aplicadas sete atividades, sucessivas, com os materiais manipuláveis e digitais. Cada atividade com o foco em um ou mais conceitos dos números fracionários que de acordo com o objetivo foram se externalizando (que está detalhado no próximo capítulo). E com a conclusão das atividades, foram desafiados novamente ao mapeamento da resolução do questionário B, finalizando os encontros.

As habilidades exigidas para se resolução dos questionários A e B, apresentados na página anterior, é a de resolver problemas com números fracionários envolvendo as operações de adição e subtração. Para isso, o aluno deveria interpretar o problema, comparar frações, reconhecer as várias representações de um mesmo número fracionário, e saber operar com adição e subtração de frações.

Nesta pesquisa procurou-se buscar informações fidedignas dos conceitos que os sujeitos tinham em relação aos números fracionários, ao se apropriar de mapa conceitual como instrumento de investigação.

Para apresentação dos resultados, foram analisados e comparados os mapeamentos dos questionários e observados os conceitos que iam se externalizando de acordo com as sete atividades sugeridas. Analisou-se também a relevância de uso de mapa conceitual como instrumento para investigação e dos materiais manipuláveis digitais para o ensino e aprendizagem de frações, que se apresenta detalhado no próximo capítulo.

CAPÍTULO 4 - RESULTADOS E DISCUSSÕES

"Você pode descobrir mais sobre uma pessoa em uma hora de brincadeira do que em um ano de conversa"
(Platão)

No capítulo anterior, descreveu-se o caminho percorrido na construção da pesquisa, desde a escolha do tema até os procedimentos para coleta de dados. Em prosseguimento, traz-se neste capítulo uma discussão dos resultados que se obteve, através das observações do desenvolvimento das sete atividades, bem como, comparação e leitura do mapeamento dos questionários A e B feito pelos sujeitos da pesquisa.

Com um olhar ausebiliano, o qual considera os conhecimentos prévios do aluno como fator mais importante para o aprendizado, analisou-se quais habilidades os sujeitos revelaram ter sobre frações.

A seção 4.1 inicia-se descrevendo sobre as atividades e as observações feitas em cada uma delas. Logo na seção 4.2, apresentam-se os resultados dos mapeamentos dos questionários, em que se abordaram algumas observações feitas com a verbalização dos sujeitos e da professora de Matemática dos sujeitos, além da discussão sobre a apresentação de tais conceitos no livro didático. Finalmente na seção 4.3 apresenta-se o produto educacional dessa pesquisa.

4.1 Descrição e Análises das Atividades

As atividades ocorreram sucessivamente, cada qual com seu objetivo de investigação, em um intervalo de 1 h e 30 min. Serão especificados os objetivos, os materiais utilizados e o que se observou em cada uma delas, conforme segue abaixo.

4.1.1 A primeira atividade

Com o propósito de investigar as habilidades de representar e identificar frações equivalentes através de dobraduras.

Para desenvolvimento utilizou-se papéis sulfites para representar meio, um terço, e as frações equivalentes a elas, dobrando a folha ora em um lado ora outro.

Esta atividade possibilita a realização das primeiras operações com frações, abstração dos primeiros conceitos e a noção de equivalência através das áreas, além da construção de significados aos termos das frações, conforme afirma Toledo e Toledo (2010).

Foram distribuídas folhas de sulfites aos sujeitos e pediu-se o seguinte procedimento: dobrem a folha ao meio, tracejem uma parte e escrevam a fração que representa a parte tracejada em relação à folha toda. Em seguida dobre do outro lado ao meio e façam novamente a escrita da fração que representa a parte tracejada.

Com uma nova folha, pediu-se o mesmo procedimento, mas agora em três partes iguais. Alguns sujeitos precisaram de ajuda para dobrar a folha em três partes iguais, foram orientados que dobrassem ao meio, abrissem a folha e fizessem coincidir as laterais da folha com o centro, vinculando as dobras, abrissem e retirasse uma das partes. Observou-se que o todo por vez ficaria de tamanho menor, porém não influenciou na compreensão do reconhecimento das frações.

Esta atividade apresentou-se familiar para a maioria dos sujeitos, pois relataram que já haviam participado de uma similar, em momentos passados. Todos identificaram as frações pedidas como $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$, porém, notou-se que não houve percepção por eles sobre a relação de equivalência com o processo de dobradura.

Sequencialmente, aplicou-se a próxima atividade.

4.1.2 A segunda atividade

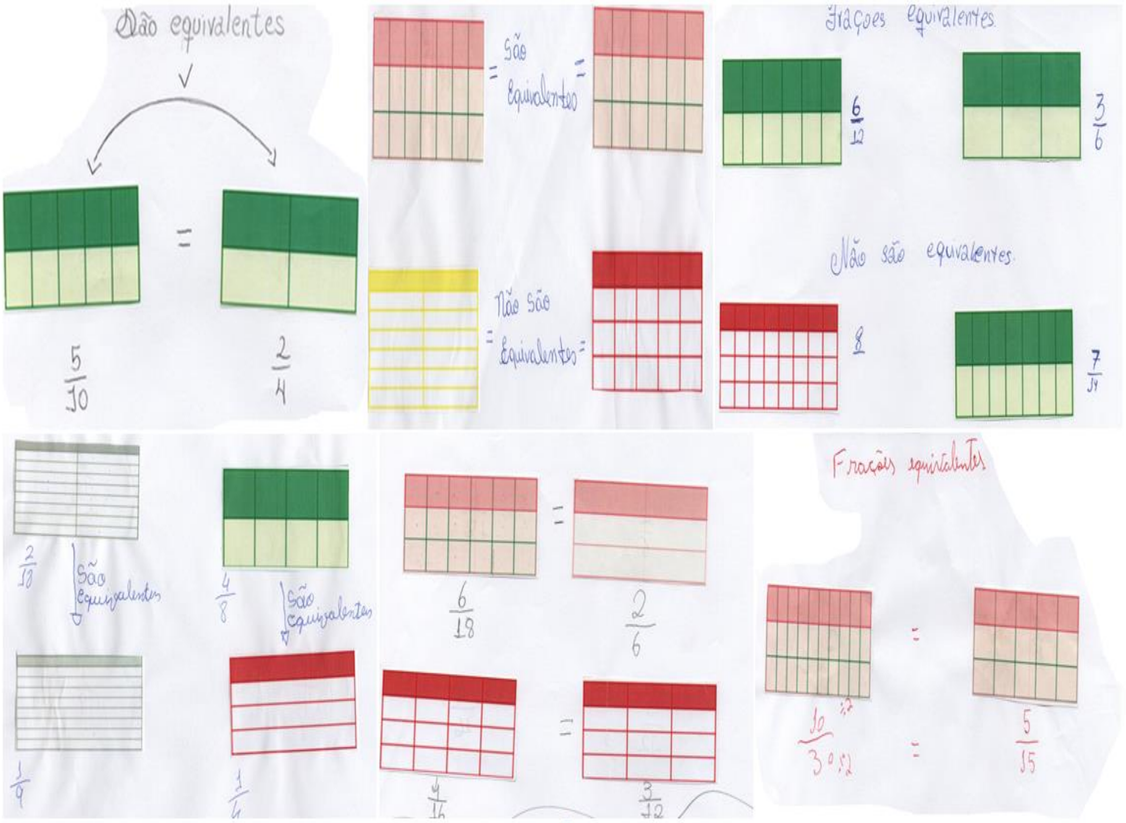
Com objetivo de investigar as habilidades de comparar frações de uma grandeza contínua através de esquemas geométricos, principalmente a equivalência.

Distribuiu-se aos sujeitos retângulos de mesmo tamanho com partes coloridas. Foram desafiados a representar as frações, a partir da observação das partes coloridas mais acentuada, e relacionar com suas equivalentes, como visto na Figura 14.

Esperava-se a representação numérica das frações e a comparação pelo algoritmo comum ou visualmente pelo esquema geométrico, através da contagem dos retângulos das partes coloridas relacionando com o numerador e a quantia total de retângulos relacionando com o denominador.

Considerando que os esquemas que representa o ‘todo’ são de mesmo tamanho. Para visualmente concluir que as frações são equivalentes observa-se a ocorrência de duas situações: se a quantias de retângulos dos esquemas que representam os denominadores e as quantias de partes coloridas têm a mesma quantia, ou se é o dobro, triplo, quádruplo, etc., como por exemplo $\frac{3}{6}$ e $\frac{6}{12}$ na Figura 14.

Figura 15 – Atividade feita pelos sujeitos da pesquisa. Comparação de Frações



Fonte: Acervo da pesquisadora, 01/12/2016.

Notou-se com esta atividade que todos os sujeitos representaram corretamente as frações, porém a minoria (8) relacionou-as com as equivalentes, dentre esses apenas um recorreu à leitura da imagem e dos cálculos de simplificação para relacionar as frações equivalentes, os demais se ativeram às cores das figuras ou aos critérios dos naturais para definir equivalência, como se pode ver ainda na Figura 14.

> Muitas vezes os conteúdos matemáticos são tratados isoladamente e são apresentados e exauridos num único momento. Quando acontece de serem retomados (geralmente num mesmo nível de aprofundamento, apoiando-se nos mesmos recursos), é apenas com a perspectiva de utilizá-los como ferramentas para a aprendizagem de novas noções. De modo geral, parece não se levar em conta que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos (PCN, p. 22).

Apresentaram-se aos sujeitos as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$, e perguntou-se: Qual delas é a maior? Não hesitaram em responder que $\frac{2}{5}$ era maior, com a justificativa de que 2 é maior que 1, e de que 5 é maior que 3, relacionando os numeradores e denominadores como números naturais. Observou-se o que afirma Pires (2010) e Toledo e Toledo (2010), acostumadas com a relação 3 > 2, as crianças acabam achando que frações com numeradores ou denominadores maiores serão maiores.

