UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS E DA NATUREZA – CCBN
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – MPECIM

ELIZABETH SILVA RIBEIRO

POTENCIALIDADES DO *SOFTWARE* GEOGEBRA COMO RECURSO TECNOLÓGICO PARA CONSOLIDAÇÃO DO ENSINO DA FUNÇÃO AFIM

Rio Branco

2019

ELIZABETH SILVA RIBEIRO

POTENCIALIDADES DO *SOFTWARE* GEOGEBRA COMO RECURSO TECNOLÓGICO PARA CONSOLIDAÇÃO DO ENSINO DA FUNÇÃO AFIM

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Acre, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre Profissional em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Itamar Miranda da Silva

Rio Branco

2019

ELIZABETH SILVA RIBEIRO

POTENCIALIDADES DO *SOFTWARE* GEOGEBRA COMO RECURSO TECNOLÓGICO PARA CONSOLIDAÇÃO DO ENSINO DA FUNÇÃO AFIM

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Acre, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre Profissional em Ensino de Ciências e Matemática.

Aprovada em: ____/____/____

Banca Examinadora:

____
Orientador -Presidente - Prof. Dr. Itamar Miranda da Silva - CELA/UFAC

____
Membro interno - Profª. Drª. Aline Andreia Nicolli - CELA/UFAC

____
Membro externo - Prof. Dr. Luiz Márcio Santos Farias – UFBA

____
Prof. Dr. Gilberto Francisco Alves de Melo - Membro Suplente (CAP/UFAC)

Rio Branco

2018

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por ter me dado oportunidades, coragem e força.

À minha mãe Cipriana Silva dos Santos, pelo incentivo e amor sempre demonstrado nos mais diferentes gestos.

Ao meu esposo Wanderson Santiago da Silva, por compreender meu sonho e, principalmente, pela parceria que formamos sempre que precisamos alcançar algum objetivo.

À minha filha Maria Eduarda Ribeiro Santiago que, mesmo sem ter consciência da real importância, sempre me motivou em cada abraço, beijo ou outra forma de carinho. Esta é minha inspiração para tudo que faço.

À minha família cujo incentivo foi fundamental nesta conquista.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Itamar Miranda da Silva, pelas sugestões sempre pertinentes que foram fundamentais para que tivéssemos este trabalho concluído.

Ao coordenador do Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática – MPECIM, da UFAC, professor Dr. Gilberto Francisco Alves de Melo, pelo trabalho que realiza e, também, a todos os professores do Curso, pela dedicação em nos oportunizar conhecimento, em especial à Professora Drª. Aline Andreia Nicolli e ao Professor Luiz Márcio Santos Farias pelas valiosas contribuições para este trabalho.

A todos os colegas de Mestrado, pela troca de experiências e pelos momentos em que confraternizamos nossos desejos e inseguranças, em especial ao G9, cuja união e respeito ao próximo fortaleceu o trabalho de cada um.

Aos alunos do 1º ano do curso de Informática do IFAC, turma de 2018, pela parceria no desenvolvimento das atividades propostas para execução desta pesquisa.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a conclusão deste trabalho.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo analisar de que maneira a utilização do *software* GeoGebra pode contribuir como instrumento de aprendizagem de conceitos relacionados à função afim. Com a intenção de alcançar o supracitado objetivo, buscamos responder à questão: de que modo a utilização do *software* GeoGebra pode potencializar a aprendizagem do objeto matemático, função afim para os alunos de um Curso Técnico em Informática? Para tal, desenvolvemos estudos teóricos correlatos ao tema da pesquisa e buscamos fundamentação teórica na Teoria dos Registros de Representação Semiótica -TRRS de Durval (2009), tendo em vista que essa abordagem permite estabelecer várias relações entre as diferentes representações e registros, enquanto que para os procedimentos metodológicos, como produção de dados e análises, recorreremos à Engenharia Didática de Michèle Artigue (1996). Os sujeitos da pesquisa foram alunos do 1º ano, de um Curso Técnico de Informática Integrado ao Ensino Médio, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Acre – IFAC, Campus Sena Madureira-AC. Elaboramos uma sequência didática envolvendo o uso do *software* GeoGebra na resolução de problemas sobre função afim e seu desenvolvimento ocorreu no laboratório de informática do IFAC. Os resultados apontaram que, por meio dessas resoluções, os alunos se mostraram mais propensos à aprendizagem. Percebeu-se a melhora na interação entre os alunos e entre o objeto matemático estudado, como, também, na autonomia em que eles executaram as tarefas, buscando auxílio, na maioria das vezes, na própria ferramenta tecnológica. Diante desse fato, colocamos à disposição, uma proposta contendo as atividades desenvolvidas acrescidas de atividades complementares que foram elaboradas com base nos resultados obtidos como sendo o produto educacional gerado, a partir do desenvolvimento desta pesquisa,

Palavras-chave: Função Afim. Geogebra. Registros de Representação Semiótica. Engenharia Didática.

ABSTRACT

This research had the objective of analyzing how the use of the GeoGebra software can contribute as an instrument to learn concepts related to the related function. With the intention of reaching the aforementioned objective, we sought to answer the question: how can the use of GeoGebra software enhance the learning of the mathematical object related function for the students of a Technical Course in Computer Science? In order to do this, we developed theoretical studies related to the research theme and sought theoretical basis in the Theory of Registers of Semiotic Representation (TRRS) by Durval (2009), considering that this approach allows to establish several relations between the different representations and registers, whereas the methodological procedures, such as data production and analysis, we will resort to the Didactic Engineering of Michèle Artigue (1996). The subjects of the research were students of the 1st year of a Technical Course of Integrated Computer Science to the High School of the Federal Institute of Education, Science and Technology of Acre - IFAC, Campus Sena Madureira-AC. We developed a didactic sequence involving the use of GeoGebra software in the resolution of problems related to related function and its development occurred in the computer laboratory of IFAC. The results showed that, through these resolutions, students were more prone to learning. It was noticed an improvement in the interaction between the students and the studied mathematical object, as well as in the autonomy in which they performed the tasks, seeking help, most of the time, in the technological tool itself. In view of this fact, we put at the disposal, as the educational product generated from the development of this research, a proposal containing the activities developed and complementary activities that were elaborated based on the results obtained.

Keywords: Related Function. Geogebra. Registers of Semiotic Representation. Didactic Engineering.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A vontade de me dedicar à docência veio quando ainda era criança. Quando brincava com meus amigos de escolinha, sempre queria ser a professora, pois gostava da ideia que havia formado sobre como deveria ser a figura de um professor na sociedade. Considerava esta imagem como sendo soberana e imaculada, por isso, não considerava seguir outra profissão a não ser esta.

Profissão escolhida! Faltava, ainda, a escolha da área de atuação. Como sempre gostei de matemática, não tive dúvidas. Então, quando surgiu a oportunidade de prestar vestibular, eu já sabia a profissão que deveria escolher e sabia, principalmente, em qual área pretendia atuar: licenciatura em matemática.

Fui aprovada e, de 2001 a 2005, cursei e concluí minha licenciatura na Universidade Federal do Acre, tornando-me professora de matemática. Assim que me formei, já consegui o primeiro trabalho como professora de física. Apesar de não ser minha formação, tenho esse emprego como um dos mais importantes que tive, pois me permitiu descobrir na prática como era a vida de um professor e o quão trabalhoso era organizar meu tempo, de forma que pudesse realizar um bom trabalho.

Trabalhei por um ano e meio como professora de física e então fui aprovada em concurso público estadual. Foi quando tornei-me realmente professora de matemática. Por onze anos (2006 – 2016), atuei como professora de matemática do ensino básico e, também nesse período, concluí uma especialização em Psicopedagogia, na Associação Varzeagrandense de Ensino e Cultura.

Durante esse tempo, pude perceber que muitas coisas na educação estavam em constante mudança: o tipo de alunos que temos (cada vez mais ligados à tecnologia), os instrumentos tecnológicos, a forma como se ensina e aprende, a relação professor-aluno, dentre outros.

No início de 2017, ingressei como docente no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Acre, trabalho que estou realizando, enquanto convivo com todas as mudanças citadas.

Toda a experiência que tive como aluna de ensino médio, universitária e docente, induziu-me a acreditar que, por mais que não seja fácil, o professor precisa acompanhar essas mudanças e, além disso, ele deve saber utilizá-las como instrumentos que possam favorecer a aprendizagem de seus alunos. Ainda nesse sentido, vemos que o uso da tecnologia está muito presente no ambiente escolar, no entanto, seu uso não está sendo totalmente voltado para a realização de atividades educacionais.

Acreditamos que cabe ao professor associar o útil ao agradável, tendo em vista que nossos estudantes gostam de tecnologia e que podemos usar isso em favor da educação, permitindo que a utilização de *softwares* na escola se consolide também como instrumento de aprendizagem.

Dessa forma, nesta dissertação pretendemos trabalhar com a exploração do *Software* GeoGebra, na tentativa de analisar de que maneira a utilização desse *software* pode contribuir como instrumento de aprendizagem de conceitos relacionados à função afim.

A escolha do objeto matemático[1], discutido neste trabalho, deve-se ao fato de concordamos com Lima (2012), quando afirma que:

> O conceito de função é um dos mais genéricos e mais unificadores de toda a Matemática contemporânea, fazendo-se presente em efetivamente todos os seus campos, incluindo Álgebra, Geometria, Análise Combinatória, Probabilidade, etc. Diversas noções importantes – desde as mais elementares até as mais sofisticadas – admitem formulações em linguagem de funções, que contribuem para a clareza da exposição e impulsionam o desenvolvimento de ideias. (LIMA, 2012, p. 50).

Assim, o foco de interesse de nossa pesquisa está voltado para o ensino de funções, mais especificamente ao estudo da função afim, visto que, entre os vários tipos de função, esse é o que mais se apresenta como modelo nos livros didáticos e nas práticas pedagógicas para introduzir o conceito de função.

Enquanto a motivação desta pesquisa surgiu a partir da observação de como é desafiador proporcionar um ensino de matemática, mais especificamente sobre funções, de forma significativa aos nossos alunos, o que temos visto são professores que criticam o sistema de ensino, ao passo que os alunos aumentam o desinteresse pela matemática. Nesse sentido, vemos a falta de motivação como um dos maiores entraves da aprendizagem no ambiente escolar. Conforme aponta Sadovsky (2010):

> O trabalho da maioria dos docentes - e não exclusivamente dos que se dedicam a matemática - é, hoje, marcado pelo signo da frustração: os professores têm a

[1] Objeto matemático é qualquer entidade, real ou imaginária, da qual nos referimos ou da qual falamos, na atividade matemática. (FONT et al, 2005).

> sensação de estar forçando os alunos a ir para um lugar que aparentemente não os atraem. (SADOVSKY, 2010, p. 13).

Este sinal de que não estamos conseguindo ensinar nossos alunos como deveríamos, está visivelmente refletido no desempenho que eles têm ao ingressarem no Ensino Médio, e, ainda que tenhamos consciência dos muitos fatores que levam a essa crise nacional, entende-se que um dos agentes causadores desse baixo desempenho apresentado é a falta de elementos motivadores de aprendizagem que, por muitas vezes, é causada por metodologias antigas que não refletem a verdadeira importância e/ou aplicabilidade do que deve ser aprendido. Isso desfavorece o processo de ensino e aprendizagem por trazer um conhecimento repleto de dúvidas e questionamentos que nem sempre são respondidos de forma que o aluno compreenda a relevância do assunto estudado. Nesse sentido, Mota e Scott (2014) fazem a seguinte observação:

> Enfrentando o desafio de considerar o ensino como uma ciência do design, os professores podem ir muito além do que se reduzir a usuários passivos ou produtores amadores de artefatos educacionais mal-acabados. Felizmente, as tecnologias digitais podem representar uma real oportunidade de termos num futuro próximo os professores entendendo a si mesmos, e assim os reconhecendo a sociedade, como designers educacionais. (MOTA e SCOTT, 2014, p. 58).

Pensando em diminuir essas dificuldades existentes em nosso ambiente escolar, esta pesquisa busca apresentar uma proposta de trabalho voltada para o uso das tecnologias como recurso a ser utilizado em favor da aprendizagem de nossos estudantes no ensino da função afim, já que a relação de nossos alunos com a tecnologia está cada vez mais forte e isso pode facilitar a construção do conhecimento e potencializar a compreensão de conceitos estudados nas aulas.

Nesse contexto, foi desenvolvido este trabalho de pesquisa que, a partir do objetivo principal mencionado, visa oferecer alternativas que possibilitem a utilização do S*oftware* GeoGebra por alunos do Ensino Médio, no ensino de Matemática. A proposta é apresentar o *Software* ao público-alvo, enfatizando as funções elementares do programa, pois isso pode instigar a curiosidade dos alunos para que venham a usá-lo em outros estudos como facilitador da aprendizagem a ser desenvolvida, e, pretende-se, também, propor atividades que favoreçam a construção do conhecimento matemático em relação ao conteúdo de função afim com o uso do programa Geogebra.

É fato que nossas escolas devem acompanhar o desenvolvimento tecnológico que cerca nossos alunos, mas é preciso que haja um planejamento maior em relação a como utilizar esses instrumentos em favor dos objetivos predeterminados.

Sobre isso, Mota e Scott (2014) afirmam que:

> As escolas e os professores progressivamente têm que estar preparados para formar estudantes para um mundo cujo futuro imediato é basicamente desconhecido, para empregos e oportunidades que sequer existem ainda. Esses desafios e as missões associadas demandarão uma pedagogia própria e um claro entendimento sobre o que está acontecendo em termo de mudanças efetivas em curso nos ambientes ao redor da educação, o que inclui novas tecnologias, com especial atenção para o papel desempenhado pelas tecnologias digitais. (MOTA e SCOTT, 2014, p. 49).

A partir de todas essas considerações, surge o problema desta pesquisa: de que modo a utilização do *software* GeoGebra pode potencializar a aprendizagem do objeto matemático função afim para os alunos de um Curso Técnico em Informática?