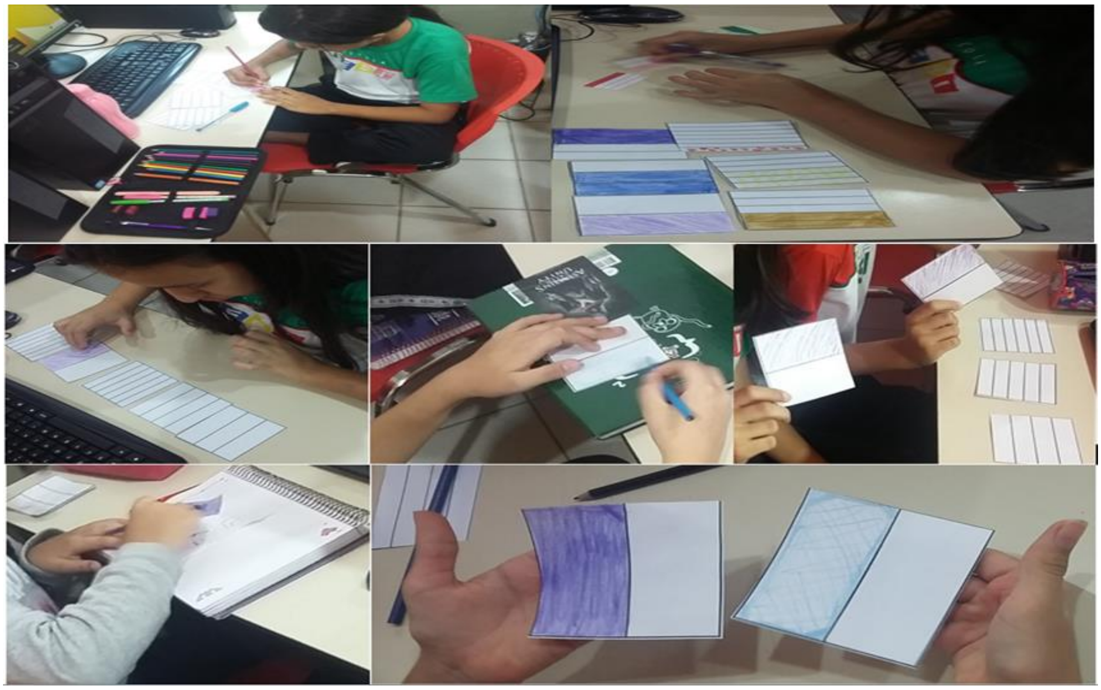
Prosseguiu-se com a próxima atividade.

4.1.3 A terceira atividade

Com o objetivo de investigar as habilidades em identificar os termos das frações relacionando a parte colorida com o numerador e a divisão com o denominador.

Foram distribuídas aos sujeitos seis impressões quadrangulares, com divisões iguais, possíveis para representar frações de $\frac{1}{2}$ até $\frac{7}{7}$ de forma geométrica. Propôs-se que colorissem partes dos quadrados representando as frações $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}$ e $\frac{1}{7}$, como na Figura 15.

Figura 16 – Atividade com Quadrados fracionários.



Fonte: Registro da pesquisadora, 02/12/2016.

No desenvolvimento desta atividade não houve obstáculos para representarem as frações, os sujeitos justificaram adequadamente a escolha do quadrado fracionário para colorir e representar as frações e relacionaram a divisão dos quadrados com o denominador.

Pode-se concluir o que diz Barbosa (1966, p. 150), a utilização de figuras geométricas divididas em partes para a criança hachurar ou colorir as partes indicadas favorece a formação do conceito de fração, significado de seus termos e denominação, uma vez que possibilita o aluno intuitivamente compreender a necessidade de dois números inteiros para expressar um número fracionário.

Após essa atividade, apresentou-se a próxima.

4.1.4 A quarta atividade

Com o objetivo de investigar a habilidade em operar com adição de frações através de observação dos esquemas geométricos, pediu-se que considerassem dois dentre os quadrados fracionários que acabaram de colorir da terceira atividade, identificassem os termos das frações, representassem numericamente em uma folha e executassem os seguintes procedimentos:

Como exemplos as frações $r = \frac{m}{n} = \frac{1}{3}$ e $s = \frac{p}{q} = \frac{2}{5}$.

1° - Segurar dois quadrados fracionários coloridos, frente ao olhar, com as divisões no sentido vertical.

2° - Rotacionar (90°) uma delas, deixando as divisões no sentido horizontal, como na Figura 16, nesse caso $\frac{2}{5}$.

Figura 17 – Fração 2/5 rotacionada.

Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 25/10/2016.

3° - Sobrepor uma figura a outra, alternando, como Figura 17.

Figura 18 – Frações equivalentes a r e s.

Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 25/10/2016.

Neste passo, foram reforçadas as observações das subdivisões que ocorrem nas figuras com o efeito da sobreposição. As áreas totais, das duas figuras, ficam subdivididas em retângulos de mesmos tamanhos, cujas quantias representam o ‘novo’ denominador e as partes coloridas os ‘novos’ numeradores, que representam frações equivalentes às primeiras com denominadores iguais.

Na figura 17 (imagem à esquerda) a área total é 5 retângulos, note que, com a subdivisão pela sobreposição das imagens, serão 15. Isto é, o produto de 5 por 3. Ou seja, o produto dos denominadores. O mesmo ocorre com as partes coloridas, 2 retângulos que ficam subdivididas em 6, isto é, o produto de 2 por 3. Ou seja, o produto do numerador pelo denominador da outra fração. Analogamente, fazemos $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{5} = \frac{5}{15}$.

De forma geral, pode-se relacionar a subdivisão, que ocorre pela sobreposição das imagens, com o processo de encontrar frações equivalentes com os mesmos denominadores.

Então, $\frac{2}{5}$ poderá ser escrito como $\frac{6}{15}$, e $\frac{1}{3}$ poderá ser escrito como $\frac{5}{15}$.

De acordo com o PCN (1998, p. 104), quando o cálculo da adição e da subtração envolvem frações com denominadores diferentes, “pode-se transformá-las em frações com o mesmo denominador (não necessariamente o menor), aplicando as propriedades das frações equivalentes”.

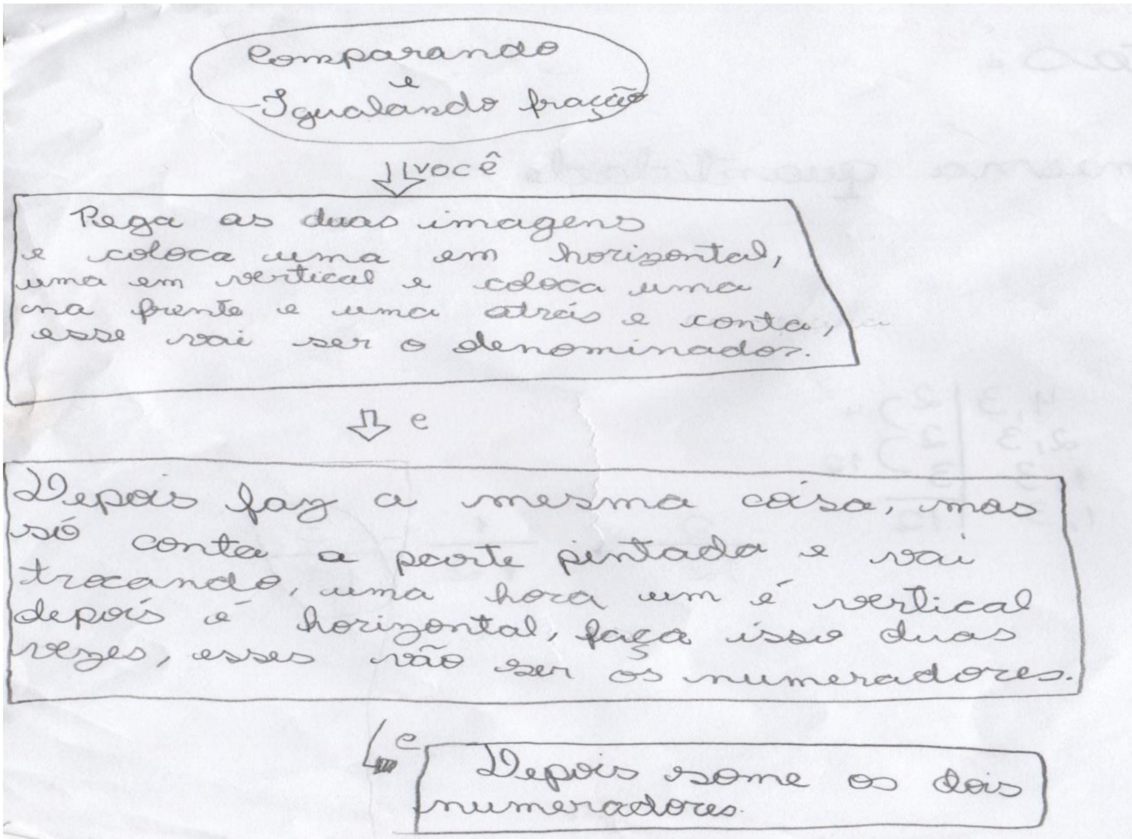
Como as duas frações equivalentes às primeiras têm o mesmo denominador, poderá ser efetuada a soma das frações, pelo método convencional $\frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{5+6}{15} = \frac{11}{15}$ ou contando os retângulos coloridos que representam o numerador e mantendo como denominador a quantia que se originou da subdivisão total da figura.

Com esta atividade, buscou-se verificar se os sujeitos compreendem a necessidade de troca de um número por outro para operar com a adição de frações com denominadores diferentes, através da percepção de subdivisão das áreas.

Segundo Barbosa (1966, p. 151), através de esquemas geométricos é possível “compreender que a multiplicação do denominador aumenta o número de divisões efetuadas sobre o inteiro, e a multiplicação do numerador aumenta o número de partes consideradas”. O despertar com a coincidência dos resultados poderá levar o aluno à aquisição da aprendizagem das frações equivalentes e das propriedades correspondentes. Além da possibilidade de leva-los a entender a obrigatoriedade da troca de um par de números por novo par para fazer a adição, dificuldade que Barbosa (1966) aponta como um dos fatores de suas dúvidas.

Os sujeitos realizaram todos os procedimentos, conforme iam sendo orientados, corretamente. Porém, observou-se que houve percepção dos conceitos de equivalências somente por dois sujeitos, que escreveram a técnica, apresentada na Figura 18, e explicaram o processo para a professora de Matemática frente à turma em pesquisas, ainda citando as frações equivalentes que surgiam com a sobreposição dos dois quadrados fracionários. Os demais, não relacionaram as subdivisões com os conceitos de equivalência.

Figura 19 – Mapa conceitual elaborado pelo sujeito da pesquisa.



Fonte: Acervo da pesquisadora, 01/12/2016.

Considera-se o que diz Lorenzato (2009, p. 26), toda pessoa ao ter contato pela primeira vez com um material tende a observar suas características, são essas percepções que possibilitarão “com ou sem o auxílio do professor, a procura e a descoberta de novos conhecimentos”.

Com bases nas experiências, como argumenta Toledo e Toledo (2010, p. 179), o aluno poderá descobrir as regras para somar frações: “somam-se (ou subtraem-se) frações de denominadores iguais, conservando-se o denominador e somando-se os numeradores”.