Para responder a essa questão, traçamos como objetivo analisar de que maneira a utilização do *software* Geogebra pode contribuir como instrumento de aprendizagem de conceitos relacionados à função afim, mais especificamente temos:

- ✓ Categorizar atividades que envolvam observação e generalização de padrões;
- ✓ Construir atividades no *software* GeoGebra para enfatizar as diferentes representações de uma mesma função afim, bem como atividades que identifiquem e interpretem uma função afim na sua forma gráfica e algébrica;
- ✓ Utilizar uma sequência de atividades sobre função afim, empregando o *software* GeoGebra como instrumento de aprendizagem;
- ✓ Interpretar à luz da Teoria das Representações Semióticas a produção do estudo desenvolvido.

Também destacamos que em todas as atividades propostas fizemos uma análise matemática, que teve por objetivo identificar quais estratégias os alunos estavam utilizando para resolver o problema, dando evidência aos conhecimentos matemáticos envolvidos e, também, uma análise didática, na qual consideramos a relação das situações propostas com o estudo da função afim, como também a outros objetos matemáticos associados a este conceito; a identificação das variáveis de comando da situação e o estudo da coerência das situações.

Também formulamos algumas hipóteses que são essenciais para o bom desenvolvimento deste trabalho, ou seja, conjecturamos:

- ✓ Que os alunos não tenham grandes dificuldades na compreensão de conceitos básicos da função afim;
- ✓ Que a formação de duplas para a execução do trabalho traga resultados mais satisfatórios;
- ✓ Que a escolha dos sujeitos torne o desenvolvimento desta pesquisa relativamente mais fácil, devido ao fato de serem alunos da pesquisadora;
- ✓ Que a utilização do *software* GeoGebra neste trabalho possa instigar sua utilização em outros momentos de resolução de atividades matemáticas;
- ✓ Que a utilização do *software* pelos alunos ocorra de maneira tranquila, sem grandes dificuldades;

Quanto à organização, este trabalho está disposto em 4 (quatro) capítulos.

No primeiro capítulo trazemos a introdução deste trabalho. Também é nele que fazemos a apresentação de nossos objetivos e dos motivos que nos levaram a desenvolver esta pesquisa.

Já no segundo capítulo, expomos um texto sobre a origem e evolução do conceito de função, por considerarmos importante que se conheça a história do objeto matemático do qual fazemos uso nesta pesquisa. Além de buscarmos informações no passado, também incluímos aqui as recentes tendências sobre como esse ensino está se desenvolvendo no Brasil, com foco no ensino da função afim por ser esse o objeto matemático escolhido para o desenvolvimento desta pesquisa.

O capítulo 3 traz a construção da fundamentação teórica e metodológica da pesquisa. Iniciamos com um texto sobre o *software* GeoGebra, no qual, além de apresentar as funções do programa, também destacamos suas qualidades de uso pedagógico. Em seguida, fazemos uma breve revisão bibliográfica de alguns trabalhos acadêmicos que discorrem sobre a utilização do programa Geogebra na Educação Matemática, tendo em vista que esses trabalhos colaboraram para o enriquecimento das ideias exploradas no desenvolvimento desta pesquisa. Também, neste mesmo capítulo, discorremos sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), descrita por Duval (2009), por ela ser norteadora no desenvolvimento deste trabalho. E, por fim, trazemos a caracterização sobre a engenharia didática, na qual são descritas cada uma das diferentes fases desta metodologia: análises prévias, análises a priori, experimentação e análise a posteriori.

A construção do quarto capítulo se deve à organização da engenharia didática usada no desenvolvimento deste trabalho. Buscamos detalhar como se deu o desenvolvimento de cada atividade realizada nesta pesquisa, seguindo os preceitos da Engenharia Didática e fundamentando os resultados encontrados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Concluímos nosso trabalho apresentando nossas considerações finais, nas quais alinhamos nossas reflexões acerca dos resultados alcançados.

2 O ENSINO DE FUNÇÕES

Este capítulo está dividido em duas partes. Na primeira parte, nosso objetivo é discorrer sobre alguns fatos e/ou ideias que se tornaram relevantes quanto ao Ensino de Funções, de uma forma geral, mostrando como chegamos à definição de função que temos atualmente. Na segunda parte, procuramos focar no ensino da função afim, por se tratar do objeto de estudo desta pesquisa.

Consideramos oportuno trazer a este texto o que pondera Oliveira (2015), acerca de como é fundamental a busca de informações sobre como acontece o processo de desenvolvimento de conceitos matemáticos para a melhoria da prática docente. Ele afirma que:

> O estudo histórico auxilia o professor a observar quais as maiores dificuldades encontradas para, antecipadamente, buscar meios de contorná-las, bem como poderá fazer uso da sua origem para despertar no educando o interesse pelo conhecimento, mostrando, a eles, onde poderá fazer uso deste conteúdo, no caso, funções. (OLIVEIRA, 2015, p. 3).

Ressaltamos, ainda, que, um fator que nos influenciou a pesquisar e escrever sobre a origem e evolução do conceito de função foi a existência da possibilidade do leitor conhecer um pouco da história do objeto matemático explorado nas atividades desenvolvidas neste trabalho. Também vemos como fator positivo, o aporte teórico que o conhecimento relacionado às recentes tendências sobre o Ensino da Função afim trouxe à própria pesquisadora na construção e organização de informações que são necessárias ao desenvolvimento da pesquisa, como, por exemplo, questões relacionadas a: quais são as leis que regulamentam o ensino de funções nas escolas públicas e particulares do Brasil? Para que estudar função afim? Quais dificuldades os alunos encontram nesse estudo? Como os professores vêm desenvolvendo o ensino da função afim nas escolas brasileiras? Os alunos compreendem que as ideias associadas ao significado de função afim podem ser aplicadas no cotidiano? Entre outros questionamentos.

2.1 Origem e evolução do conceito de função

Não se sabe ao certo como surgiu o conceito de função, o que sabemos, é que, entre todos os conceitos matemáticos, este é, sem dúvida, um dos mais importantes. De acordo com Zuffi (2001):

> Não parece existir um consenso entre os diversos autores, a respeito da origem do conceito de função. Alguns deles consideram que os babilônicos (2000 a.C.) já possuíam um “instinto de funcionalidade” [grifos do autor] (...) em seus cálculos

> com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, podendo ser tomadas como "funções tabuladas" [grifos do autor], destinadas a um fim prático. Entre os gregos, as tabelas que faziam a conexão entre a Matemática e a Astronomia mostravam evidências de que estes percebiam a ideia de dependência funcional, através da interpolação linear. (ZUFFI, 2001, p. 02).

Seja de forma intuitiva ou não, o que podemos supor é que a necessidade de resolução de problemas práticos que exigiam a interdependência entre duas grandezas diferentes foi o que iniciou esse processo de construção que definimos hoje como função. Tal definição passou por muitas alterações, conforme cita Dias (2015), "o conceito de função era implicitamente ligado às expressões analíticas e isso só começa a se desvincular a partir de Dirichlet, em 1837, passando ainda por progressivas mudanças até resultar na definição atual proposta por N. Bourbaki – 1939".

Já Oliveira (2015) descreve o surgimento do conceito de função da seguinte forma:

> O conceito de função está presente nos diversos ramos da ciência e originou-se da tentativa de filósofos e cientistas em compreender a realidade e encontrar métodos que permitissem estudar e descrever os fenômenos naturais, estudo que se trata das variações de quantidades em que partes dependem umas das outras, levando muito tempo para ser aperfeiçoado. (OLIVEIRA, 2015, p. 3).

Por essa perspectiva, podemos utilizar esse conhecimento histórico da matemática para nos apoiar como ponto de partida de nossa pesquisa e, até mesmo, do trabalho que desenvolvemos, enquanto professora de matemática, pois, quanto mais entendemos *como* e *porquê* das coisas, mais interessantes elas se tornam.

Nos dias de hoje, a noção de função pode ser apresentada aos alunos de diversas formas, desde uma simples situação de dependência entre duas grandezas a uma questão mais elaborada que envolva conhecimentos interdisciplinares ou funções na forma recursiva, por exemplo. Nos livros didáticos, esse conceito é apresentado como sendo uma sentença de relação entre grandezas, como mostram os exemplos abaixo:

> Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. (IEZZI, 2004, p. 81).
>
> Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$. (DANTE, 2007, p. 59).

Entretanto, para que se chegasse a essa conceituação, a noção de função passou por algumas mudanças construtivas ao longo dos séculos, isso com objetivo de aperfeiçoamento e para dar mais formalidade à definição.

Como forma de destacar este processo de desenvolvimento da definição de função, utilizaremos estudos realizados por Silva (1999, p. 30-31), o qual evidenciou em seu trabalho os pesquisadores de maior influência nesse processo, assim como, a contribuição dada por cada um, em ordem cronológica, até chegarmos à definição que temos hoje.

Jean Bernoulli (1718)	Experimentou várias notações para uma função de *x*, entre as quais a mais próxima da moderna foi *fx*. Ele definiu "(...) função duma grandeza variável a uma quantidade composta de qualquer maneira dessa grandeza variável e de constante".
Euler (1748)	Denotou uma função de x pelo símbolo f(x). Sua definição para função foi "função de uma quantidade variável é qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números e quantidades constantes".
Lagrange (1797)	Também definiu função utilizando a interpretação de relação entre uma ou mais quantidades variáveis "(...) de uma ou várias quantidades, alguma expressão para cálculo na qual estas quantidades entram de alguma maneira envolvida ou não com outras quantidades as quais são consideradas como dadas e com valores invariáveis, enquanto as quantidades da função podem assumir todos os valores possíveis".
Cauchy (1821)	Resgatou a importância do conceito de função para o Cálculo Diferencial e Integral. Sua grande contribuição foi fundamentar os conceitos básicos do Cálculo nos conceitos de função e limite, e transformar todo o cálculo diferencial e integral de variáveis em cálculo diferencial de funções, assim como temos hoje em dia.
J. B. J. Fourier (1822)	Relaciona o conceito de função com o de "somas infinitas". Uma contribuição importante de Fourier para o conceito de função foi que, enquanto Bernoulli pensava somente em funções de uma única expressão analítica, Fourier já pensava em funções dadas por pedaços com várias fórmulas diferentes.
Dirichlet (1837)	Procurou definir função de uma forma mais clara e explícita, dizendo: "Uma função y(x) é dada se temos qualquer regra que associe um valor definido y a cada x em um certo conjunto de pontos".
Stokes (1847)	Libertou o conceito de função do conceito de número. Ao contrário de seus antecessores, procurou pensar em funções que não necessitavam ser expressas por uma combinação de símbolos algébricos.

Boole (1854)	Interpretou o conceito de função como uma transformação: “(...) trocamos x para 1, o resultado será expresso por f(1), e, se na mesma função mudamos x para 0, o resultado será expresso por f(0)”. A ideia é de que a cada elemento x teremos um elemento transformador f(x).
Dedekind (1887)	Utilizou a ideia de “aplicação” para definir o conceito de função: “Por uma aplicação de um sistema S, uma lei entendida de acordo com o qual a cada determinado s de S existe associado a um determinado objeto o qual é chamado imagem de s e é denotado por f(s); dizemos também que o f(s) corresponde ao elemento s, que f(s) é causado ou generalizado pela aplicação f sobre s e que é transformado pela aplicação f para f(s)”.
Hardy (1908)	Explicitou melhor as propriedades básicas do conceito de função. Ele definiu função de uma maneira mais geral, utilizando a ideia de relação entre quantidades variáveis com três características básicas: 1) y é sempre determinado por um valor de x; 2) para cada valor de x, para qual y é dado, corresponde um e somente um valor y; 3) a relação entre x e y é expressa por meio de uma fórmula analítica na qual o valor de y corresponde a um dado valor de x e pode ser calculado por substituição direta de x.
Bourbaki[2] (1939)	Atribuiu um caráter mais geral e formal ao conceito de função. A sua definição foi uma tradução da definição de Hardy para o contexto da teoria dos conjuntos: “Sejam E e F dois conjuntos, os quais podem ou não podem ser distintos. A relação entre o elemento variável x de E e o elemento variável y de F é chamado relação funcional em y, se para todo x pertencente a E existe um único y pertencente a F, o qual é dado pela relação com x.

[2] Nicolas Bourbaki é o pseudônimo coletivo sob o qual um grupo de matemáticos, majoritariamente franceses, escreveram uma série de livros que expunham a matemática avançada moderna, que começaram a ser editados em 1935. Com o objetivo de fundamentar toda a matemática na teoria dos conjuntos, o grupo lutou por mais rigor e simplicidade, criando uma nova terminologia e conceitos ao longo dos tempos. Enquanto que Nicolas Bourbaki é uma personagem inventada, o grupo Bourbaki é oficialmente conhecido como a associação dos colaboradores de Nicolas Bourbaki, que tem um gabinete na *École Normale Supérieure*, em Paris. (WIKIPÉDIA)

Como vimos, apesar do complexo caminho percorrido pelos matemáticos, foram muitas contribuições para que tivéssemos hoje o conceito formulado, na forma como nos é apresentado.

Ponte (1990) expõe a evolução da definição de função ao longo da História da Matemática como sendo uma coisa necessária e que sempre esteve intimamente ligada às pesquisas e às descobertas realizadas no decorrer do tempo. O autor faz a seguinte observação:

> Trata-se de uma evolução que ainda não parou. Da noção de correspondência passou-se à noção de relação [...]. Tal evolução teve como pano de fundo a procura de coerência e generalidade, mas não deixou de estar fortemente associada ao estudo de questões matemáticas significativas e interessantes. (PONTE, 1990, pp. 4-5).

A ligação entre as ideias matemáticas estudadas e a realidade observada é um aspecto de fundamental importância para a compreensão de conceitos. E, embora a definição de função seja de forma generalizada, as funções numéricas possuem propriedades elementares que permitem uma revisão de conhecimentos matemáticos pretéritos, ao mesmo tempo em que explora situações de diversas naturezas.

Ponte (1990) também afirma que foi fator crucial para o desenvolvimento do conceito de função, a convergência de dois fatores fundamentais: uma base matemática adequada e uma forte motivação externa. Ele afirma que:

> A Matemática hoje em dia já não está vinculada de forma tão exclusiva como no passado às ciências físicas. Ela viu desdobrarem-se os seus domínios de aplicação, servindo igualmente de instrumento para o estudo de fenômenos e situações das ciências da vida, das ciências humanas e sociais, da gestão, da comunicação, da engenharia e da tecnologia, constituindo um meio de descrição, explicação, previsão e controle. (PONTE, 1990, p. 08).

No entanto, para seguirmos a mesma perspectiva de evolução e contrução do conceito de função nos dias atuais, não podemos exigir de nossos estudantes essa mesma base matemática e essa mesma motivação. Para isso se faz necessário que saibamos contextualizar esse conceito, mostrando sua relevância e sua relação com as demais ideias matemáticas.

Já para Caraça (1989), os conceitos matemáticos surgem de acordo com o aparecimento de problemas de interesse capital, prático ou teórico, mas reconhece que a criação desses instrumentos próprios de estudo deu-se de forma lenta e delicada, sempre num processo mútuo de ajuda e esclarecimento entre necessidade e instrumento.

> É natural, portanto, esperar que, de coisa tão importante para o entendimento e explicação da Realidade como é a lei quantitativa, surja também o conceito

> matemático próprio para o seu estudo; esperar aqui, ainda, que a necessidade crie o instrumento. Assim acontece de fato. (CARAÇA, 1989, p. 125).

De acordo com Souza e Mariani (2005), foi no início da Idade Moderna que Oresme (1323 – 1382) trouxe a luz do conhecimento as primeiras ideias que remetiam ao conceito de função. Ele descreveu graficamente a dependência entre a velocidade e o tempo usando linhas verticais e horizontais, considerando um corpo movido com aceleração constante. Para a reta horizontal, Oresme fez marcações de pontos que representavam os instantes de tempo (longitudes) e, para cada instante, ele fez marcações em uma reta perpendicular à primeira (latitude) e cujas marcações representavam a velocidade obtida. Com isso, mesmo sem atribuir a definição de função ao esquema formulado, podemos fazer uma equivalência entre os termos latitude e longitude aos representados hoje por ordenada e abscissa.

Para Kline (1972 apud Souza e Mariani, 2005) foi durante os séculos XVI e XVII, ao longo da história do desenvolvimento do estudo dos movimentos, que se originou o conceito de função ou de relação entre variáveis. Ele destaca, ainda, que esse processo foi fundamental para, praticamente, todo o trabalho dos próximos duzentos anos.

Como vemos, o conceito de função, que temos hoje, é fruto de muitas transformações obtidas por meio da investigação incessante da ciência ao longo da história, que tenta apresentar essa relação de forma cada vez mais simples.

E, como dissemos, consideramos importante o conhecimento sobre a origem e evolução do conceito de função, no entanto, também é necessário fazermos um estudo para tentarmos compreender como estamos tratando esse conceito, depois de toda essa evolução, ou seja, o que as escolas brasileiras estão fazendo acerca deste conhecimento? Por isso, nossa análise, agora, estará voltada para a busca de informações sobre quais fatores interferem no processo de ensino e aprendizagem de funções, mais especificamente da função afim.

2.2 Recentes tendências sobre o ensino da função afim

A forma atual de organização do Ensino Brasileiro é dividida em dois segmentos: a Educação Básica e a Educação Superior. A Educação Básica, que será nosso foco, contém, em sua estrutura, a Educação Infantil, a Educação Fundamental e a Educação Média. Concentrar-nos-emos, mais precisamente, entre os anos finais do Ensino Fundamental e início do Ensino Médio, por ser nesse período que são apresentados aos estudantes os conceitos e ideias relativas à função afim.

Nesse sentido, pretendemos analisar dois fatos importantes: como o ensino da função afim é orientado nos documentos oficiais existentes no Brasil e como ele realmente está sendo desenvolvido em nossas escolas.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio tratam do ensino da função afim como sendo um trabalho que deve ser realizado sempre na tentativa de destacar sua aplicabilidade no cotidiano. Elas destacam que:

> O professor deve estar atento ao fato de que os alunos identificam sistematicamente, de forma equivocada, crescimento com proporcionalidade direta e decrescimento com proporcionalidade inversa, e aqui é interessante trazer situações do quotidiano para ilustrar diferentes tipos de crescimento/decrescimento de grandezas em relação. Situações em que se faz necessária a função afim ($f(x) = a.x + b$) também devem ser trabalhadas. (BRASIL, 2006, pp. 72-73)

Também chamam a atenção para a importância do processo de conversão entre diferentes tipos de registros, evidenciando que essa ação pode facilitar a compreensão do aluno até mesmo em relação a outras áreas do conhecimento:

> É conveniente solicitar aos alunos que expressem em palavras uma função dada de forma algébrica, por exemplo, $f(x) = 2x + 3$, como a função que associa a um dado valor real o seu dobro, acrescido de três unidades; isso pode facilitar a identificação, por parte do aluno, da idéia de função em outras situações, como, por exemplo, no estudo da cinemática, em Física. (BRASIL, 2006, p. 72).

Esse mesmo documento ainda faz referência a como deve ser proporcionada ao aluno a construção de gráficos de funções, alertando para o fato de que atividades que exijam tão somente a produção gráfica, a partir da reprodução de dados fornecidos em tabelas não correspondem, necessariamente, à aprendizagem. Isso se verifica em:

> Sempre que possível, os gráficos das funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis. A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções. (BRASIL, 2006, p. 72).

Por outro lado, temos um novo documento, que é a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, o qual também traz algumas contribuições para o ensino da matemática no Brasil, de forma geral. Esse documento foi elaborado à luz do que dizem os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs e as Diretrizes Curriculares Nacionais – DCNs, no entanto, a BNCC é mais específica, pois determina com maior clareza os objetivos de aprendizagem de cada ano escolar. Ela será obrigatória em todos os currículos de todas as redes do país, públicas e particulares, e a previsão é de que as mudanças sugeridas por esse documento estejam em vigor no início do ano letivo de 2020.

Em relação à matemática, a BNCC expõe competências específicas para essa área, as quais devem ser garantidas aos alunos, desde o início do Ensino Fundamental, entre elas destacamos:

> Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). (BRASIL, 2018, p. 267).

Mais adiante, esse mesmo documento orienta sobre o trabalho com a álgebra desde o Ensino Fundamental. Sobre isso, temos:

> A noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três), como: "Se com duas medidas de suco concentrado eu obtenho três litros de refresco, quantas medidas desse suco concentrado eu preciso para ter doze litros de refresco?" [...] É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos. (BRASIL, 2018, p. 270-271).

É a partir do 8º ano que as orientações, focadas nas habilidades matemáticas que os alunos devem desenvolver, mencionam o objeto matemático função afim. Trata-se da habilidade de *"(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano"* (BRASIL, 2018, p. 313). Enquanto que no 1º ano, encontramos outras habilidades relativas à função afim, igualmente importantes e que também são exigidas aos alunos, as quais destacamos a seguir:

> (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. [...] (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. [...] (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (BRASIL, 2018, p. 536-543).

Portanto, quando analisamos os documentos oficiais que orientam o ensino de matemática no Brasil, percebemos que existe uma preocupação em relação ao que os alunos estão aprendendo e a como estão aprendendo. Também observamos que isso se verifica em documentos diferentes, pois, entendemos que a BNCC não determina *como* ensinar, mas *o que* ensinar, enquanto que as Orientações Curriculares dão sugestões sobre o *como* ensinar.

No que se refere ao estudo da função afim, há uma demonstração de atenção para a exploração de aspectos importantes desse objeto matemático em ambos os documentos, como: sua natureza algébrica; as diferentes maneiras de representação de uma mesma função; aplicações contextualizadas; articulação com outras áreas do conhecimento, dentro e fora da matemática; entre outros.

Para darmos continuidade ao nosso estudo sobre o ensino da função afim nas escolas brasileiras, além de buscarmos informações nos documentos que regulamentam esse ensino no Brasil, é necessário que registremos, também, algumas observações do que encontramos como resposta à pergunta: como o ensino da função afim está sendo desenvolvido em nossas escolas? Pois consideramos pertinente conferir se o que é recomendado nos documentos oficiais realmente se verifica na prática.

Dessa forma, percebemos que o desenvolvimento desse ensino segue na contramão do que recomendam os documentos orientadores da educação, a começar pelos livros didáticos, pois, para garantir que seus conteúdos contemplem o que sugere a BNCC, por exemplo, deve haver uma grande revisão na forma como estes materiais se apresentam. Essa seria uma importante etapa para que a BNCC chegasse, de fato, às salas de aula.

Encontramos em Menna Barreto (2007), afirmações que reforçam a ideia de que é preciso haver maior preocupação quanto à forma como o ensino de funções se organiza nos livros didáticos do Ensino Médio brasileiro, tendo em vista a grande influência que este material exerce sobre a prática docente:

> (...) O estudo deste tópico no currículo médio brasileiro segue uma ordenação ainda tradicional e ditada, na maioria das vezes, pela sequência sugerida pelos livros didáticos. Os temas geralmente são tratados de forma independente e sem conexão alguma entre eles. (MENNA BARRETO, 2007, p. 87).

Os professores de matemática que trabalham com o 9º ano do Ensino Fundamental têm a missão de iniciar esse conhecimento com seus alunos e esse trabalho é, na maioria das vezes, desenvolvido de forma isolada das outras áreas de conhecimento e sem despertar o interesse deles para a compreensão de aplicações da função afim em situações do cotidiano.

Sobre isso, Faria e Ávila (1998) afirmam que:

> Os alunos não compreendem o que estão fazendo e preferem decorar as regras de estudo de sinais. Não fazem nenhuma relação entre as funções e as equações, mesmo que seja falado várias vezes. Apenas os “bons” [grifos do autor] alunos são capazes de fazer algumas relações. No estudo de sinal, quando não encontram as raízes da

> equação, logo afirmam que aquela função não tem representação gráfica. (FARIA e ÁVILA, 1998, p. 3).

Ainda a respeito do modo formal como o ensino de função é apresentado a nossos estudantes, Chaves e Carvalho (2004) demonstram suas preocupações ao afirmarem que a introdução de diversos conceitos referentes a esse tema é feita sem mostrar a devida relação com sua utilização, e, portanto, deixam de revelar sua real importância. Com isso, o invés de produzirmos um trabalho de estímulo para com nossos alunos, o resultado que temos é o efeito contrário, ou seja, acabam se desinteressando pela matemática ao passo que ela se torna abstrata e sem utilidade prática.

Outro fator que pode contribuir para práticas didáticas insuficientes é que a BNCC não traz essas informações nem indica procedimentos específicos a serem adotados pelas escolas nas salas de aula, ou seja, a equipe pedagógica de cada rede e unidade escolar é quem decidirá quais métodos devem ser utilizados para cada aprendizagem pretendida.

De forma clara, Ávila (1985 apud Schimieguel, 2007) expõe suas considerações sobre como deve ser iniciado o estudo de funções. Ele acredita que, para que os alunos tenham uma compreensão significativa sobre a ideia de função, não seria interessante recorrer para produto cartesiano de conjuntos, muito menos para a noção de relação, como costuma ser proposto; isso nada tem de motivador. Ainda segundo o autor, é muito mais natural e mais fácil dizer "2 e 5 são as raízes da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$" do que "o conjunto verdade da sentença $x^2 - 7x + 10 = 0$ é $V = \{2; 5\}$".

Se não bastassem os vários fatores citados que, de uma forma ou de outra, dificultam o processo de ensino e aprendizagem em nossas escolas, a qualidade do Ensino de Matemática ainda esbarra na extensa quantidade de conteúdos distribuídos nos currículos ao longo das séries/anos. E o professor, como sendo a pessoa que conduz esse trabalho, se vê diante de duas opções: escolher apenas alguns desses conteúdos e realizar um trabalho que procure garantir a aprendizagem dos alunos ou então trabalhar de forma superficial com todos os conteúdos exigidos na grade curricular e, assim, assegurar que os alunos, mesmo que minimamente, sejam sabedores desses conhecimentos. Nesse sentido, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio destacam que:

> É preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados. A escolha de conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno um "fazer matemático" [grifos do autor] por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento. (BRASIL, 2006, p. 70)

Quanto à articulação com outros conteúdos matemáticos, Menna Barreto (2007) coloca sua preocupação quanto à importância do professor de matemática estabelecer conexões entre o conteúdo de funções e o de progressões (aritmética e geométrica), em virtude de serem estudos que servem ao mesmo propósito de alguns tipos de funções, mas que dificilmente são associados, apesar de existir orientação em documentos oficiais para que o ensino das sequências seja articulado ao ensino das funções e que se priorize a compreensão das ideias que estão por trás da definição das sequências. Sobre isso, nas Orientações Curriculares é afirmado que:

> O ensino desta unidade deve se ater à lei de formação dessas sequências, para mostrar aos alunos quais propriedades decorrem delas. Associar às sequências seus gráficos e relacionar os conceitos de sequência crescente ou decrescente aos correspondentes gráficos permite ao aluno compreender melhor as ideias envolvidas, ao mesmo tempo que dá a ele a possibilidade de acompanhar o comportamento de uma sequência sem precisar decorar informações (BRASIL, 2006, p.121).

Já Ponte (1990), Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995) e Demana e Leitzel (1995) sugerem que o estudo das funções deve ser iniciado a partir de representações numéricas, gráficas e contextualizadas, por serem meios mais intuitivos e por possuírem um apelo visual melhor. Para eles, os métodos algébricos e os aspectos de formalização devem ser reservados para um segundo momento.