Após esta atividade, prosseguiu-se com a próxima.

4.1.5 A quinta atividade

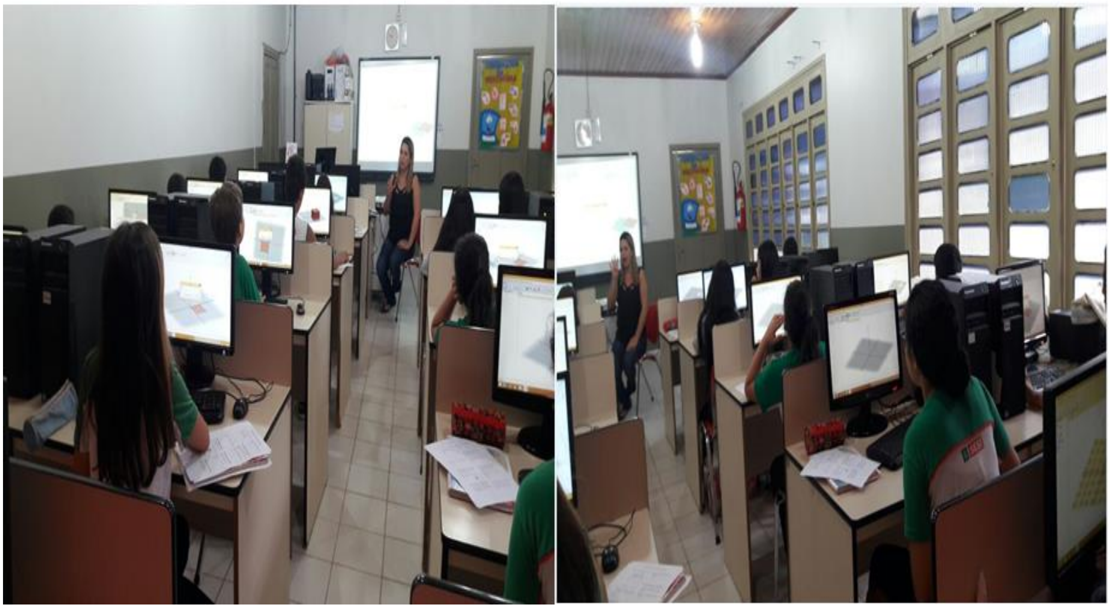
Com o objetivo analisar as possibilidades e aceitação por parte do aluno ao utilizar-se desta ferramenta como auxiliador na aprendizagem, foi disponibilizado aos sujeitos, material impresso da apresentação do geogebra e do tutorial de construção de um cubo. Com o auxílio do projetor, apresentaram-se as vistas do geogebra e os passos para a construção de um cubo na medida em que os sujeitos construíram os seus. Com os imprevistos que ocorreram ao desafio puderam fazer conjecturas e descobrir caminhos e soluções.

Esta atividade permitiu a exploração do geogebra, a possibilidade de formação de conceitos de geometria plana e de frações discretas. Através de representação de pontos, segmentos, polígonos (quadrado), os elementos de um polígono (vértices, lados, diagonais), cubo e seus elementos (faces, arestas) e sua planificação experimentados pelos sujeitos.

Na concepção construtivista, um *software* para ser classificado como educativo precisa levar “o aprendiz a construir seu próprio conhecimento na realização do ciclo descrição – execução – reflexão – depuração – descrição.” (CUNHA e SANTOS, 2008, p. 28).

Esse ciclo tem se apresentado mediante o desafio proposto. Os sujeitos construíram, planificaram e coloriram partes do cubo, interagindo com a linguagem do computador, sujeitos/sujeitos e sujeitos/pesquisadora, citaram as frações pedidas de acordo com as partes coloridas, e fizeram desta apresentação um cenário dinâmico, como se pode ver na Figura 19.

Figura 20 – Sujeitos da pesquisa, laboratório da escola.



Fonte: Registro da pesquisadora, 02/12/2016.

Considerando que os recursos visuais tornam a informação mais fácil de entender, aumentam o interesse, melhoram a capacidade de retenção e permitem que o professor esclareça ou reforce os conceitos. Motivando e instrumentalizando o professor e o aluno no processo de ensino e construção do conhecimento matemático.

"O uso de figuras elaboradas em aplicativos (*software*) de geometria dinâmica pode auxiliar o aluno a entender as figuras geométricas como classes, diferenciando-as do simples desenho de uma figura." (GITIRANA e CARVALHO, 2010, p. 49).

Um dos pontos favoráveis perceptíveis na utilização do geogebra é a possibilidade da construção do próprio conhecimento matemático pelo aprendiz, de forma mais contextualizada e menos linear. Ou seja, para abstrair o conceito de fração discreta (habilidade requerida) o aprendiz dispõe de outros conceitos matemáticos como: noções de geometria plana e espacial e seus elementos, planificação etc., visto que, permite ao professor concentrar-se no planejamento de ensino, deixando de ser um transmissor de conhecimento e se transformar num orientador da aprendizagem.

A atividade apresentou-se mais atrativa que as que se utilizam papéis ou habilidades técnicas em desenho para a construção (experiência da pesquisadora). Houve participação, interação, diálogo, atenção e a curiosidade pelos sujeitos, ver Figura 19.

Destaca-se que essa experiência foi inédita aos sujeitos da pesquisa, nisso pode-se afirmar os efeitos vistos para esse momento. O que fica em aberto para verificar se os efeitos seriam os mesmos, se a ida ao laboratório ou o uso do computador fossem comuns aos sujeitos.

Ao término dessa atividade, iniciou-se a próxima.

4.1.6 A sexta atividade

Com o objetivo de investigar as habilidades de reconhecer frações equivalentes através das áreas subdivididas.

Utilizou-se um material digital, com as características similares ao da segunda atividade, construído pela pesquisadora no geogebra, que permite o dinamismo, através de movimentação de controles deslizantes *m, n, p* e *q*, representar frações contínuas de forma geométrica, fracionária e decimal.

Marcando a opção *Frações Equivalentes*, como na Figura 20, pode-se representar com a movimentação dos controles deslizantes *r* e *s*, até dez frações equivalentes às primeiras. Considerando que:

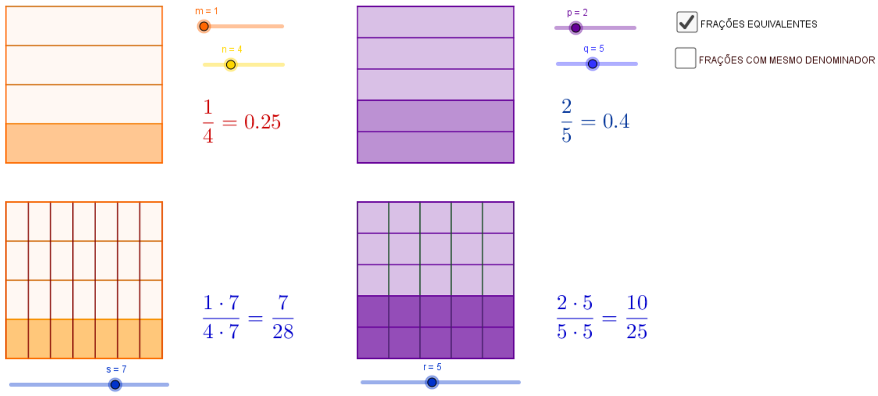
> O professor deve conduzir os alunos a obterem classes de frações equivalentes, e a perceberem que qualquer fração equivalente de uma dessas classes representa a classe; são numerais de um mesmo número fracionário. Êsse fato é primordial no estudo das frações, e deverá ser relembrado em tôdas as ocasiões oportunas, fazendo com que os alunos empreguem a técnica de cálculo de multiplicar (ou dividir) o numerador e o denominador (par ordenado de números que determina o número fracionário) que simplesmente transforma a fração numa fração equivalente, por outro numeral que também representará o número fracionário (BARBOSA, 1966, p. 152).

A possibilidade prática desse material permite comparar frações (ordenação) diretamente. Podem-se formar as frações e analisar os esquemas geométricos. Exemplo observando $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$, visualmente chega-se a conclusão que $\frac{2}{5} > \frac{1}{4}$.

Observando na Figura 20 (imagem à esquerda) nota-se que comparando a área que representa a fração $\frac{1}{4}$ e a área cuja fração $\frac{1}{4}$ foi subdividida em 7 partes, é visto que não se altera. Como o processo de subdividir é o mesmo que ‘cortar’ o todo em porções menores precisa-se de 7 porções de $\frac{1}{28}$ para representar a área $\frac{1}{4}$, o que se dizia 1 de 4 agora será 7 de 28. Isto é, $\frac{1}{4} \times \frac{7}{7} = \frac{7}{28}$.

De forma geral, possibilita a compreensão da classe das frações equivalentes através de comparação da primeira área com a área subdividida, que não se altera, e do algoritmo de multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número natural.

Figura 21 – Vista do material digital: Classe de frações equivalentes.



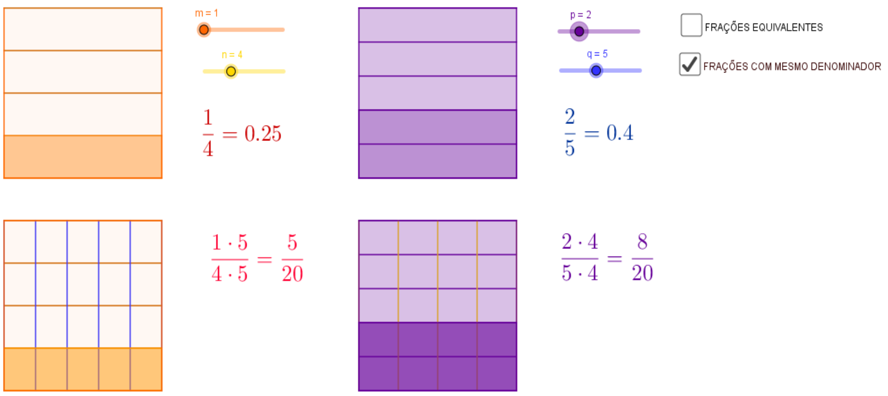
Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 25/10/2016.

Ao marcar a opção *Frações com o mesmo denominador*, como na Figura 21, pode-se verificar que as áreas ficam subdivididas em retângulos o número de vezes que apresentam os denominadores das frações opostas. Exemplo: $\frac{1}{4}$ foi subdividido em 5, e $\frac{2}{5}$ foi subdividido em 4, isto é $\frac{1}{4} \times \frac{5}{5} = \frac{5}{20}$ e $\frac{2}{5} \times \frac{4}{4} = \frac{8}{20}$.