Ainda nesse sentido, Ponte (1990) coloca que:

> Para que o aluno seja capaz de construir tabelas, calcular valores numéricos, desenvolver um sentido quantitativo e adquirir sensibilidade para o que são aproximações aceitáveis e inaceitáveis, ele deve ter a oportunidade de trabalhar com números, sempre que possível, provenientes de contextos da vida real. Assim poderão compreender melhor o significado das funções em relação a casos concretos. [...] a grande ênfase dada à terminologia abstrata, às técnicas e algoritmos, frequente nos programas curriculares de todo mundo, não se constitui numa ferramenta prática para lidar com situações interessantes, interiores ou exteriores à Matemática, constituindo-se meramente em um vocabulário que se memoriza sem se compreender e valorizar. (PONTE, 1990, p. 08).

A questão de mostrar ao aluno a “utilidade” do que está estudando pode transformar, e muito, sua aprendizagem, tendo em vista que, um grande problema que temos hoje em nossas escolas é a falta de compreensão para com o objeto matemático estudado, a ponto de não conseguirem perceber quais procedimentos devem ser utilizados para resolver uma situação-problema. Essa dificuldade é encontrada pelos alunos também no estudo de função afim, seja quando são solicitados a fazerem conversões entre as diferentes formas de representação (linguagem natural, tabela, gráfico ou qualquer outro tipo de registro), seja quando tenham que executar alguma transformação dentro do próprio registro. Poderíamos ter mais sucesso nesse ensino se a contextualização e a inter-relação com outras áreas e outras ideias matemáticas fossem garantidas, em vez de desenvolvermos esse estudo de forma isolada de um contexto, dando margem ao esquecimento.

A função afim também tem um papel muito importante na compreensão de fenômenos discutidos fora da aula de matemática, como, por exemplo, quando o professor de física relaciona a posição (S) de um móvel em movimento uniforme (movimento com velocidade constante) com o tempo (t). Quando pagamos pelo envio de uma correspondência, este preço é dado em função de seu peso, isto é, o valor do selo a ser colocado na correspondência depende do peso do pacote, ou quando abastecemos o carro no posto de combustíveis, o preço que pagamos depende da quantidade de litros de combustível colocada no tanque ou até mesmo quando o aluno vai à padaria e calcula o valor que irá pagar, dependendo da quantidade de pão que comprar. Todas essas questões precisam ser bem claras para os alunos para que eles percebam que a ideia de função afim é comum a vários ramos da matemática e que o estudo desse objeto matemático é fundamental para a compreensão do mundo em transformação no qual vivemos.

Entendemos que o ensino da função afim deve ser desenvolvido, desde seu início, de forma a promover a articulação das diferentes formas de representações existentes. E, percebemos também que vários fatores interferem de forma direta no processo de ensino e aprendizagem desse objeto matemático. Dessa forma, se verifica a necessidade da observação de alguns aspectos importantes no momento do planejamento didático e, principalmente, na execução da proposta pedagógica.

Nesse sentido, com o objetivo de fundamentar nossa pesquisa e de dar forma a nossa proposta de trabalho, na sequência, dissertaremos sobre alguns tópicos que acreditamos ser importantes para a conclusão deste trabalho.

3 CONSTRUÇÃO DA FUNDAMENTAÇÃO DA PESQUISA

3.1 Sobre o *Software* GeoGebra

No caso do ensino da matemática, existem vários programas de matemática dinâmica que combinam conceitos de geometria e álgebra em um único ambiente visual, entre eles, destacamos o GeoGebra por conta de suas qualidades de uso pedagógico, como: fácil manuseio, manual disponível em português, disponibilização de um fórum para que os utilizadores coloquem sugestões de atividades e possui um tutorial na opção "Ajuda" muito útil e explicativo.

Esse *software* possui algumas versões que apresentam características diferentes, no desenvolvimento de nossa pesquisa iremos utilizar o GeoGebra Classic 5[3]. Assim como as outras variantes desse *software*, o GeoGebra Classic 5 dispõe de linguagem de programação Java, o que permite seu funcionamento em diferentes plataformas (Linux, Windows e Macintosh) o e que também facilita seu uso. O uso de suas ferramentas de manipulação de elementos geométricos é simples, favorecendo sua prática por alunos, ainda que não estejam habituados ao trabalho em ambiente de geometria dinâmica. Além disso, outros pontos positivos na utilização desse *software* em escolas públicas é que sua distribuição é gratuita e, após ser feito o *download*, não é necessário conexão de internet para uso do programa.

Esses, entre outros motivos, foram cruciais na escolha desse *software* como sendo um instrumento capaz de ser utilizado no desenvolvimento desta pesquisa.

O Geogebra foi criado por Markus Hohenwarter, que iniciou o projeto em 2001 na Universityof Salzburg. Seu desenvolvimento teve como objetivo melhorar o ensino e aprendizagem dos alunos, tanto de nível básico como no nível superior. Esse programa já é conhecido e utilizado por professores e alunos em várias partes do mundo e, por conta dessa expansão mundial, foram criados Institutos Internacionais de GeoGebra (IGI) em todos os continentes. Trata-se de organizações, sem fins lucrativos, que desenvolvem seus trabalhos em conjunto com os demais Institutos, com o objetivo de impulsionar o ensino e a aprendizagem de Matemática. De acordo com o Instituto Geogebra de São Paulo,

[3]Esta é uma versão mais “simples” do GeoGebra, no entanto, não deixa de ser completa. Esta versão foi criada para ser executada em notebooks ou PCs e possui basicamente a mesma configuração das demais. É muito elogiada por seus usuários pela rapidez com que processa os dados e pela forma como suas ferramentas são apresentadas.

> [...] Atualmente, o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais de 300.000 *downloads* mensais, 62 Institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte para o seu uso. Além disso, recebeu diversos prêmios de *software* educacional na Europa e nos EUA, e foi instalado em milhões de *laptops* em vários países ao redor do mundo. (PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO, 2017).

Além de tornar a aula de matemática mais ágil e de certa forma "independente", pois o aluno dispõe de diversos caminhos para resolver um mesmo problema, o Geogebra também serve como instrumento de verificação, já que podemos conferir se o que foi feito está realmente correto.

Também como forma de substanciar esta pesquisa, a seguir, apresentaremos uma breve revisão da literatura sobre como esse *software* vem sendo utilizado como instrumento de consolidação da aprendizagem nos diversos campos da matemática, inclusive com o objeto matemático que é nosso foco de investigação.

3.2 Revisão da literatura sobre a utilização do programa GeoGebra como recurso tecnológico para consolidação da aprendizagem matemática

É pacífico o entendimento de que, antes da realização de uma pesquisa sobre um determinado tema, exista uma busca por trabalhos que tenham relação com o pretendido. Dessa forma, encontramos na literatura acadêmica diversas dissertações que têm como foco a exploração do *Software* GeoGebra como recurso tecnológico facilitador do ensino da matemática e consideramos pertinente trazermos algumas das análises feitas para observação e verificação dos resultados alcançados por outros pesquisadores, tendo em vista esses resultados reforçarem o desenvolvimento de metodologias e estratégias utilizadas por nós. Nessa perspectiva, segundo Boccato (2006):

> A pesquisa bibliográfica busca a resolução de um problema (hipótese) por meio de referenciais teóricos publicados, analisando e discutindo as várias contribuições científicas. Esse tipo de pesquisa trará subsídios para o conhecimento sobre o que foi pesquisado, como e sob que enfoque e/ou perspectivas foi tratado o assunto apresentado na literatura científica. Para tanto, é de suma importância que o pesquisador realize um planejamento sistemático do processo de pesquisa, compreendendo desde a definição temática, passando pela construção lógica do trabalho até a decisão da sua forma de comunicação e divulgação. (BOCCATO, 2006, p. 266).

Nesse sentido, dentre todos os trabalhos lidos e analisados, selecionamos apenas alguns daqueles que consideramos apresentar maior relevância para a discussão que pretendemos realizar e que efetivamente serviram de base para o desenvolvimento desta pesquisa.

Silva (2017), em sua pesquisa, teve como objetivo apresentar uma proposta pedagógica que utilizou o *software* GeoGebra como sendo um recurso computacional que pudesse auxiliar os alunos no processo de ensino e aprendizagem no estudo de geometria plana. A pesquisa seguiu, fundamentada na teoria de Van Hiele e, em sua metodologia, foram desenvolvidas atividades junto a um grupo de 79 alunos da rede pública do município de Messias/AL e 23 alunos da rede privada do município de Maceió/AL, todos do 8º ano do ensino fundamental. A avaliação do trabalho partiu de relatos e análises das atividades desenvolvidas pelos alunos em duas etapas: a primeira atividade foi realizada na sala de aula sem o conhecimento e utilização do *software*, já a segunda atividade, foi feita após os alunos interagirem sobre o conteúdo de geometria plana por meio do *software*, para que se pudesse verificar o desempenho deles nas atividades aplicadas no final de cada etapa com o intuito de conferir se houve algum avanço ou melhoria no aprendizado.

Na fase de análise dos dados encontrados, o autor diz que o uso desse recurso tecnológico na sala de aula se mostrou enriquecedor para o processo de ensino e aprendizagem entre professores e alunos, pois, por meio da dinamização, o *software* prende a atenção dos alunos fazendo-os participar mais da construção do conhecimento e o pesquisador finaliza afirmando que o principal resultado de suas observações foi que o trabalho com o *software* educativo promoveu grande rendimento e evolução por parte dos alunos no estudo dos triângulos e quadriláteros.

A decisão de incluir a análise desse trabalho ao texto de nossa pesquisa se deve ao fato de que sua leitura nos proporcionou algumas contribuições significativas para nossa investigação, como: conhecimento sobre a Teoria de Van Hiele; apropriação de novos conhecimentos sobre a utilização do *software* Geogebra; diferentes percepções de como os alunos reconhecem a importância do trabalho com a tecnologia dentro da sala de aula e, também, a importante discussão sobre as dificuldades de se trabalhar utilizando os laboratórios de informática das escolas públicas. Além dessa aproximação de algumas ideias, nossa pesquisa tem alguns pontos divergentes com esse trabalho, como, por exemplo, ter sido desenvolvida com alunos do Ensino Médio e não com o 8º ano do Ensino Fundamental e ter o objeto matemático explorado com o *software* GeoGebra como sendo a função afim e não a geometria,

Também encontramos na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP, o trabalho de Santos (2011), que o objetivou com a elaboração, aplicação e análise de uma sequência didática que envolveu o tema função logarítmica utilizando o *Software* GeoGebra como uma estratégia pedagógica. Sua pesquisa fundamentou-se teoricamente nas teorias dos Registros de Representação e Semiótica, descrita por Duval (2009), e nos Processos do Pensamento Matemático Avançado, segundo Dreyfus (1991), já como referencial metodológico, utilizou os pressupostos da Engenharia Didática, de Michèle Artigue (1996). Dessa forma, a metodologia da pesquisa consistiu de quatro fases, a fase preliminar foi a de realização de levantamento da literatura dos documentos oficiais, seguida de sondagem dos conhecimentos prévios dos alunos que dela participaram. Como análise a priori, foi feito o estudo das possíveis estratégias de solução as quais os alunos poderiam utilizar, bem como das dificuldades que poderiam aparecer. Por fim, a autora realizou a fase de aplicação e confrontamento dos resultados das análises a posteriori com a análise a priori.

Na análise dos resultados, a pesquisadora mostra ter percebido que o uso do *Software* GeoGebra, como uma estratégia didático-pedagógica, contribuiu para a aprendizagem dos alunos. Todas as duplas destacaram a importância da visualização do gráfico da função no software, além da possibilidade de testar outras funções de modo dinâmico e rápido.

De modo geral, podemos dizer que as principais dificuldades apresentadas pelos alunos no desenvolvimento do trabalho, foram o tratamento numérico e algébrico das equações exponenciais e logarítmicas, principalmente no momento em que foram solicitados a completar as tabelas, tendo em vista serem necessários conhecimentos prévios sobre as propriedades das potências.

Essa pesquisa também contribuiu de forma significativa para o nosso trabalho, pois nos apresentou a Teoria dos Registros de Representação e Semiótica e nos fez perceber que sua utilização se harmonizava perfeitamente aos nossos objetivos de pesquisa, além disso, também nos proporcionou melhor visão de como deveríamos organizar a sequência didática que pretendíamos desenvolver.

Por fim, a autora faz uma reflexão da prática realizada, argumentando que, a partir da pesquisa, foi possível perceber o quanto é trabalhoso elaborar uma sequência didática e planejar estratégias de ensino com objetivos previamente estabelecidos. Ela também ressalta que o uso apenas de materiais pedagógicos e livros didáticos nos quais os exercícios estão prontos não é suficiente para contribuir para a aprendizagem. É necessário que o professor escolha situações-problema que possibilitem aos alunos a oportunidade para investigar, elaborar e testar hipóteses, conjecturar e, assim, tornar possível a generalização e abstração de um conceito matemático.

Já Reis (2011), desenvolveu sua dissertação com o objetivo de aplicar uma sequência didática diagnóstica, para registrar e analisar os erros cometidos pelos alunos no conceito de função afim e, em seguida, propor uma sequência didática com o uso do *software* GeoGebra, planejada e estruturada a partir da análise desses erros, de forma a verificar possíveis avanços na aprendizagem. Para isso, ele formou um grupo de 20 (vinte) adolescentes, com uma média de 16 anos de idade, cuja única ocupação era a de estudar. A maioria morava no mesmo bairro e eram alunos oriundos de 3 (três) escolas estaduais diferentes, localizadas na cidade de São José dos Campos/SP, mesmo local de desenvolvimento da pesquisa.

O autor utilizou como referencial teórico para o desenvolvimento de seu trabalho, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, enquanto que a coleta e análise dos dados basearam-se nos procedimentos metodológicos da Engenharia Didática, de Michèle Artigue.

Quanto à metodologia, o trabalho foi estruturado em duas fases: a primeira fase, desenvolvida à luz da Engenharia Didática, foi a de investigação das dificuldades de aprendizagem, onde houve a fundamentação da pesquisa e a elaboração, aplicação e análise a posteriori de uma sequência didática diagnóstica. Os resultados alcançados permitiram ao pesquisador inferir e propor uma sequência didática com o uso do *software* GeoGebra, na intenção de possibilitar um avanço na aprendizagem do conceito de função afim.

Ao término da aplicação da sequência didática diagnóstica, foi realizada a análise a posteriori dos resultados, a partir da observação de como os alunos responderam cada uma das questões as quais foram submetidos. Os resultados foram organizados em 4 (quatro) categorias: *acertos parciais* – resoluções que apresentavam algum procedimento/resultado equivocado; *acertos totais* – resoluções totalmente corretas; *em branco* – não apresentou qualquer resolução em todas as questões; *erros* – todos os registros de forma equivocada. Essas categorias orientaram a elaboração das atividades com o uso do GeoGebra, instrumento proposto na segunda fase.

Já na segunda fase, foram criadas atividades voltadas para o desenvolvimento do raciocínio matemático para que possibilitassem a construção do conhecimento e não apenas a memorização e reprodução de técnicas de resolução em torno do conceito da função afim.

Ao final do trabalho, o pesquisador sugere que a aplicação da sequência didática produzida com o uso do *software* GeoGebra pode ser realizada, com objetivo de verificação de possíveis avanços na aprendizagem da função afim, pois, o autor considera que os erros cometidos pelos alunos em sua pesquisa não são locais. Ainda assim, ele afirma que possíveis correções ou adaptações nas atividades podem ser feitas a depender do público de alunos que tivermos.

Essa abordagem se aproxima muito do que estamos propondo em nosso trabalho, no entanto, nosso objetivo está voltado para a verificação de como o *software* GeoGebra interfere no processo de ensino e de aprendizagem da função afim.

Procópio (2011), no desenvolvimento de sua investigação, teve como objetivo, analisar as atividades de Geometria do 4º bimestre da primeira série, do Ensino Médio do Caderno do Professor de Matemática, publicado pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (2009).

O autor cita, como referencial teórico, as considerações de Kenski (2003, 2007) que destaca o novo ritmo que a tecnologia imprime à educação, além de Borba e Penteado (2007) os quais ressaltam a informática educativa na matemática. Sendo que, a análise deste trabalho proporcionou-me aportes teóricos sobre o uso das tecnologias em favor da aprendizagem, principalmente, em relação à utilização do Programa Geogebra, pois a principal questão deste trabalho foi responder à pergunta: de que maneira é possível criar uma abordagem dinâmica, com o *software* Geogebra para o conteúdo de Geometria Plana do Ensino Médio, com base no Currículo do Estado de São Paulo? Embora o objeto matemático explorado seja outro, consideramos importante conhecer as várias possibilidades de aproveitamento desse *software*.

A metodologia da pesquisa seguiu, inicialmente, com uma pré-análise do conteúdo, na qual foram escolhidos os documentos a serem analisados, então, deu-se início à exploração do material, que consistiu essencialmente da análise do corpus, no tratamento dos resultados, inferências e interpretações.

Na análise e discussão dos dados, o autor esclarece que os temas no Caderno do Professor de Matemática encontram-se de uma maneira especialmente significativa do ponto de vista de seu valor formativo e que propicia uma articulação entre os diversos temas, de modo que se auxiliam mutuamente, ao mesmo tempo que propiciam interfaces amigáveis com as outras disciplinas. Ele também traz, ao final da pesquisa, como principal resultado, a observação de que é possível articular as situações de aprendizagem com o uso do *software* GeoGebra de forma simples e significativa.

Por fim, temos Fialho (2010) que utiliza o *software* GeoGebra com o objetivo de investigar a viabilidade da utilização de um programa de Geometria Dinâmica para ensinar Geometria Analítica. O autor procura respostas para as questões: pode um *software* auxiliar no processo de ensino-aprendizagem? O *software* altera esse processo? Em caso afirmativo, ele faz com que os alunos aprendam mais e melhor, ou não? Não é citado nenhum referencial teórico, o pesquisador apenas coloca que os roteiros produzidos tiveram base no Projeto Político-Pedagógico (PPP) da escola.

No desenvolvimento desse trabalho, houve a aplicação de 11 Roteiros de Aprendizagem num laboratório de informática para duas turmas do terceiro ano do ensino médio de um colégio público da cidade de São João do Meriti/RJ. Foi solicitado aos alunos que salvassem os arquivos produzidos em cada atividade de forma a permitir a análise dos resultados pelo autor da pesquisa.

Como análise dos resultados é mencionado que os dados obtidos junto aos estudantes na aplicação permitem afirmar que usar *software* faz diferença nesse caso, afirmando que, como o ser humano é incapaz de inventar tempo, o que pode fazer a diferença na aprendizagem dos alunos é aprimorar a qualidade do ensino no tempo em que os estudantes ficam dentro da escola, ou seja, fazer com que haja melhor rendimento naquele tempo determinado para os estudos em sala de aula. De acordo com esse objetivo, o autor acredita que o uso planejado de recursos de informática para ensinar pode produzir os resultados esperados. De fato, os estudantes aprenderam usando o programa. Estudantes com sérias dificuldades de abstração na aula tradicional, com figuras estáticas no quadro-negro, obtiveram bons resultados e produziram arquivos que comprovam o aprendizado.

A leitura desse trabalho proporcionou-me diferentes percepções de como os alunos reconhecem a importância do trabalho com a tecnologia na sala de aula e isso, certamente, contribuiu para o desenvolvimento desta pesquisa.

Todas essas leituras trouxeram, de alguma forma, contribuições para nossa pesquisa. Pudemos conhecer outras teorias, nos apropriar de novos conhecimentos sobre a utilização do *software* GeoGebra e analisar diferentes percepções de como os alunos reconhecem a importância do trabalho com a tecnologia na sala de aula.

Ainda com o intuito de contribuir para a construção deste trabalho, a seguir, iremos dissertar sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, cuja utilização foi fundamental no desenvolvimento de várias das pesquisas analisadas anteriormente e acreditamos ter sido também na nossa, tendo em vista sua importância na área da Educação Matemática. Em nosso caso, a consideramos útil à nossa pesquisa por nos fornecer um referencial estruturado de análise do funcionamento cognitivo do aprendiz, quando submetido a situações de ensino envolvendo o objeto matemático pesquisado.

3.3 A Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Desenvolvida por Raymond Duval[4], a Teoria dos Registros de Representação Semiótica analisa a influência das representações dos objetos matemáticos no processo de ensino e de aprendizagem em matemática.

De acordo com Gitirana (2013), as representações influenciam na maneira como as pessoas entendem e aprendem a matemática. Ela destaca os estudos desenvolvidos por Duval (1993) cujo posicionamento sobre objeto matemático versus representação é de que em todo trabalho que envolve conhecimento matemático, necessariamente se faz presente algum tipo de representação que, muitas vezes, traz consigo características que são da própria representação e não do objeto matemático e que isso pode vir a causar um obstáculo epistemológico[5]. Afirma, ainda, que a separação entre essas características e a essência do que deve realmente ser aprendido só ocorrerá mediante apresentação de outras formas de representação para aquele mesmo conceito.

Duval (1993) ainda argumenta que a distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática e que o mais importante é o objeto e não as diversas formas de representações semióticas que nos são apresentadas.

Sobre a definição de "registro", Duval (1999 apud Almouloud, 2007, p. 71) coloca que um *registro* de representação é um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais no funcionamento cognitivo consciente. Nessa perspectiva, o registro se torna diferente de um código, pois este apresenta alguns limites em suas funções cognitivas, já que

---

[4]**Raymond Duval** é filósofo, psicólogo de formação e professor emérito da Université du Littoral Côte d'Opale em Dunquerque, França. Duval investiga a aprendizagem matemática e o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão do conhecimento matemático.

[5]De acordo com Gaston Bachelard (1996), a assimilação de noções inadequadas, sejam elas advindas dos conhecimentos empíricos que o educando vivencia em seu cotidiano ou adquiridas na escola, poderá resultar na constituição de entraves à aprendizagem que dificultam a construção do espírito científico, denominados **obstáculos epistemológicos**.

uma de suas características é a de não determinar ou representar diretamente um objeto matemático, enquanto que o registro apresenta uma relação mais estreita com o objeto. Silva e Figueiredo (2003) complementam que:

> Um registro de representação semiótica é um sistema de signos que tem por objetivo não somente a comunicação, mas também o tratamento da informação e a objetivação. Nem todo sistema de signos constitui um registro. Por exemplo, as placas de trânsito das estradas são significantes (triângulo→ perigo, vermelho → proibição,...) e não podem se caracterizar como um registro no sentido de Duval, uma vez que não há a possibilidade de transformar um elemento em outro, diferentemente do que ocorre com todo elemento de um registro [...] (SILVA e FIGUEIREDO, 2003, p.8)

Duval (2004) defende que um sistema de signos só poderá ser considerado um registro de representação se ele permitir as três atividades cognitivas: 1) a formação de uma representação identificável, que pode ser um registro numérico, um gráfico, uma tabela, entre outros; 2) o tratamento, que é a transformação de uma representação dentro do mesmo registro onde ela foi originada e 3) a conversão, que consiste na transformação de um registro de representação para outro.

Sobre tratamento e conversão, encontramos em Duval (2009) a seguinte definição:

> Um tratamento é a transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza então apenas um registro de representação. A conversão é, ao contrário, uma transformação que faz passar de um registro a outro. Ela requer então a coordenação dos registros no sujeito que a efetua. (DUVAL, 2009, p. 39).

Almouloud (2007) também discute sobre a importância de nós, professores, termos a noção do que é um registro de representação semiótica, tendo em vista todas as vantagens que as mudanças de registro trazem para a compreensão da matemática.

Dessa forma, as várias representações semióticas de um mesmo objeto matemático são inteiramente necessárias, pois, estes não são objetos “reais”, ou seja, que podemos ver, pegar ou até mesmo sentir. De um lado, uma maneira de conseguirmos perceber estes objetos é dando representantes a eles. Por outro lado, o tratamento efetuado sobre os objetos matemáticos vai depender de quais formas de representações estão sendo utilizadas.

Figura 1 - Exemplo de Tratamento em um Registro de Representação Semiótica

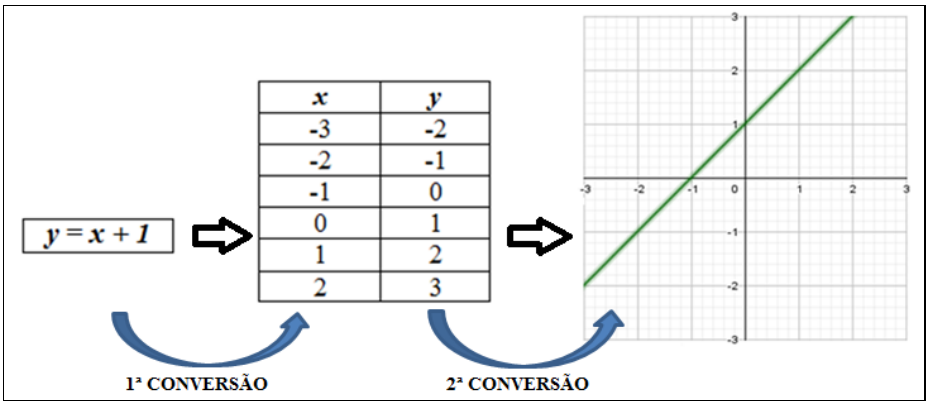
$$\boxed{\begin{gathered} x + 4 = 16 - 3x \\ x + 3x + 4 - 4 = 16 - 3x + 3x - 4 \\ 4x = 12 \\ 4x/4 = 12/4 \\ x = 3 \end{gathered}}$$

Fonte: Própria autora

Na Figura 1, vemos o tratamento efetuado em uma equação do 1º grau com a utilização do princípio aditivo, o qual consiste em adicionar ou subtrair um valor em ambos membros da igualdade, e o multiplicativo, que ocorre quando multiplicamos ou dividimos ambos membros da equação por um mesmo valor.

Enquanto o tratamento de uma representação ocorre dentro do mesmo registro anteriormente formado, ou seja, é uma transformação interna, a conversão é um processo diferente e independente do tratamento utilizado. Isso pode ser facilmente exemplificado, observando-se o desenvolvimento do ensino de funções. Alunos podem, muito bem, compreender a correspondência entre os valores organizados em uma tabela e em um gráfico sem, no entanto, pensar em uma conversão entre os dois registros, esquecendo-se que o diagrama, a tabela, o gráfico, a expressão algébrica e enunciados em língua natural[6], todos eles constituem registros diferentes de representações de funções.

Figura 2 - Exemplo de Conversão entre Registros de Representação Semiótica



Fonte: Própria autora

A recomendação de que esses aspectos devem ser considerados no ensino da matemática também é encontrada na Base Nacional Comum Curricular – BNCC, quando aponta que:

> Outro aspecto a ser considerado é que a aprendizagem de Álgebra, como também aquelas relacionadas a Números, Geometria e Probabilidade e estatística, podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos, tendo em vista que eles precisam ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações-problema, apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos e vice-versa. (BRASIL, p. 271, 2018).

[6]Termo utilizado por Duval no livro “Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica”, em seu artigo “Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática” – páginas 18 e 25.

Uma conversão, conforme Vertuan (2007), apoiando-se na Teoria de Duval (1993), pode ser congruente ou não congruente.

> De modo geral, uma conversão é considerada congruente quando o registro de chegada deixa transparecer o registro de partida, ou seja, quando a representação obtida após a conversão deixa transparecer a representação existente antes da conversão. De maneira análoga, diz-se que uma conversão é não congruente quando o registro de chegada em nada lembra o registro de partida. (VERTUAN, 2007, p. 26).