Esse processo visa possibilitar a compreensão da obrigação da troca de uma fração por outras de denominadores iguais para fazer a soma de frações com denominadores diferentes.

De acordo com Barbosa (1966, p. 160), a representação por esquemas gráficos, “há o reforço na visualização”, uma vez que o aluno poderá observar a parte considerada e notar que não temos três partes (retângulos) grandes, nem três partes pequenas, têm-se uma grande e duas pequenas, são simplesmente três partes. Representam partes de tamanhos diferentes que deverão ser subdivididas em partes de mesmo tamanho, para assim efetuarem a soma das partes que agora serão iguais. Evidentemente é necessário ressaltar a substituição das duas frações, mais convenientes, apenas para conseguir a soma.

Figura 22 – Vista do material digital: Frações equivalentes com mesmo denominador.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 25/10/2016.

Mas, para tanto é necessário que haja o teste, a observação e a verbalização dos pensamentos, isto é, a comunicação das ideias, raciocínios e conclusões deles. Então o professor poderá avaliar o que os alunos aprenderam, e assim, segundo Lorenzato (2009, p. 27) “após a verbalização, é recomendável que cada aluno tente registrar em seu caderno, conforme suas possibilidades, as novas conquistas decorrentes das atividades, concretas e abstratas, por eles realizadas”.

> Todo MD tem um poder de influência variável sobre os alunos, porque esse poder depende do estado de cada aluno e, também, do modo como o MD é empregado pelo professor. Assim, por exemplo, para um mesmo MD, há diferença pedagógica entre a aula em que o professor apresenta oralmente o assunto, ilustrando-o com MD, e a aula em que os alunos manuseiam esse MD. O MD é o mesmo, mas os resultados do segundo tipo de aula serão mais benéficos à formação dos alunos porque, de posse do MD, as observações e reflexões deles serão mais profícuas, uma vez que poderão, em ritmos próprios, realizar suas descobertas e, mais facilmente, memorizar os resultados obtidos durante as atividades (LORENZATO, 2009, p. 27).

Esta atividade foi apresentada aos sujeitos apenas em exposição no projetor, onde a pesquisadora, movendo os controles, esclareceu a formação das frações e a classe de equivalência, porém os sujeitos não manusearam, assim não houve observações nesta atividade. Prosseguiu-se com a próxima atividade.

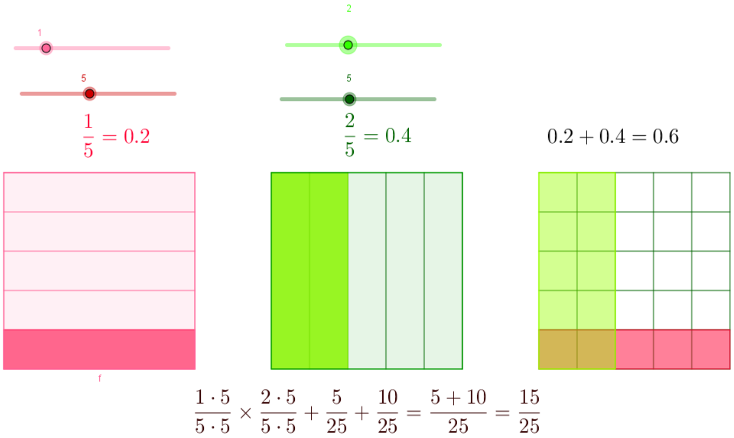
4.1.7 A sétima atividade

Com o objetivo de investigar as habilidades de somar frações geometricamente, apresentou-se ainda produzido com as funções do *software* geogebra um material digital similar ao da quarta atividade, agora de forma dinâmica.

Esse material oferece as seguintes possibilidades:

Ao mover os controles deslizantes, Figura 22, é possível formar frações contínuas com numeradores e denominadores de 1 a 10 com suas representações geométrica, fracionária e em números decimais.

Figura 23 – Vista do material digital: Adição de frações.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 25/10/2016.

Ainda movendo os controles deslizantes nota-se que as duas frações formadas aparecem também uma sobreposta à outra. Com a ocorrência de subdivisão das partes coloridas, que representam os numeradores, e do ‘todo’ que representam os denominadores, poderá ser executada a leitura e a escrita das frações equivalentes com o mesmo denominador, contando os retângulos e efetuar a soma.

Este objeto de aprendizagem pode favorecer o processo de formação do conceito de número racional, a partir do dinamismo de sua representação geométrica, numérica e em número decimal. Lembrando o que diz Lorenzato (2009) que, atividades manipulativas ou visuais não garantem a aprendizagem, faz-se necessária, deste modo, atividade mental, por parte do aluno.

> Também a importância de levar em conta o conhecimento prévio dos alunos na construção de significados geralmente é desconsiderada. Na maioria das vezes, subestimam-se os conceitos desenvolvidos no decorrer das vivências práticas dos alunos, de suas interações sociais imediatas, e parte-se para um tratamento escolar, de forma esquemática, privando os alunos da riqueza de conteúdos proveniente da experiência pessoal (PCN, 1998, p. 22).

Conforme Gitirana e Carvalho (2010, p. 51), “uma imagem vale mais que mil palavras”, e neste contexto o suporte dado aos conceitos pelas imagens é essencial. Porém, deve-se ter o cuidado para que as representações não atrapalhem o aprendizado do aluno e nem se desvie do foco pretendido.

O material desta atividade foi construído similarmente ao da quarta atividade. A partir da sobreposição de quadrados fracionários, porém difere-se por ser digital e pelo dinamismo de formar frações e pela representação das frações em números decimais, com propósito de que os sujeitos compreendam que existem outros algoritmos para fazer a adição de frações, além do algoritmo comum. Porém, devido à restrição de tempo para a aplicação das atividades, foram apresentados somente em exposição no projetor.

Por fim da analises das atividades, segue-se fazendo as observações, agora em análises ao mapeamento do questionário A e B dos sujeitos.

4.2 Análises dos Mapeamentos dos Questionários A e B

Com a leitura das proposições apresentadas nos mapeamentos dos 20 sujeitos do questionário A, chega-se às seguintes observações, apresentadas na Tabela 2 e no tópico 1 mais abaixo:

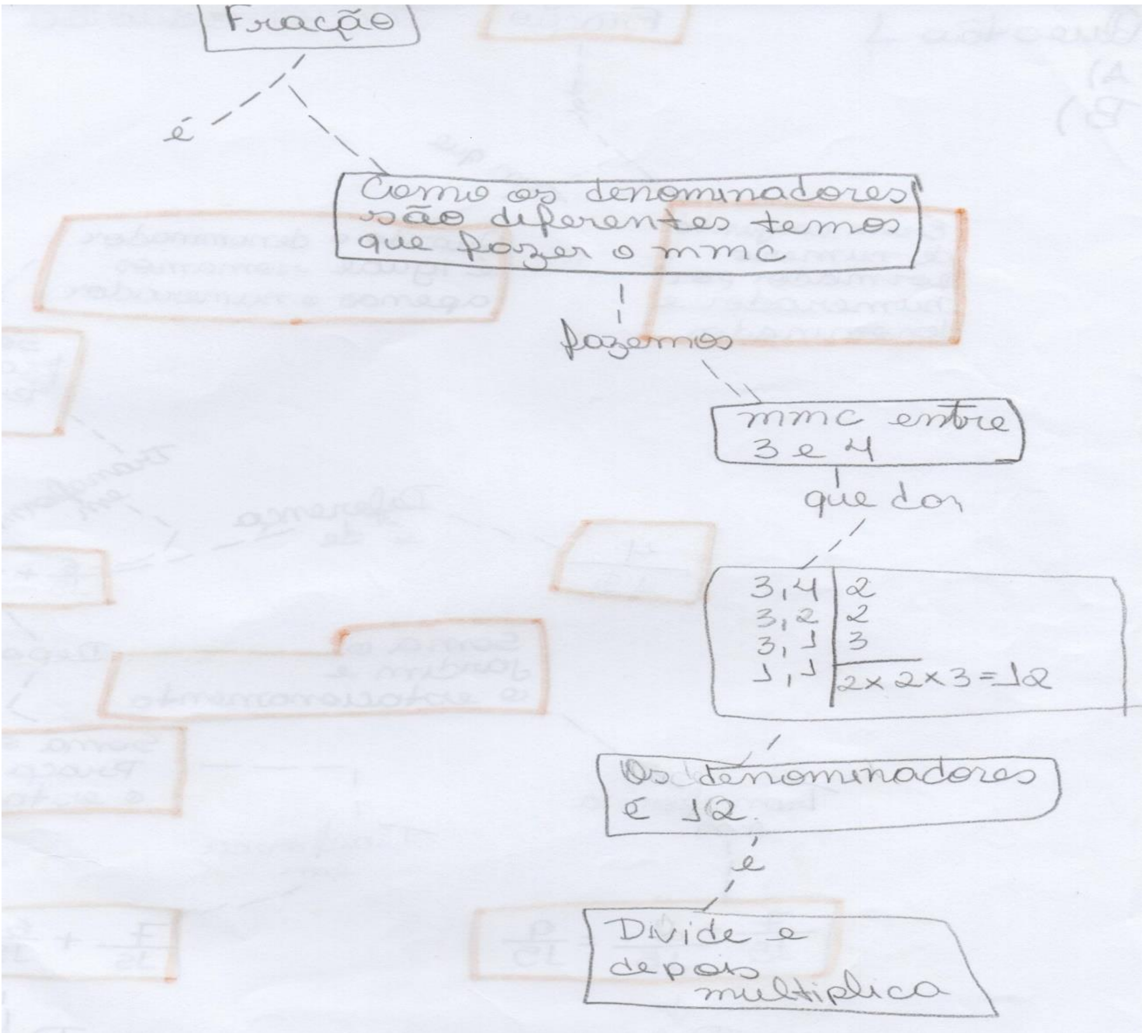
Quadro 02 – Habilidades apresentadas pelos sujeitos no mapeamento do questionário A.

Habilidades investigadas	**Total de sujeitos com habilidades**
Identificar e representar os termos de uma fração	18
Operar com adição e subtração de frações com denominadores iguais	12
Operar com adição de frações com denominadores diferentes	6

Fonte: Acervo da pesquisadora, 05/07/2017.

Tópico 1 – Nesse tópico é possível enfatizar que se observou em análises dos mapeamentos dos seis sujeitos que mostraram habilidades em operar com adição de frações com denominadores diferentes a apropriação do algoritmo comum proposto pelos livros didáticos, como exemplo, a Figura 23 onde foi descrito os procedimentos para resolução.