Duval (2009) também ressalta que:

> [...] a passagem de uma representação a outra se faz espontaneamente quando elas são congruentes, quer dizer, quando as três condições seguintes são preenchidas: correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações e conversão de uma unidade significante na representação de chegada. Mas, quando um desses três critérios não é verificado, as representações não são mais congruentes entre elas, e a passagem de uma à outra não tem mais nada de imediato. (DUVAL, 2009, p. 18).

Para melhor compreensão, podemos considerar duas conversões, ambas no registro da língua natural para o registro numérico:

Quadro 1 – Exemplos de conversão congruente e não congruente.

	Registro de saída (língua natural)	**Registro de chegada (registro numérico)**
1ª conversão	O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R$ 3,40 e cada quilômetro rodado custa R$ 2,60, quanto será cobrado por uma corrida de 9 km?	Preço = 3,40 + 9 x 2,60
2ª conversão	Devido a alguns aumentos de preços, uma mercadoria passou a ser vendida por R$ 36,00. Qual era o preço dessa mercadoria antes do aumento, sabendo que o índice de reajuste foi de 15%?	$0{,}15x + x = 36$

Na primeira conversão, vemos que o registro de chegada é, praticamente, uma transcrição do registro de saída, ou seja, o registro de chegada transparece o registro de saída. Nesse caso, temos uma conversão congruente. Já na segunda conversão apresentada, o registro de chegada não reflete em nada o registro de saída, dessa forma, temos uma conversão não congruente.

Vertuan (2007) chama a atenção para o fato de que não é porque o aluno consegue realizar uma conversão que ele vai saber voltar, ou seja, a mudança de sentido pode facilitar ou dificultar o processo de conversão.

> [...] Construir um gráfico dado sua expressão algébrica, não apresenta a mesma dificuldade que construir uma expressão algébrica dada sua representação no registro gráfico. Não significa, também, que realizar a conversão em um sentido implique em uma conversão natural, por parte do aluno, no outro sentido. (VERTUAN, 2007, p. 27).

Ele também ressalta a importância de não se privilegiar apenas um sentido de conversão, pois o sentido contrário não é automático para o aluno.

Jahn e Karrer (2004) também defendem que o ensino de matemática deve ser desenvolvido com utilização de diferentes registros de representação do mesmo objeto matemático, elas consideram que o trabalho desenvolvido dessa forma, influencia a compreensão do objeto pelo aluno. Elas ressaltam que:

> [...] a aprendizagem de um conceito matemático consiste em desenvolver coordenações progressivas entre vários sistemas de representação semiótica. Sua teoria (de Duval) está inserida no modelo cognitivo do processo da aprendizagem matemática, cujo foco está na complexidade cognitiva do pensamento humano. Neste contexto, a principal preocupação reside na análise das condições cognitivas internas, necessárias para o estudante entender Matemática, as quais compõem o que ele intitula de arquitetura cognitiva. Desta forma, na concepção desse autor, o entendimento matemático depende, então, da mobilização de vários registros e, por consequência, um indivíduo aprende Matemática se ele integra, em sua arquitetura cognitiva, todos os registros necessários como novos sistemas de representação. (JAHN e KARRER, 2004, p.16-17).

Isso reforça nossa defesa sobre a importância do professor trabalhar com diferentes tipos de registros para o mesmo objeto matemático e também sobre a necessidade dele saber realizar e coordenar a conversão entre esses registros, principalmente quando esse objeto envolve conceitos relacionados à função. Duval (2003) ainda destaca que o aprimoramento da criatividade e do conhecimento do aluno se desenvolve melhor na utilização de diferentes registros e não na formação de apenas um registro, mesmo que seu tratamento seja intensificado.

A partir dessas considerações, percebemos que a elaboração de uma sequência didática que visa o ensino de função afim deve ocorrer de forma a privilegiar os dois sentidos de conversão e, também, não menos importante, deve dar ênfase aos casos de congruência e não congruência. Dessa forma, teremos condições propícias ao bom desenvolvimento da criatividade e espontaneidade dos alunos na resolução de situações-problemas.

Em razão de nosso interesse estar voltado para a questão: de que modo o *Software* GeoGebra pode potencializar a aprendizagem do objeto matemático função afim para os alunos de um Curso Técnico em Informática? E do desenvolvimento desta investigação ter se dado por meio da aplicação de uma sequência didática, consideramos pertinente que a análise de todo este trabalho esteja voltada para o que recomenda a teoria dos registros de representação semiótica, desenvolvida por Duval (2009), principalmente no que se refere a como podemos explorar os registros gráficos e, ao mesmo tempo, analisar as possíveis vantagens e/ou dificuldades que a utilização do *software* GeoGebra pode apresentar em relação ao trabalho com o ensino de função afim. Também precisávamos utilizar uma metodologia de pesquisa que nos permitisse desenvolver este trabalho de forma organizada e harmoniosa, por isso, utilizamos a Engenharia Didática para nos dar esse suporte e é sobre ela que discorreremos a seguir.

3.4 A Engenharia Didática como metodologia de pesquisa

Segundo Pommer (2013):

> A metodologia representa um método, um caminho ou um meio adequado para se alcançar determinada meta ou objetivo. A função da metodologia é mostrar como trilhar no 'caminho das pedras' para a investigação de uma pesquisa ou para a prática de sala de aula, com a pretensão de ajudar o pesquisador/professor a refletir e instigar um novo olhar sobre o mundo, um olhar que seja organizador, dedutivo, curioso, indagador e criativo. (POMMER, 2013, p. 20).

Dessa forma, nesta pesquisa, utilizamos a engenharia didática como um referencial metodológico, por considerarmos que seus conceitos e finalidades se adéquam perfeitamente aos objetivos deste trabalho.

Desenvolvida no início dos anos 80 e fundamentada na Didática da Matemática (enfoque da didática francesa), a Engenharia Didática foi delineada por Brousseau (1996) e estruturada nos trabalhos de Michèle Artigue (1996). Seu principal objetivo de criação foi o de viabilizar a intenção de colocar o ensino como um projeto social. Como afirma Pommer (2013):

> A Engenharia Didática foi inicialmente concebida como uma forma de concretizar os ideais e pressupostos de investigação da escola da Didática da Matemática Francesa. Nos primórdios da Didática da Matemática, os IREMs[7] fomentavam a

[7] Institutos de Investigação do Ensino de Matemática.

> criação de recursos e meios para aprimorar o trabalho em sala de aula, que posteriormente evoluiu para a estruturação em um quadro teórico mais amplo, de modo a possibilitar a concepção de situações de aprendizagem e também servir como referencial metodológico para a posterior análise do material empírico. (POMMER, 2013, p. 7).

Nessa perspectiva, a Engenharia Didática apresenta dupla função, podendo ser empregada como uma metodologia qualitativa de pesquisa na área de Matemática ou também pode ser adotada na elaboração, aplicação e análise de situações didáticas que promovam aprendizagem significativa de alunos em sala de aula.

Brousseau (1986 apud Pommer, 2013) descreve as principais características do que considera ser uma situação didática:

> (a) os alunos aceitam se responsabilizar pelo fazer e pela organização da situação-problema, como um projeto pessoal;
> (b) ela é elaborada para se obter certo conhecimento que é parcial ou totalmente possível de ser alcançado pelo aluno;
> (c) espera-se que o aluno tome decisões, teste-as e modifique-as quando necessário para adequá-la a busca da resposta correta;
> (d) existe uma estratégia de base disponibilizada pelo repertório de conhecimento dos alunos que permita uma solução local ou uma solução parcial que inicie o desenvolvimento da atividade;
> (e) a eficácia e a viabilidade dependem das variáveis didáticas de comando que o professor convenientemente deve escolher e utilizar na concepção das atividades;
> (f) envolvem uma socialização que pode ocorrer de três modos; comunicação e negociação entre pares, com o jogo/problema e, eventualmente, em caso de extrema necessidade, com o professor;
> (g) é elaborada para que o aluno perceba que o novo conhecimento almejado é o meio mais eficaz para encaminhar e resolver a situação;
> (h) permite a construção do conhecimento, o que equivale a formação de sentido para o aluno. (BROUSSEAU, 1986 apud POMMER, 2013).

Michèle Artigue (1988 apud Machado, 1999, p. 199) descreve essa metodologia "[...] como um esquema experimental baseado sobre realizações didáticas em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino".

Entretanto, Almouloud e Coutinho (2008) caracterizam essa teoria da seguinte forma:

> [...] como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste. (ALMOULOUD e COUTINHO, 2008, p. 66).

Artigue (1988 apud Machado, 1999) ainda justifica a origem do termo engenharia didática ao comparar o trabalho de um professor ao trabalho de um engenheiro. Segundo a autora, na realização de um determinado projeto, o engenheiro se apoia em conhecimentos científicos de seu domínio e concorda em submeter-se a um controle de tipo científico. No entanto, ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar com objetos muito mais complexos do que os objetos depurados da ciência e, portanto, ele tem que lidar praticamente com todos os meios disponíveis, problemas que a ciência não quer ou não pode dar conta.

Douady (1993 apud Machado, 1999) também faz referência ao trabalho do professor como sendo um engenheiro. Ela afirma que:

> [...] uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor. (DOUADY, 1993 apud MACHADO, 1999, p. 198).

Por outro lado, Carneiro (2005, p. 90), em suas considerações sobre o tema, afirma que o termo engenharia didática "É uma expressão com duplo sentido. Designa produções para o ensino, derivadas de resultados de pesquisa, e também designa uma específica metodologia de pesquisa baseada em experiências de sala de aula".

E finaliza seu raciocínio, sugerindo que:

> Nessa linha, prática de ensino é articulada com prática de investigação. A teoria da Engenharia Didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico. (CARNEIRO, 2005, p. 90)

Com a pretensão de refinar a compreensão sobre engenharia didática como metodologia de pesquisa, citamos Almouloud e Coutinho (2008, p. 66) que nos dizem: "A Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito".

Dessa forma, coordenamos nosso trabalho de forma alinhada às características da engenharia didática, na qual se encontra a metodologia de pesquisa e a metodologia para o desenvolvimento de situações didáticas. Como nosso trabalho incluiu a produção, aplicação e análise de uma situação de aprendizagem, visando o ensino de função afim para alunos do primeiro ano do ensino médio, acreditamos ser esse o referencial metodológico que deveríamos utilizar.

Artigue (1995) ainda diferencia dois níveis existentes no processo metodológico da engenharia didática: "Geralmente existem dois níveis: micro-engenharia e macro-engenharia, dependendo da importância da realização didática envolvida na pesquisa" (ARTIGUE, 1995, p. 36, tradução nossa)[8]

Machado (2010) discorre também sobre esses níveis na seguinte fala:

> Pode-se distinguir dois níveis de "engenharia didática", necessários e complementares. O primeiro é a "microengenharia", no qual as pesquisas têm por objeto de estudo um determinado assunto. Estas pesquisas são localizadas e levam em conta principalmente a complexidade dos fenômenos de sala de aula. Num segundo nível, está a "macroengenharia", que, por sua vez, são as pesquisas que permitem uma composição entre a complexidade das pesquisas da "microengenharia" e os fenômenos ligados à duração nas relações ensino aprendizagem. (MACHADO, 2010, p. 12).

Dessa forma, percebe-se que o desenvolvimento desta pesquisa está baseado na metodologia da engenharia didática, considerando o nível de microengenharia, já que nosso objeto de estudo está voltado para uma situação didática em que se analisa o ensino de função afim para alunos do ensino médio e seu desenvolvimento será em uma sala de aula.

Artigue (1995) difere a engenharia didática das outras metodologias de pesquisa. Ela observa que:

> [...] De fato, as investigações que recorrem à experimentação em sala de aula estão geralmente dentro de uma abordagem comparativa com validação externa, baseada na comparação estatística do desempenho de grupos experimentais e grupos de controle. Este não é o caso da engenharia didática que se localiza, pelo contrário, no registro dos estudos de caso e cuja validação é essencialmente interna, baseada na comparação entre a análise a priori e a posteriori.[9] (ARTIGUE, 1995, p. 37, tradução nossa).

Para a compreensão de como essa metodologia de pesquisa se desenvolve, é necessário fazermos uma breve apresentação das quatro fases que a compõe, denominadas de análises prévias, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação.

3.4.1 As diferentes fases da metodologia da Engenharia Didática

3.4.1.1 As análises prévias

[8] "Allí se distinguen por lo general dos niveles: el de la *micro-ingeniería* y el de la *macro-ingeniería*, dependiendo de la importancia de la realización didáctica involucrada em la investigación".

[9] [...] De hecho, las investigaciones que recurren a la experimentación en clase se sitúan por lo general dentro de un enfoque comparativo con validación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control. Este no es el caso de la ingeniería didáctica que se ubica, por el contrario, en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

Essa é a primeira fase e se distingue das outras por ser este o momento que servirá de base para o desenvolvimento do trabalho, embora também possa estar presente durante todo seu andamento, sendo retomada e/ou aprofundada conforme a necessidade.

Encontramos em Almouloud e Coutinho (2008, p. 66) alguns itens que podem servir de referencial para o levantamento de dados e possíveis considerações sobre o tema pesquisado e que fazem parte dessa etapa:

> A primeira fase é aquela na qual se realizam as análises preliminares, que pode comportar as seguintes vertentes:
> • epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
> • do ensino usual e seus efeitos;
> • das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução;
> • das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva;
> • a consideração dos objetivos específicos da pesquisa;
> • o estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual insere-se o trabalho. (ALMOULOUD e COUTINHO, 2008, p. 66).

É nessa etapa que o professor/pesquisador tem a necessidade de promover levantamentos sobre as concepções dos alunos, sobre as dificuldades e sobre os obstáculos que marcam sua evolução. Isso se justifica pelo fato de possibilitar a análise de possíveis fatores de superação dos problemas observados, alinhados aos objetivos da pesquisa, o que abrirá caminho para a segunda fase: a concepção e análise a priori.

3.4.1.2 Concepção e Análise a priori

Machado (2010, p. 241), em suas considerações sobre essa fase de concepção e análise a priori das situações didáticas, nos orienta que “a fase da concepção e da análise a priori o pesquisador, orientado pelas análises preliminares, delimita certo número de variáveis pertinentes do sistema sobre o qual o ensino pode atuar, as quais são chamadas de variáveis de comando”.

Nessa perspectiva, Artigue (1988 apud Machado, 1999) diferencia dois tipos de variáveis de comando que serão manipuladas pelo pesquisador, as variáveis *macrodidáticas*[10] ou globais relativas à organização global da engenharia e as variáveis *microdidáticas*[11]ou

---

[10] São as variáveis que dizem respeito à organização geral da pesquisa, ou seja, será comum a todos os participantes durante toda a pesquisa. Como exemplos de variáveis macrodidáticas, podemos citar os referenciais teóricos e metodológicos, o ambiente em que a pesquisa se desenvolverá, a organização dos alunos e a forma como as atividades serão propostas a eles.

[11] Já as variáveis microdidáticas estão mais relacionadas à forma como cada situação-problema proposta na pesquisa inquieta o comportamento dos alunos. Podemos considerar como sendo uma variável microdidática desde a escolha do tipo de papel selecionado para a apresentação da atividade até o grau de complexidade da tarefa proposta.

locais relativas à organização local da engenharia, isto é, a organização de uma sessão ou de uma fase. Dessa forma, o professor/pesquisador terá os subsídios necessários ao bom andamento da pesquisa.

Vale ressaltar que essas variáveis podem ser de ordem geral ou podem ser que dependam do objeto matemático investigado e que suas análises serão realizadas em três dimensões: a *dimensão epistemológica* (associada às características do saber), a *dimensão cognitiva* (associada às dimensões cognitivas dos alunos sujeitos da aprendizagem) e a *dimensão didática* (associada às características do sistema de ensino, no qual os sujeitos estão inseridos).

O objetivo de uma análise a priori é indicar como os caminhos escolhidos (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) admitem controle sobre os comportamentos dos alunos e esclarecem seu sentido. Para melhor compreensão, citamos Almouloud e Coutinho (2008), os quais afirmam que:

> Em uma análise a priori devemos:
> • Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática desenvolvida;
> • Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem;
> • Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem. (ALMOULOUD e COUTINHO, 2008, p. 67).

A análise a priori, além de permitir o controle da realização das atividades pelos alunos, também possibilita a identificação e compreensão dos fatos observados.

3.4.1.3 Experimentação

A experimentação é, para o aluno, a parte prática da pesquisa. É a fase em que ele é submetido às resoluções das atividades propostas. É um momento que também oportuniza a aprendizagem, já que há a mobilização de algum tipo de conhecimento anterior.

Machado (1999) define essa fase da seguinte forma, “A experimentação consiste basicamente no desenvolvimento da aplicação da Engenharia Didática, concebida a um grupo de alunos, objetivando verificar as ponderações levantadas na análise *a priori*”.

Nesse mesmo texto, o autor ainda complementa que a fase de experimentação pressupõe:

> A explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa a população de alunos que participará da experimentação; O estabelecimento do contrato didático; A aplicação do instrumento de pesquisa; O registro das observações feitas durante a experimentação. (MACHADO, 1999, p. 206).

Ressaltamos, ainda, que nessa fase é de extrema importância que o professor/pesquisador propicie condições para que os alunos se sintam independentes para resolver a situação proposta. Essa ação é caracterizada pelo conceito de *devolução* descrito por Brousseau (1996), pois “significa o aceite do aluno em enfrentar o desafio intelectual de resolver as situações propostas, como se o problema fosse dele”.

3.4.1.4 Análise a posteriori e validação

Como última etapa a ser trabalhada à luz da metodologia da engenharia didática, temos a análise a posteriori e validação. Artigue (1995, p. 48 apud Cavalcante, 2017) evidencia que a base dessa fase são as observações das sequências didáticas e das atividades produzidas pelos alunos, como também as análises de dados coletados durante sua implementação.

Artigue (1996) ainda afirma que:

> Esta fase se caracteriza pelo tratamento dos dados colhidos e pela confrontação com a análise a priori, permitindo a interpretação dos resultados e em que condições as questões levantadas foram respondidas. Assim, é possível analisar se ocorrem e quais são as contribuições para a superação do problema, caracterizando a generalização local que permitirá a validação interna do objetivo da pesquisa. (ARTIGUE, 1996, p. 26).

Machado (2010) indica alguns instrumentos de coleta de dados que podem servir de suporte nessa etapa:

> Muitas vezes, para melhor compreensão do ocorrido, tornam-se necessários dados complementares como: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas tanto durante a experimentação quanto no final dela. Isto é, as fases 3 e 4 não são excludentes, mas complementares. (MACHADO, 2010, p. 246).

Por esse viés, a análise a posteriori cumpre seu objetivo quando relaciona as observações e análises feitas, após o desenvolvimento do trabalho, com os objetivos definidos anteriormente e verifica se o que foi realizado pelos sujeitos da pesquisa condiz com o que foi proposto na análise a priori.

Por fim, gostaríamos de ressaltar a afirmação de Machado (2010, p. 246), que diz: “Finalmente, é da confrontação das análises a priori e a posteriori que se validam ou se refutam as hipóteses levantadas no início da engenharia”.

4 DESENVOLVIMENTO DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Como o desenvolvimento desta pesquisa seguiu os pressupostos da engenharia didática, neste capítulo vamos descrever como utilizamos essa metodologia para organizar o planejamento, a elaboração, a aplicação (experimentação) e, também, a validação da sequência de atividades que orientou a elaboração do produto educacional deste trabalho.

Inicialmente, reforçamos que os sujeitos desta pesquisa foram 32 alunos do 1º ano do Curso Técnico Integrado ao Ensino Médio em Informática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Acre, Campus Sena Madureira, turma 2018. A escolha desses sujeitos se deve ao fato de serem alunos da própria pesquisadora.

Como dito, é na fase das análises prévias que se constrói a base inicial do trabalho que se pretende desenvolver. Dessa forma, nessa fase de nosso trabalho, buscamos informações que fundamentassem nossa pesquisa, ou seja, procuramos trazer todo tipo de conhecimento que, de alguma forma, corroborasse com nosso trabalho. Procuramos respostas para perguntas do tipo: qual a origem e evolução do conceito de função? Quais são as leis que regulamentam o ensino de funções nas escolas públicas e particulares do Brasil? Para que estudar função afim? Quais dificuldades os alunos encontram nesse estudo? Como os professores vêm desenvolvendo o ensino da função afim nas escolas brasileiras? Os alunos compreendem que as ideias associadas ao significado de função afim podem ser aplicadas em seu cotidiano?

Também consideramos importante fazermos um estudo bibliográfico sobre o tema, a fim de que pudéssemos ter subsídios teóricos suficientes para embasar nossa pesquisa quanto a várias questões, como, por exemplo: a utilização do *Software* GeoGebra como suporte de aprendizagens, o uso da Teoria dos Registros de Representação Semiótica como referencial teórico, o próprio uso da engenharia didática como metodologia de pesquisa, entre outras. Ademais, tivemos, nessa etapa, toda a investigação e análise das condições e dos fatores que interferiram, de alguma forma, no desenvolvimento desta pesquisa.

Já na fase de concepção e análise a priori, fizemos o estudo da construção de situações que, a priori, permitiriam ao aluno o estabelecimento de uma relação significativa com o saber pretendido. Assim, com o objetivo de prever quais concepções os alunos tinham sobre o conceito de função afim, como também, quais eram as dificuldades que poderiam servir de obstáculos para a evolução de suas aprendizagens, à luz da Teoria dos Registros de

Representação Semiótica e com o uso do *Software* GeoGebra, planejamos e analisamos previamente algumas situações de aprendizagem para que fossem propostas a eles.

Assim, delimitamos nossas variáveis de comando. Como variáveis macrodidáticas que definiram a caracterização e concepção da sequência didática envolvendo a ideia de função afim, temos: a utilização de situações-problema como recurso didático; contextualização do objeto matemático; a formação de duplas para a realização das atividades propostas, por acreditarmos que essa escolha pode viabilizar a comunicação e a mobilização de conhecimentos entre os sujeitos da pesquisa.

A partir das variáveis descritas, foi possível realizar as escolhas das variáveis microdidáticas, que foram: a seleção e caracterização do local de desenvolvimento da pesquisa; a escolha dos sujeitos e dos instrumentos que fossem capazes de tornar viável a elaboração e execução da atividade planejada; foco na mudança de registro das situações didáticas apresentadas e a promoção de momentos para socialização dos resultados obtidos na resolução de cada situação-problema.

Dessa forma, providenciamos as autorizações de participação na pesquisa, devidamente assinadas pelos alunos participantes (conforme modelo apresentado no apêndice A), bem como definimos a quantidade de encontros, datas e horários que foram necessários ao bom desenvolvimento do trabalho. Tudo isso foi feito com as devidas garantias disponibilizadas pelos alunos, como também pela direção da instituição de ensino onde desenvolvemos a pesquisa.

Nessa perspectiva, elaboramos as atividades, utilizando como pressupostos as análises preliminares, a teoria dos registros de representação semiótica e a engenharia didática, bem como os dados obtidos a partir das variáveis macrodidáticas e microdidáticas descritas anteriormente.

Elaboramos e selecionamos 05 (cinco) atividades que compõem a sequência analisada neste trabalho, considerando diferentes aspectos que se mostram interessantes na aprendizagem dos alunos e que são realçados pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Além de promover a articulação entre as diferentes formas de registros, nossa intenção será também a de investigar de que maneira a utilização do *Software* GeoGebra pode contribuir como instrumento de aprendizagem de conceitos relacionados à função afim.

As atividades envolvem situações que mostram a contextualização do que entendemos por função afim, enquanto que o *Software* GeoGebra foi usado pelos alunos como suporte na compreensão das conversões entre os registros apresentados.

A seguir, apresentamos como usamos a engenharia didática no desenvolvimento de cada uma dessas atividades:

4.1 Engenharia didática para a atividade 1

Antes da realização deste primeiro encontro, verificamos se havia disponibilidade de computadores suficientes para toda a turma, no máximo poderíamos ter dois alunos por computador, tendo em vista que os eles resolveriam as atividades em dupla. Também foi necessário averiguar se a instalação do *software* já havia sido realizada e se era a mesma versão que utilizamos na elaboração das atividades, ou seja, se era a versão GeoGebra Classic 5.

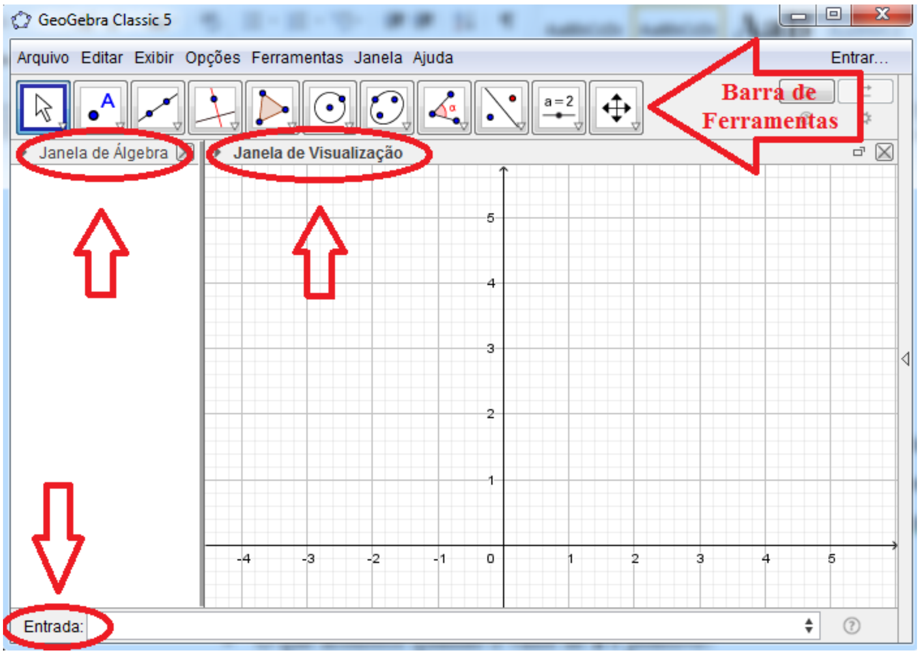
Após a certificação de que tudo estava devidamente pronto para o início do trabalho, fizemos o agendamento do laboratório de informática do Campus para a realização dos encontros, sendo que esses foram realizados nos dias 08, 09, 10, 15 e 16 de outubro de 2018, no período da manhã, tendo duração de 1 hora e 40 minutos cada. Após fazermos a verificação de que todos os 32 computadores estavam em perfeito funcionamento, levamos os alunos/sujeitos da pesquisa ao local, onde explicamos o objetivo e a metodologia deste trabalho e solicitamos que, após fazerem a leitura, assinassem um termo de autorização de participação em pesquisa que foi devidamente entregue aos mesmos. Participaram desse encontro, 30 dos 32 alunos da turma.

A partir desse momento, nosso trabalho seguiu orientado pela ordem das atividades planejadas. Inicialmente, apresentamos o *software* aos alunos, descrevendo seus comandos e funções, por meio da realização de algumas construções gráficas. Também reservamos um tempo para que eles se sentissem livres para explorar o programa, fazer construções diversas, desenhar, brincar, enfim, o objetivo era, principalmente, proporcionar sua familiarização com o programa, tendo em vista que seu desconhecimento poderia acarretar dificuldades na execução das atividades. Assim, antes de iniciarmos o desenvolvimento da sequência didática, a aula esteve voltada para o estudo do programa Geogebra.

Para isso, solicitamos a abertura do programa pelos alunos e iniciamos sua apresentação, comentando sobre a facilidade de acesso que temos, tendo em vista que é um programa de *download* gratuito e de funcionamento em diversos sistemas operacionais, basta que o computador possua a plataforma JAVA instalada. Permitimos que os alunos se familiarizassem com o *software*, ao mesmo tempo em que enfatizamos a importância desse recurso para fins da compreensão matemática.