Figura 24 – Mapeamento do questionário A: Passos do algoritmo comum.



Fonte: Acervo da pesquisadora, 30/11/2016.

A resolução apresentada pelo projeto Teláris, livro de Matemática do 6° ano de onde foi retirada a segunda questão, "Pela manhã uma balsa percorreu $\frac{2}{3}$ de uma distância e a tarde, $\frac{1}{4}$. Que fração da distância ela percorreu nos dois períodos?" é de que, para fazer a adição de duas frações com denominadores diferentes é preciso reduzir as frações ao mesmo denominador. E apresenta duas maneiras de fazer:

A primeira escrevendo as frações equivalentes a $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$ até acharem duas com denominadores comum, no caso $\frac{2}{3} \rightarrow \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \ldots$ e $\frac{1}{4} \rightarrow \frac{2}{8}, \mathbf{\frac{3}{12}}, \frac{4}{16}, \ldots$ e assim: $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$. E outra forma, achando o mínimo múltiplo comum (mmc), fatorando 3 e 4 chegando ao mmc(3,4) = 12 seguindo a regra de dividir o mmc pelos denominadores e multiplicar pelos numeradores e após somarem os numeradores mantendo o denominador, algoritmo, que exige do aluno a memorização.

Ao analisar as formas que se apresentam os conceitos de frações em alguns livros didáticos do Ensino Fundamental e no livro utilizado pelos sujeitos da pesquisa, verifica-se que tanto os primeiros conceitos, quanto a adição de frações com denominadores iguais é bastante explorada por esquemas gráficos, o que, talvez, justifique a porcentagem de acertos em relação à representação de fração e adição com denominadores iguais, porém as frações equivalentes e a adição de frações com denominadores diferentes são apresentados somente pelo algoritmo comum de resolução.

Como citados acima, observou-se também, que os autores apresentam um mesmo esquema para representar as frações com denominadores iguais, e trazem sempre grandezas homogêneas como exemplos.

> Utilizar só o raciocínio com grandezas homogêneas, não é recomendado; assim, só se adicionam grandezas homogêneas, poderá trazer confusão; 5 petecas com 2 petecas, mas também é possível reunir, juntar (adicionar no sentido comum) grandezas não homogêneas aparentemente, como 5 petecas com 2 bolas são 7 brinquedos (BARBOSA, 1966, p. 159).

Estas observações levam à reflexão de que, ao abordar os conceitos de equivalência através do algoritmo comum, não terá significado para o aluno, então não abstrairá o conceito, assim não representarão as diferentes escritas fracionárias de um número racional, restando aos de fácil memorização, as regras, que possivelmente esquecem com o passar do tempo.

Lorenzato (2010, p. 122) lembra que, ao comparar frações os alunos provavelmente descobrirão com a vida “que $\frac{3}{5}$ pode ser menor, igual ou maior que $\frac{5}{7}$, dependendo do contexto, do referencial de comparação (por exemplo, a metade do salário de algumas pessoas é maior que o salário inteiro de outras)”. No entanto ao invés de ensinar regras aos alunos, deve-se manter uma postura metodológica facilitadora de aprendizagem oferecendo referenciais concretos na abordagem dos conceitos.

Indagou-se os seis sujeitos sobre os porquês de usaram o algoritmo comum para a resolução do questionário, responderam ‘que tinham aprendido daquela maneira e que não sabiam resolver de outro jeito’.

Em uma conversa formal a professora, da turma em pesquisa, relata que ‘utilizou-se somente do livro didático da instituição para o ensino de frações, e que, o quadro da sala de aula apresenta uma malha quadriculada cuja utilidade foi para desenhar retângulos, apresentando as frações e as equivalentes a elas em esquemas gráficos, de maneira rápida’.

Em análise à Avaliação do 4° Bimestre formulada pela professora para os alunos, pode-se verificar aridez na formulação das questões, como por exemplo, no Quadro 1:

Quadro 03 – Questão da Avaliação do 4° Bimestre, proposta pela professora de Matemática dos sujeitos.

1) Usando a equivalência de frações, preencha o espaço em branco escrevendo o número que está faltando.

a) $\frac{3}{4} = \frac{21}{\square}$ b) $\frac{18}{20} = \frac{\square}{10}$

2) Efetue as operações

a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} =$ b) $\frac{5}{6} - \frac{1}{2} =$

Fonte: Acervo da pesquisadora, 02/12/2016.

O procedimento sugerido aos alunos era o de calcular seguindo o algoritmo comum, apresentado acima. Desse modo, segundo Lorenzato (2010, p. 122), a tarefa para o aluno reduz-se "a um mero exercício de aplicação de regras sem compreensão do significado de seu procedimento". Ainda ele diz que, dispende menos esforços da parte do professor em exercitar os alunos por meio de algoritmos do que lhe apresentar desafios que despertem curiosidade e possibilitem a proposta de diferentes soluções, e quando o professor adota essa postura:

> Não há preocupação em favorecer uma aprendizagem ativa por parte do aluno e não se procura gerar um contexto que o leve a desenvolver a capacidade de perceber regularidades, fazer generalizações, analisar, sintetizar e validar os resultados, entre outras (CARVALHO e LIMA, 2010, p. 26).

No entanto, visando uma melhor formação do aluno:

> É preciso optar pela alternativa mais difícil ao professor. Mais difícil porque exige um planejamento mais minucioso e, também, porque expõe o professor ao inesperado, às vezes, até ao desconhecido, mesmo porque estamos acostumados a receber programação e demais orientações complementares prontas, elaboradas pela Secretaria de Educação, pelo Ministério da Educação (MEC) ou pelos autores de livros didáticos, cabendo a nós segui-las (LORENZATO, 2010, p. 126).

Gitirina e Carvalho (2010, p. 32) dizem que, "uma escolha metodológica bem distinta é a que se pauta, essencialmente, na participação do aluno nas resoluções de problemas, os quais devem ser planejados e organizados de forma a favorecer que os conhecimentos visados aflorem".

Mandarino (2010, p. 116), acrescenta que é importante “não restringir a compreensão da equivalência a apenas alguns exemplos típicos, seguidos da apresentação de regras sem significados, e que parecem não ser validas para outras ideias associadas a frações”.

Assim a formulação de situações problemas que envolvam os conceitos de comparação de frações com estratégias diversificadas poderão aproximar o aluno ao pensamento adequado sobre equivalência.

Ainda, fez-se uma observação diante da fala de um sujeito da pesquisa que nos pergunta: resolvo primeiro a divisão ou a multiplicação depois que achar o mmc?

Esta dúvida remete a uma reflexão sobre os passos para resolução de expressões numéricas, conteúdo ensinado anteriormente as operações com frações, em que o professor enfatiza que para resolvê-las devem seguir a ordens das operações, que segundo Dante (2015, p. 61), “efetuamos as multiplicações e divisões, na ordem em que aparecem”. Ou seja, ora a multiplicação se resolverá primeiro, ora a divisão.

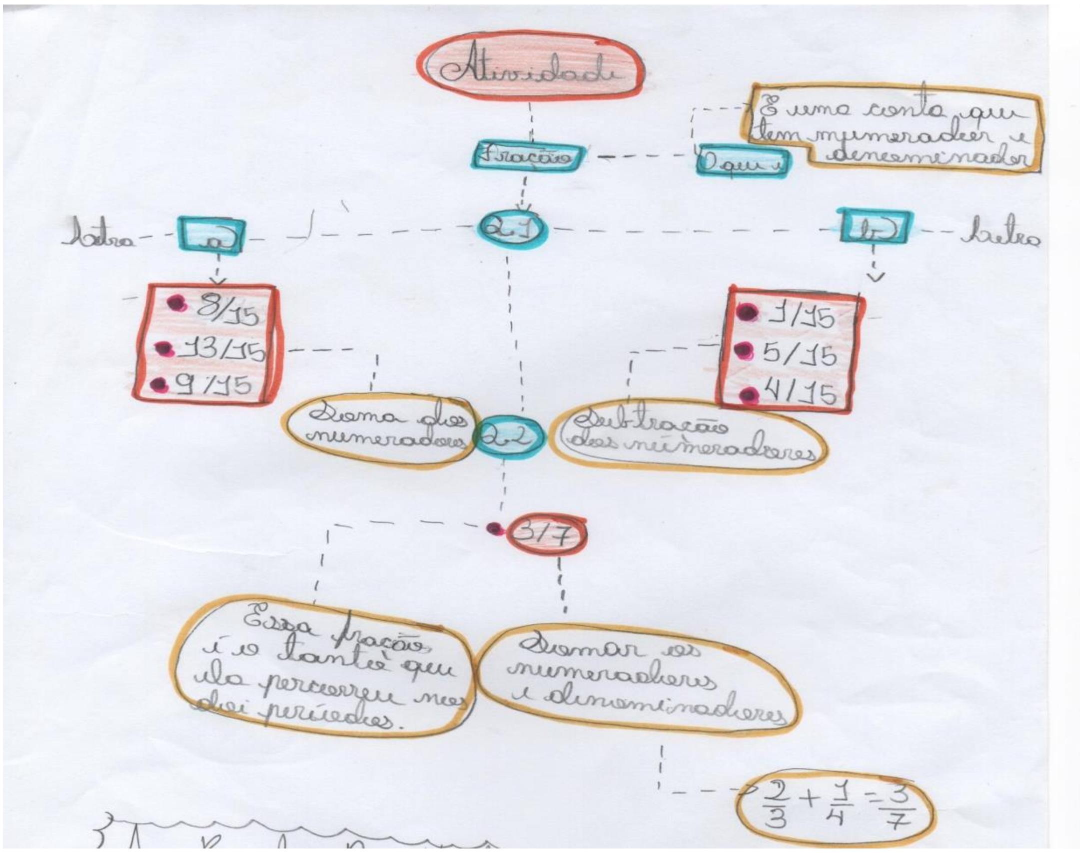
De acordo com Carvalho e Lima (2010, p. 25), “a memorização de conceitos e procedimentos é importante, mas deve ser conquistada pela via da compreensão e da sistematização”.

No caso de resolver adição de frações pelo algoritmo comum, diz que: acha-se o mmc por fatoração ou pelos múltiplos comuns dos dois denominadores e, divide-se o mmc pelos denominadores e multiplica-se pelos numeradores. Comparando com a regra da expressão numérica causa estranheza e confusão na hora da resolução confrontando com os conceitos por ele internalizados.

> A manifestação desse tipo de obstáculo está intimamente relacionada ao aparecimento de erros recorrentes, e não aleatórios, cometidos pelos alunos na construção de um novo conhecimento, sendo assim, o erro é visto como algo necessário, parte constituinte de processo ensino e de aprendizagem (BROSSEAU, 1983, apud PIRES, 2010, p. 53).

Observando na Figura 24 verifica-se que, o sujeito faz a interpretação do problema, quando diz: essa fração é o tanto que ela percorreu nos dois períodos. Mas ele cita que: devem-se somar os numeradores e os denominadores, onde se conclui que não foi construído o conceito de equivalência.

Figura 25 – Relação com os números naturais.



Fonte: Acervo da pesquisadora, 30/11/2016.

Provavelmente ele visualiza a fração como dois números inteiros separados por um tracinho, sem relação alguma, conforme afirma Barbosa (1966), e não compreende que esses dois números representam um único número fracionário.

Reforçou-se que a investigação ocorreu nos últimos dias letivo e os sujeitos da pesquisa prosseguiriam para o 7° ano, sem abstraírem os conceitos de equivalência apresentados na série concluída, assim desafiando o professor da próxima série esclarecer esses conceitos.

Pires (2010) ressalta que para ter a habilidade de operar com adição de frações, é necessário realizar rupturas com as ideias construídas para os números naturais, além de aceitar ideias mais complexas.

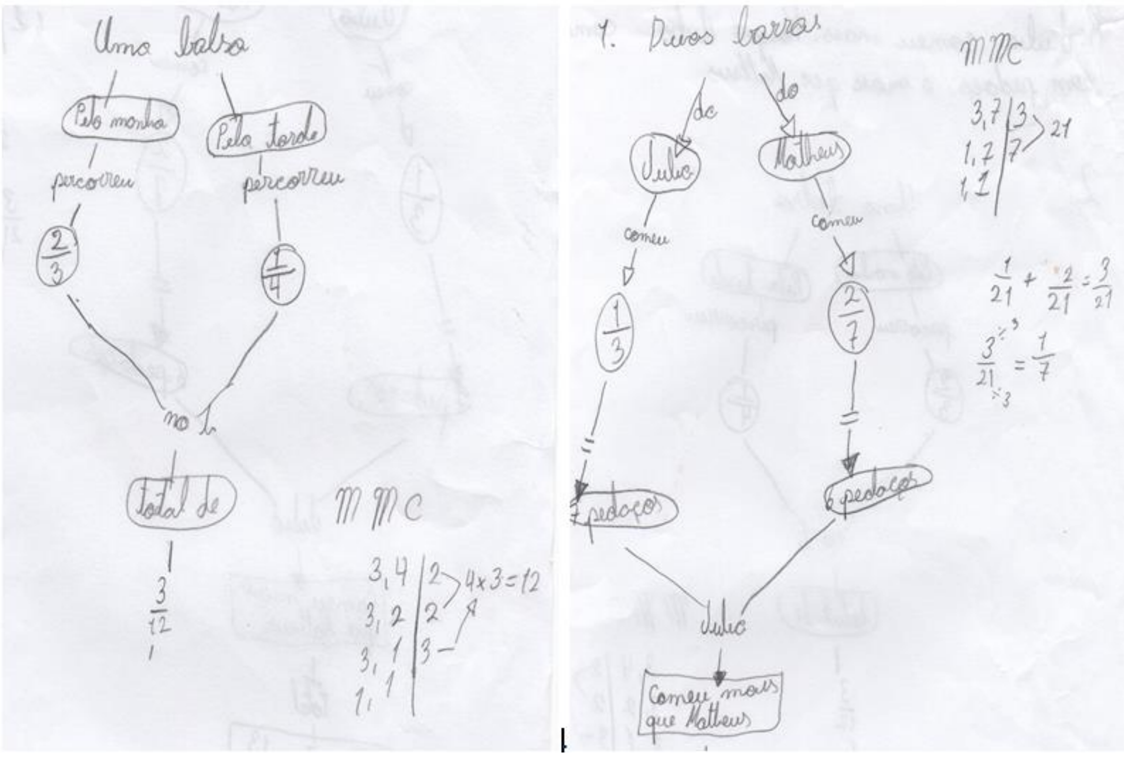
Uma das causas desses obstáculos afirma Barbosa (1966, p. 147), que “visto, não raras vezes, o professor se limita a dar regrinhas sem as necessárias explicações”.

Toledo e Toledo (2010, p. 163) dizem que, “é fundamental oferecer aos alunos a oportunidade de manipular materiais variados, que permitam a construção dos conceitos por meio da experimentação, da verificação de hipóteses, levantadas diante de situações-problema convenientemente apresentadas.”

Após sete atividades apresentadas nesta seção, aplicou-se o questionário B com o objetivo de fazer um paralelo com o questionário A e investigou-se se houve formação de conceitos ou mudança na estrutura cognitiva dos sujeitos referente ao objeto de estudo.

Considerando que não foi possível o aprofundamento das atividades nem a exploração de forma mais intensiva ou contextualizada com os materiais aqui utilizados, devido ao tempo disponível para a investigação, ainda assim, pode-se observar com o uso desses materiais avanços em relação aos conceitos de equivalência, como mostra a Figura 25.

Figura 26 – Mapeamento do questionário A e B de um mesmo sujeito.



Fonte: Acervo da pesquisadora. 01/12/2016.

No mapeamento do questionário A, Figura 25 (imagem à esquerda), o sujeito utiliza-se das regras para resolver a questão, fatora para achar o mínimo múltiplo comum entre os denominadores 3 e 4, portanto, não prossegue até o fim com o algoritmo e conclui erroneamente que $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$. O que significa que não memorizou todo o processo necessário para utilizar-se das regras.

No entanto, na resolução do questionário B, Figura 24 (imagem à direita), ele faz a interpretação do problema colocando como questão focal “duas barras” e como frase de ligação usa a palavra “da” e “do” dando a entender que destas duas barras uma é “da Julia” e a outra “do Matheus” e reforçando que Julia comeu $\frac{1}{3}$ e Matheus comeu $\frac{2}{7}$, chegando à conclusão que $\frac{1}{3}$ de 21 são 7 pedaços e $\frac{2}{7}$ de 21 são 6 pedaços e, concluindo que Júlia comeu mais que Matheus, o que está correto.

Ao fornecer esquemas gráficos no questionário B percebeu-se que o aluno se apropriou da imagem, subdividindo-a chegando a esse entendimento, o esquema gráfico possibilitou a interpretação e resolução do problema, porém é visto que o sujeito ainda não abstraiu o conceito de equivalência nem memorizou as regras.

Os materiais utilizados nas atividades foram manipulados de maneira rápida e experimental, mesmo assim, pode-se concluir que são relevantes como auxiliadores, uma vez que agregando combinação de texto e imagem, poderá instigar maiores significados aos conceitos de frações. Reforça-se ainda que, satisfaz o que diz Reys (1971, apud Mendes, 2008, p. 11), que os materiais devem ser "apropriados para serem usados em diferentes níveis de escolaridade e em níveis diversos de formação de um mesmo conceito de matemático, favorecendo a abstração matemática através da manipulação individual ou em grupo".

Convém que dispuséssemos de mais tempo para investigar sua eficácia como auxiliadores na formação de conceitos, no qual se pretendeu deixar como algo a investigar em momentos oportunos. Sendo o objetivo desta pesquisa, verificar quais as causas possíveis que levariam o aluno a não abstrair os conceitos de frações, conclui-se que:

> O conceito de equivalência, assim como a construção de procedimentos para a obtenção de frações equivalentes são fundamentais, para resolver problemas que envolvem a comparação de números racionais expressos sob a forma fracionária e efetuar cálculos com esses números (PCN, 1991, p. 103).

Diante dos resultados da pesquisa, verificou-se a necessidade de formação dos conceitos de equivalências. Somente com a abstração desse conceito é possível o aprendiz compreender a necessidade de troca de um número por outro para somar frações com denominadores diferentes. Entende-se que o conceito de equivalência é um subsunçor para a ancoragem dos procedimentos de adição de frações, que serão subsunçores de outros. Fica o desafio aos professores em alterar as práticas pedagógicas, dar mais ênfases à formação de conceitos para que esta dificuldade não provoque rejeições com a Matemática em possíveis resoluções de problemas futuros.

4.3 O Produto da Pesquisa

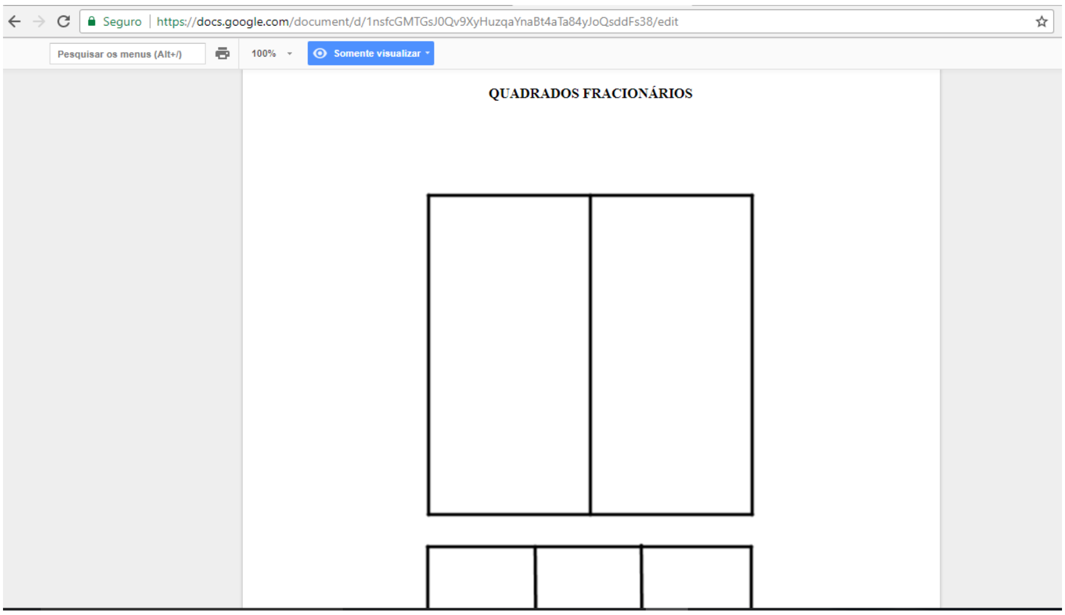
De acordo com Resolução PPECIM[25] Nº 02/2016 está no cerne da concepção dos Mestrados Profissionais da área de Ensino o fato do espaço de pesquisa ser o próprio ambiente de atuação do professor-mestrando, de modo a permitir maiores condições que o fruto de sua pesquisa permeie a sua prática docente e sirva como um dos elementos transformadores do processo de ensino-aprendizagem de sua região. A pesquisa em ensino é de natureza translacional, na qual tecnologias, produtos e processos educativos e sociais são gerados a partir da aplicação e da mediação do conhecimento acadêmico, retroalimentando-o.

Ao refletir sobre esses aspectos e sobre a realidade escolar, buscou-se produzir materiais, para o ensino e aprendizagem das frações contínuas, de forma manipulável e digital. Que se apresentam como produto educacional oriundo desta pesquisa e descrito sua sequência didática na página:<**https://goo.gl/ipy2bi**>.

Esses materiais didáticos sugeridos na aplicação das atividades da pesquisa, construído através das funções do software geogebra, estão disponíveis para impressão e para *download* nas páginas, conforme apresentados abaixo:

★ Quadrados Fracionários**: <https://goo.gl/PNoKM8>.**

Figura 27 - Vista do material manipulável – Quadrados Fracionários.



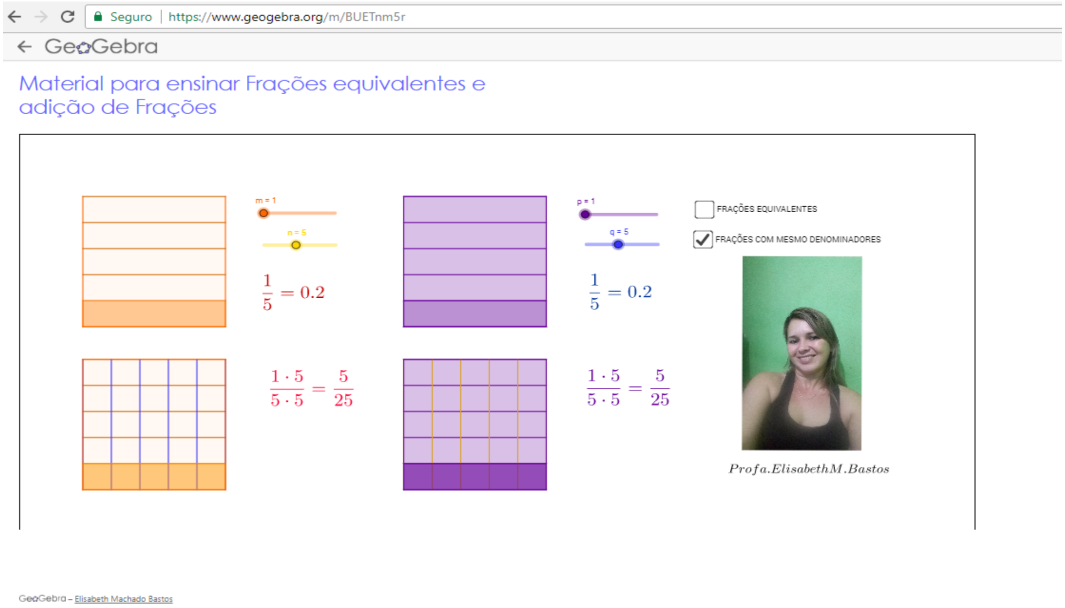
Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 25/10/2016.

★ Frações Equivalentes: **<https://goo.gl/JziM46>.**

---

[25] Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática - Universidade Federal do Acre. Disponível em: < https://goo.gl/k4AuUG>. Acesso em: Set. 2017.

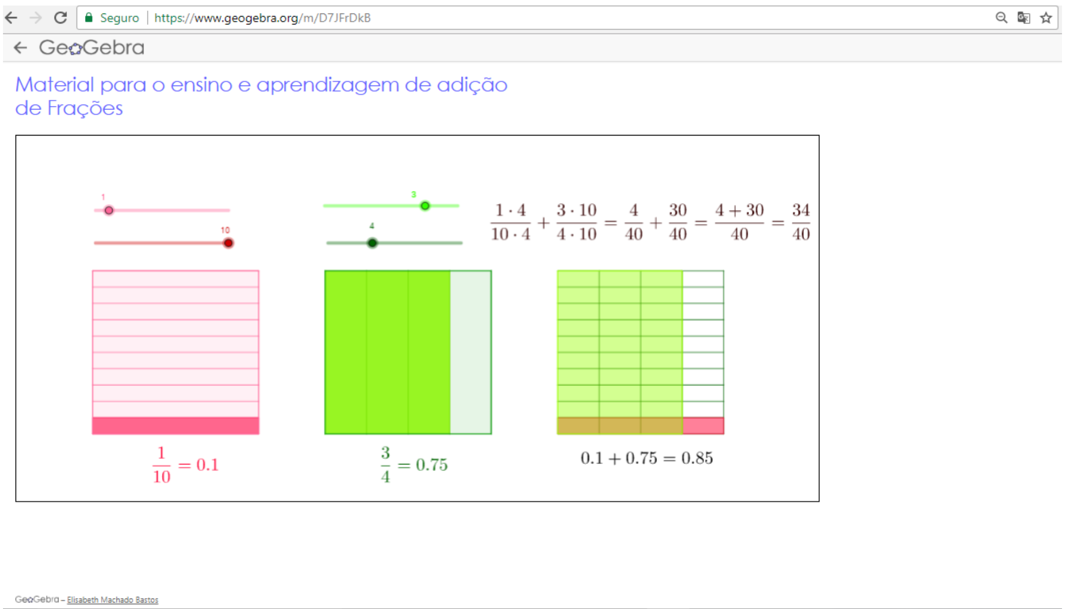
Figura 28 - Vista do material digital: Frações equivalentes.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 25/10/2016.

★ Adição de Frações: **<https://goo.gl/bnniQH>.**

Figura 29 - Vista do material digital – Adição de Frações.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 25/10/2016.

★ Leitura de Frações: **<https://goo.gl/E7vUpo>**

Figura 30 - Vista do material digital – Leitura de Frações.

Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 25/10/2016.

Também se encontra disponível na página: < **https://goo.gl/EBmGgr** > o tutorial dos passos de construção do material digital Adição de Frações, para que outros professores possam obter conhecimentos de algumas funções do *software* geogebra e utilizá-las de acordo com seus objetivos.

CAPÍTULO 5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

"O fator singular mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos".
(David Ausubel)

É comum a responsabilização aos docentes no que diz respeito ao fracasso escolar e inadequações dos discentes na disciplina de Matemática. Nesse sentido, é possível observar vários fatores contribuintes para tais dados, de modo que se torna injusto o peso dessa responsabilidade ser atribuído praticamente exclusivamente à figura do professor. Ocorre que, mesmo que o professor acredite no potencial dos alunos, oferecendo-lhe condições de aprendizagem, os índices de notas baixas na disciplina de Matemática, infelizmente, nem sempre se reduzem como resposta à prática docente.

Buscou-se, assim, na presente pesquisa, de forma sistemática, saber os motivos pelos quais os estudantes chegam nas séries posteriores sem dominarem o conceito básico de fração, conteúdo este preferencialmente ensinado no 6º ano de Ensino Fundamental.

Em análises aos resultados, percebe-se que os alunos compreendem o conceito de fração, identificam e representam os termos, numerador e denominador, porém não construíram o conceito de equivalência. E quando desafiados aos cálculos, raciocinam sobre frações como se fossem números inteiros. Ressalta-se que a investigação ocorreu no final do ano letivo e somente uma pequena parte dos sujeitos pesquisados mostraram habilidade de calcular com adição de frações com denominadores diferentes, assim prosseguem para séries seguintes com essas dificuldades.

Nota-se também que esses conteúdos são abordados em sala de aula de acordo com a proposta da escola e somente como apresentado no livro didático, pelas regras que exigem memorização, e, nessa perspectiva, tem se mostrado ineficaz a aprendizagem significativa.

Sabe-se que a aprendizagem significativa é dependente da estrutura cognitiva idiossincrática do indivíduo e requer da associação de um conceito a outro dentro de um sistema hierarquicamente organizado, uma vez a aprendizagem sendo formal depende de mecanismo para a apresentação dos conceitos e da retenção pelo indivíduo.

Nessa perspectiva, é emergente mudança na prática docente, uma delas é em avaliar constantemente seu método de ensino, repensar suas práticas procurando sempre potencializar as condições ideais de aprendizagem.

Os conceitos matemáticos precisam ser preservados, porém precisam ser apresentados de tal forma a serem assimilados pelos alunos. Para isso é necessária a ação didática criativa do professor de forma a transformar um saber científico a um saber ensinado. Nesse cenário, o professor deverá concentrar suas energias no ensino e planejar suas aulas calcadas em atividades que envolva o aprendiz, condições necessárias para que ocorra a aprendizagem significativa.

O produto desta pesquisa, que são alguns materiais didáticos manipuláveis e digitais, foi pensando como um recurso para auxiliar o professor no ensino dos números fracionários através de esquemas geométricos, na forma algébrica e na forma decimal, com o objetivo de possibilitar a formação de conceitos e a autonomia do aprendiz.

De uma forma geral espera-se que essas ideias possam contribuir para novas investigações, e reflexões sobre o processo ensino e aprendizagem. Considerando que não existem limites, para quem pode e quer ir além.

REFERÊNCIAS

AMAZONAS. Secretaria de Estado de Educação e Qualidade do Ensino. **Sadeam**, 2015/ Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. vol. 3 (jan./dez. 2015), Juiz de Fora, 2015 – Anual. Conteúdo: Revista do Sistema de Avaliação. Estadual ISSN 2238-0264.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. **Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática.** In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L.(ORGS.). Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. 4. ed. rev. ampl. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012. pp. 31-51.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos**: Uma perspectiva cognitiva, 1 ed. Lisboa: Plátano, 2000. 1 cap.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional**. Trad. Eva Nick e outros. 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980. 1 cap.

BALBINO, J. **Objetos de Aprendizagem**: Contribuições para genealogia. 2007. Disponível em:<http://www.dicas.com.br/educacao_tecnologia/educacao_tecnologia_20070423.php#.WUg2YOv1DIU> . Acesso em: Jun. 2017.

BARBOSA, R. M. **Matemática, Metodologia e Complementos para Professores Primários.** vol. 2. Editora: L.P.M, 1966.

BRASIL. Ministério da Educação. PDE: **Plano de Desenvolvimento da Educação:** SAEB: ensino médio: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC, SEB; Inep, 2011.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRASIL. Universidade Federal do Acre. **Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.** Resolução PPECIM Nº 02/2016. . Disponível em: < http://www.ufac.br/mpecim/menu/noticias/resolucao-ppecim-no-02-2016>. Acesso em: Set. 2017.

CAED – Faculdade de Educação Universidade Federal de Juiz de Fora – Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação. **Avaliação Formativa**, 2015. Disponível em: <http://www.portalavaliacao.caedufjf.net/pagina-exemplo/tipos-de-avaliacao/avaliacao-formativa/>. Acesso em: 10 Dez. 2016.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** 5 ed. Lisboa: Lda, 1970.

CARVALHO, J. B. P.; LIMA, P. F. **Escolha e uso do livro didático**. In: PITOMBEIRA, J. B. (coord.) e CARVALHO, F. Coleção Explorando o Ensino. vol. 17. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. pp.15-30.

CENTURIÓN, M. R.; JAKUBOVIC, J. **Matemática na Medida Certa.** Manual do professor. 6° ano**.** 11. ed. São Paulo: Scipione, 2010.

CORREIA, P. R. M. Psicologia da Aprendizagem – Vídeo Aula 13 - **O que são mapas conceituais.** Publicado em 24 de ago de 2015. Curso de Licenciatura - Univesp - Universidade Virtual do Estado de São Paulo- Disciplina: Psicologia da Aprendizagem (RPA-001). Disponível em: < https://youtu.be/aF0UbIdN1Eg> Acesso em: Fev. 2017.

CUNHA, V.V.; SANTOS, P. R. P. **Computador: ferramenta para a construção do conhecimento.** In: OLIVEIRA. D.R.; SANTOS, P.R.P.; PACHECO, S.B.; CUNHA, V.V. Informática na Educação 2. vol. 2. mód. 1 e 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2008.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris:** Matemática 6. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.

FERRAZ, A. P. C.; BELHOT, M. R. V. - **Taxonomia de Bloom:** Revisão teórica e apresentação das adequações do instrumento para definição de objetivos instrucionais, 2010. Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-530X2010000200015>. Acesso em: Dez. 2016.

GAVA, T. B. S.; MENEZES, C. S.; CURY, D. **Aplicações de Mapas Conceituais na Educação como Ferramenta MetaCognitiva**. Departamento de Informática – UFES, Vitória –ES, 2002.

GERONIMO, R. R.; SAITO, F. **O papiro de Rhind: um estudo preliminar.** rev. Prod. Disc. Educ. Matem., São Paulo, v.1, n.1, pp.123-132, 2012.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4.ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GITIRANA, V.; CARVALHO, J.B.P. **A metodologia de ensino e aprendizagem nos livros didáticos de Matemática.** In: PITOMBEIRA, J. B. (coord.) e CARVALHO, F. Coleção Explorando o Ensino. vol. 17. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. pp.31-50.

GOUVEIA, C. A. A.; BROOKE, D. A. L.; MOREIRA, M.; NEVES, L. F.; SALES, L.N.; REZENDE, W. S. **Avaliação Interna de Aprendizagem**: A experiência Brasileira. In: Guia de Estudo. Formação de Profissionais da Educação Pública. Juiz de Fora: CAEd, 2012. pp. 7-19.

G1 – **Educacão** - Enem 2015**,** Prova Amarela, questão 177, 2015. Disponível em: <http://g1.globo.com/educacao/enem/2015/noticia/2015/10/enem-2015-confira-resolucao-das-10-questoes-mais-dificeis-e-polemicas.html>. Acesso em: Dez. 2016.

IEZZE, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e Realidade**: 6° ano. 6.ed. São Paulo; Atual, 2009. p. 236.

INEP. **Característica do SAEB.** Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/saeb>. Acesso em: Jul. 2017.

KANSO, A. M. **Teoria da Aprendizagem Construtivista de Jean Piaget**, 2015. Disponível em: <http://hypescience.com/como-aprendemos-teoria-da-aprendizagem-de-jean-piaget/ >**.** Acesso em: 08 Dez. 2016.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LORENZATO, S. **Assumir a melhor postura**. In: LORENZATO, S. Para aprender matemática. 3. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de Professores). pp.121-129.

LORENZATO, S. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis.** In: LORENZATO, S. (Org.). O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. 2. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2009. (Coleção Formação de Professores). pp. 1-37.

MANDARINO, M. C. F. **Números e Operações**. In: CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes de. (Coord.). Coleção Explorando o Ensino. vol. 17. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. pp. 97-134.

MENDES, I. A. **Tendências Metodológica no Ensino de Matemática.** Coleção Formação Continuada de Professores. vol. 41. Belém, PA: EdFPA, 2008.

MINAYO, M. C de S. **Ciência, Técnica e Arte:** O desafio da Pesquisa Social. In: DESLANDES, Suely Ferreira. Pesquisa Social: teoria, método e criatividade. Petrópolis, RJ: Vozes, 1994.

MOREIRA, M. A. Subsídios Teóricos para o Professor Pesquisador em Ensino de Ciências. **A teoria da aprendizagem significativa**. 1. ed. e 2 ed. ver., 2009-2016. Compilação de trabalhos publicados ou apresentados em congressos. Instituto de Física, UFRGS. Porto Alegre: 2009.

NOVAK J. D. e GOWIN D. B. **Aprender a aprender.** 1.ed., Lisboa: Codex Plátano Edições Técnicas, 1984.

OLIVEIRA, D. R.; PACHECO, S.B. **Informática na educação 2**. vol. 3, Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

PABLOS, J. **A visão Disciplinar no Espaço das Tecnologias da Informação e Comunicação.** In: SANCHO, M. J.; HERNÁNDEZ, F. e Cols. Tecnologias para Transformar a Educação. Porto Alegre: Artmed, 2008. cap. 3. pp. 63-83.

PITOMBEIRA, J. B. História da Matemática para Professores 2 - **Números no Egito Antigo**, 2014. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=Oa7IiFCbqUY>. Acesso em: 17 Jan. 2017.

PIRES, C. M. C. **Números Racionais.** In: PIRES, Célia Maria Carolino. Textos Formativos: Coletânea para formação de professores dos cincos anos iniciais, em Educação Matemática. mód. III. 1. ed. – São Paulo: Zapt Editora, 2010. pp. 50-71.

PONTE, J. P. **Novas tecnologias na aula de Matemática.** Educação e Matemática, n.34, 2-7, abril/Jun., Lisboa, Portugal. 1995.

NETO, E. R. **Didática da Matemática.** São Paulo: Ática S.A, 1987.

RÊGO, R. M.; RÊGO, R.G. **Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino da matemática**. In: LORENZATO, Sergio Apparecido (Org.). O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. 2.ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2009. p. 39-56.

ROQUE, T. História da Matemática – **Uma visão critica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda, 2012.

SADEAM - Sistema de Avaliação do Estado do Amazonas - **Matrizes de Referência**, 2015. Disponível em: <http://www.sadeam.caedufjf.net/matrizes-de-referencia/>. Acesso em: 10 Dez. 2016.

SANCHO, M. J. **De Tecnologias da Informação e Comunicação a Recursos Educativos.** In: SANCHO, M. J.; HERNÁNDEZ, F. e Cols. Tecnologias para Transformar a Educação. Porto Alegre: Artmed, 2008. pp. 1-41.

SANTIAGO, E. **Papiro**. Infoescola Navegando e Aprendendo. Disponível em: < http://www.infoescola.com/curiosidades/papiro/ > Acesso em: Maio 2017.

SIRUGI, F. **Hieróglifo**. Infoescola Navegando e Aprendendo. Disponível em: <http://www.infoescola.com/civilizacao-egipcia/hieroglifos> Acesso em: Maio 2017.

TOIGO, A. M.; MOREIRA, M. A. **Relatos de experiência sobre o uso de mapas conceituais como instrumento de avaliação em três disciplinas do curso de educação física.** Experiências em Ensino de Ciências. vol 3(2), pp. 7-20, 2008.

TOLEDO, M. B. A.; TOLEDO, M. A. **Teoria e prática de matemática**: Como dois e dois. 1. ed. São Paulo: FTD, 2009.

ANEXOS A – Termo de Autorização Institucional

Universidade Federal do Acre
Pró- Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Centro de Ciências Biológicas e da Natureza-CCBN
Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática

TERMO DE AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL

Sr (a) Gestora **Dezembro de 2016**

Eu Elisabeth Machado Bastos, do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática / MPECIM – UFAC, responsável pelo projeto de Conclusão de Curso, venho pelo presente, solicitar vossa autorização para realizar este projeto de pesquisa na Escola SESI com o uso do laboratório de informática para o trabalho de pesquisa intitulado como Mapas Conceituais na investigação do Ensino e Aprendizagem dos Números Racionais, orientado pelo prof. Dr. José Ronaldo Melo.

Procedimentos adotados: Fazer avaliação diagnóstica utilizando como Instrumento - Mapas Conceituais; Aplicar os materiais manipuláveis para o Ensino de Frações; Apresentar o software GeoGebra para possíveis construções geométricas; abordando o ensino de Adição e Subtração de Frações geometricamente.

Participação: Discentes do 6° ano

Riscos e desconfortos: Não haverá riscos e desconfortos para os participantes.

Benefícios: O projeto se faz relevante, pois oportunizará aos discentes situações de aprendizagens inovadoras, além de possibilitar a investigação para possíveis melhorias no ensino e aprendizagem de matemática.

Os dados obtidos nesta pesquisa serão utilizados na publicação de documentos científicos tais como dissertações e artigos, portanto assumo total responsabilidade de não publicar quaisquer dado que comprometa o sigilo da participação dos integrantes de vossa instituição.

ANEXOS B – Autorização Institucional

Universidade Federal do Acre
Pró- Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Centro de Ciências Biológicas e da Natureza-CCBN
Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática

AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL

Eu, Maria Regiana Araújo da Costa responsável pela instituição Centro Educacional Marília Sant'Ana-Escola SESI/AC declaro que fui informado (a) dos objetivos da pesquisa acima, e concordo em autorizar a execução do mesmo nesta instituição. Caso necessário, a qualquer momento como instituição CO-PARTICIPANTE desta pesquisa poderemos revogar esta autorização, se comprovada atividades que causem algum prejuízo á esta instituição ou ainda, a qualquer dado que comprometa o sigilo da participação dos integrantes desta instituição. Declaro que também, não recebemos qualquer pagamento por esta autorização bem como os participantes também não receberam.

Pesquisadora

Maria Regiana Araújo da Costa
Diretora da Escola SESI
Port. SESI-DR/AC Nº 006/2014

Responsável pela instituição

Orientador