Foi realizada a exploração dos espaços denominados Janela de Álgebra e Janela de Visualização, como também de seus comandos básicos presentes na barra de ferramentas, como vemos na imagem, a seguir:

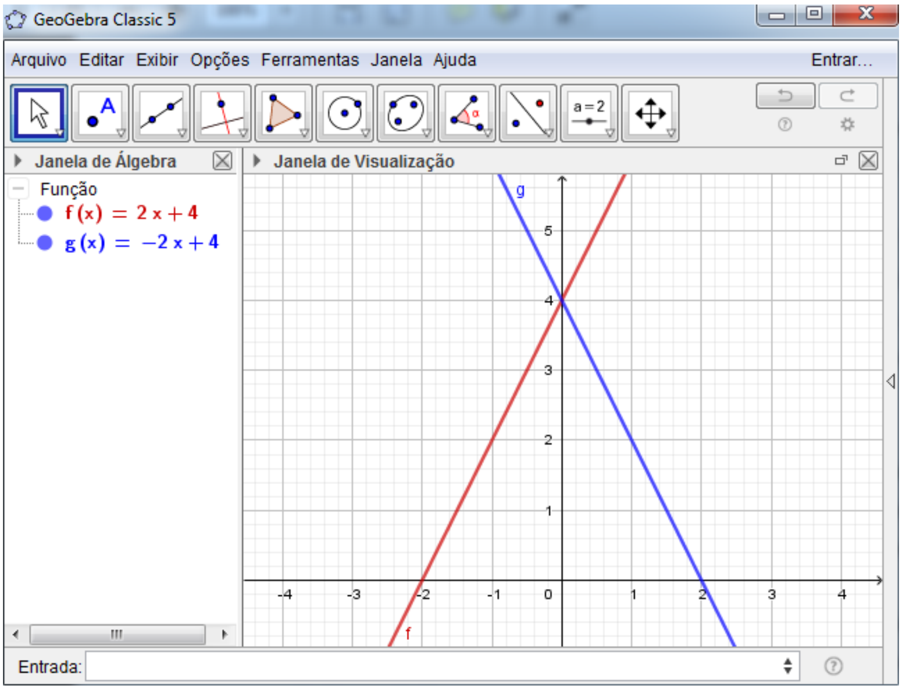
Figura 3 - Visualização da tela inicial do *software* GeoGebra



Fonte: Tela do GeoGebra, criada pela autora.

Como primeira atividade realizada para familiarização com o programa, solicitamos aos alunos que construíssem o gráfico das funções $f(x) = 2x + 4$ e $g(x) = -2x + 4$ no programa Geogebra. Para essas construções, indicamos que seria o bastante digitar a função desejada no campo “entrada”, destacado na imagem acima, e teclar “enter” que apareceria o gráfico correspondente na janela de visualização e a forma algébrica na janela de álgebra.

Figura 4 - Visualização das formas algébrica e geométrica das funções $f(x) = 2x + 4$ e $g(x) = -2x + 4$ no programa Geogebra



Fonte: Tela do Geogebra, criada pela autora.

Após essas construções, foram realizados os seguintes questionamentos:

- ✓ Considerando que a forma genérica da função afim é $f(x) = ax + b$, o que acontece quando o valor de **a** é positivo?
- ✓ O que acontece quando o valor de **a** é negativo?
- ✓ Como denominamos as funções do tipo $f(x) = 2x + 4$?
- ✓ Como denominamos as funções do tipo $g(x) = -2x + 4$?
- ✓ O que o valor de b determina no gráfico?

Quando questionados sobre o que acontece quando o valor de **a** é positivo na forma genérica da função afim $f(x) = ax + b$, vários alunos responderam que, conforme os valores de x estão aumentando, os valores de y também aumentam. Resposta semelhante para a pergunta: e quando o valor de **a** é negativo, os alunos demonstraram entender que, nesse caso, conforme os valores de x estão aumentando, os valores de y tendem a diminuir. Isso fez com que, rapidamente, eles caracterizassem as funções $f(x) = 2x + 4$ como crescente e $g(x) = -2x + 4$, como decrescente. Já com relação ao que o valor de b determina no gráfico, as respostas corretas foram menos expressivas. No entanto, 3 alunos responderam que este valor determina o ponto em que o gráfico corta o eixo y, o que levou os outros alunos a fazerem a mesma observação apoiados nos gráficos mostrados na tela do computador.

Como esperávamos, a realização dessa sondagem foi muito útil para o desenvolvimento das atividades seguintes, pois fez com que todos os alunos relembrassem características importantes da função afim, a partir da observação de suas construções gráficas no computador e, mesmo quando a proposta de atividade era outra, eles continuaram a fazer essas observações com os outros gráficos que construíram após essa discussão.

A partir dessas considerações, entregamos cópias da ATIVIDADE 1 para cada aluno e solicitamos que eles se organizassem em duplas. Fizemos a leitura da atividade e pedimos que eles respondessem aos questionamentos, conforme segue abaixo:

ATIVIDADE 1

1º) Suponha que um ônibus saia da Cidade de Sena Madureira com destino a Rio Branco, com velocidade constante de 90 km/h, o que equivale a 1,5 km/min. Com base nessas informações, responda:

a) Como podemos representar essa informação utilizando uma tabela que mostre a distância percorrida pelo ônibus em 1 min, 2 min, 5 min, 10 min e 30 min?
b) É possível determinar quanto tempo esse ônibus leva pra chegar ao km 51? Qual foi esse tempo?
c) Se a distância total entre as cidades citadas é de 144 km, quanto tempo o ônibus gastará para fazer esse percurso?
d) Se representarmos por **D** a distância percorrida e por **T** o tempo gasto, estabeleça uma relação matemática que modele essa situação.
e) As grandezas distância e tempo são diretamente proporcionais? Com a utilização do *software* geogebra, represente essa situação graficamente?
f) Agora, verifique se o gráfico apresentado na tela do GeoGebra contém todos os pares ordenados (pontos) definidos na tabela que você organizou.

Nessa atividade, era necessário que o aluno interpretasse o enunciado de forma suficiente para poder realizar as conversões solicitadas. Inicialmente, os alunos teriam que passar do registro da língua materna para o registro de tabela, analisando quais informações constavam no problema e quais eles precisariam encontrar. Em seguida, o que se pede é que façam a conversão para o registro algébrico e geométrico. Nesse sentido, nosso objetivo era o de provocar a conversão entre esses diferentes tipos de registros de uma mesma função, inclusive, utilizando o software GeoGebra como forma de verificar se as conjecturas e afirmações feitas pelos alunos eram coerentes com o que estava representado na tela do computador. Esperávamos, também, que, com auxílio da visualização gráfica, o aluno conseguisse fazer manipulações e estabelecesse relações entre as variáveis já identificadas.

Também, como forma de evidenciar o coeficiente de proporcionalidade da função linear, solicitamos que o estudante relacionasse as grandezas tempo e distância e verificasse como podemos obter a duração de tempo, sendo percorrida certa distância. Nosso objetivo era mostrar que existe uma constante de proporcionalidade nessa situação e relacioná-la ao conceito de função, tornando mais fácil a compreensão dos registros gráfico e algébrico.

Em nossa análise a priori dessa atividade, consideramos importante organizar alguns questionamentos que pudessem estimular o conhecimento dos alunos, por isso, registramos as seguintes questões: o gráfico que aparece na tela corresponde aos dados apresentados no problema? Teremos alguma representação gráfica no 2º e 3º quadrante? Por quê? De acordo com o problema, qual é o menor valor que pode ser atribuído para x? Qual é o domínio dessa função?

Devido a termos, nesse primeiro encontro, focado, também, na apresentação do *software*, não foi possível fazermos a conclusão da ATIVIDADE 1, pois, a duração de cada encontro era de 1 hora e 40 minutos, o que corresponde a duas horas/aulas, e esse tempo foi insuficiente para que chegássemos ao final da atividade de forma que pudéssemos alcançar os objetivos preestabelecidos, então, sua conclusão ficou para o próximo encontro.

Assim, no encontro seguinte, a aula já foi iniciada na própria sala do laboratório de informática, onde pudemos retornar com a ATIVIDADE 1, a fim de fazermos sua conclusão e, logo em seguida, iniciarmos a ATIVIDADE 2.

Reforçamos que a comparação entre o que "esperávamos" e o que "obtivemos como resultado" é muito importante para a validação do trabalho realizado, pois, é a partir dessas análises que poderemos validar ou não as hipóteses levantadas, conforme aponta Artigue (1995, p. 48), "é na comparação das duas análises, a priori e a posteriori, que se fundamenta a essência da validação das hipóteses formuladas" (ARTIGUE, 1995, p. 48, tradução nossa).[12]

Para analisar as respostas que obtivemos dos alunos/sujeitos para as atividades aplicadas, vamos considerar as seguintes categorias:

[12] "en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación".

- Acertos parciais – apresentação incompleta da questão, (tabela incompleta, alguns valores errados, erros nos tratamentos algébrico e/ou gráfico);
- Acertos totais – apresentação correta de todos os procedimentos (escritos manualmente e/ou gráficos com a ajuda do software) envolvidos na resolução da questão proposta na atividade;
- Em branco – não apresentou nenhuma resposta para a questão;
- Erradas – apresentou somente registros que não correspondem às soluções corretas.

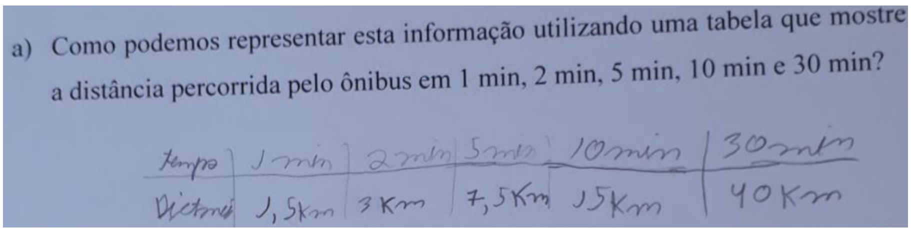
Assim, no quadro 3, a seguir, usando como critério de classificação as categorias destacadas anteriormente, trazemos o resultado que obtivemos com aplicação da ATIVIDADE 1.

Quadro 2 - Distribuição dos resultados das categorias obtidas na Atividade 1

Resultados obtidos a partir da análise da experimentação da ATIVIDADE 1						
Categorias	**Itens da atividade 1**					
	(a)	**(b)**	**(c)**	**(d)**	**(e)**	**(f)**
Acertos totais	28	28	25	24	25	30
Acertos parciais	02	0	0	0	05	0
Em branco	0	01	01	03	0	0
Erradas	0	01	04	03	0	0

Para o item **(a),** tivemos 28 respostas consideradas totalmente corretas e 02 consideradas parcialmente corretas. Entre as respostas parcialmente corretas, temos a da figura 5 que mostra um cálculo equivocado para o resultado da distância percorrida pelo ônibus decorridos 30 minutos. Ao questionar o aluno sobre o motivo de tal resposta, ele informou que calculou corretamente, mas, que na hora de transcrever o cálculo para a atividade, trocou o número “45” pelo “40” e não percebeu, inclusive, o aluno mostrou o rascunho com os valores corretos.

Figura 5 - Resposta apresentada por um aluno para o item (a) da Atividade 1.



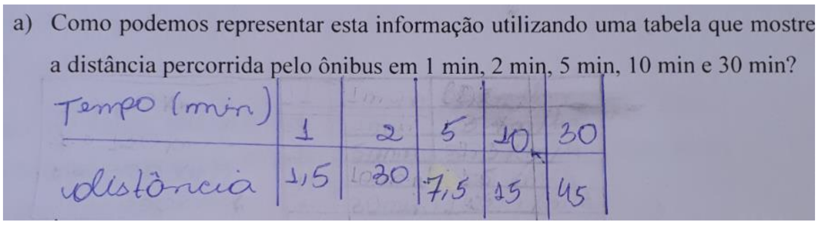
a) Como podemos representar esta informação utilizando uma tabela que mostre a distância percorrida pelo ônibus em 1 min, 2 min, 5 min, 10 min e 30 min?

Tempo	1 min	2 min	5 min	10 min	30 min
Distância	1,5 km	3 km	7,5 km	15 km	40 km

Fonte: própria autora.

A outra resposta parcialmente correta se encontra na figura 6. Nesse caso, temos o valor de 30 km em 2 minutos, enquanto que a resposta correta seriam 3 km em 2 minutos. Ao questionarmos o motivo de tal resultado, a aluna afirmou ter se esquecido de colocar a vírgula no número e disse ter compreendido a ideia apresentada na questão.

Figura 6 - Resposta apresentada por um aluno para o item (a) da Atividade 1.



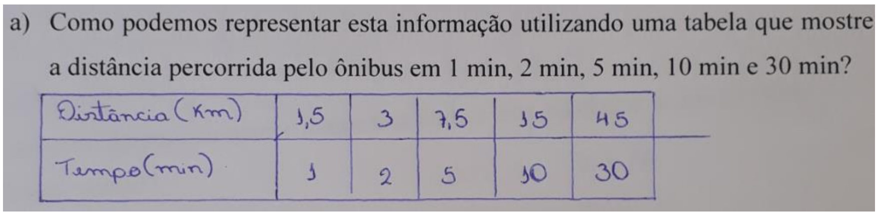
a) Como podemos representar esta informação utilizando uma tabela que mostre a distância percorrida pelo ônibus em 1 min, 2 min, 5 min, 10 min e 30 min?

Tempo (min)	1	2	5	10	30
distância	1,5	30	7,5	15	45

Fonte: própria autora.

Os demais alunos apresentaram respostas de forma correta, assim como a resolução mostrada pela figura 7:

Figura 7 - Resposta apresentada por um aluno para o item (a) da Atividade 1.



a) Como podemos representar esta informação utilizando uma tabela que mostre a distância percorrida pelo ônibus em 1 min, 2 min, 5 min, 10 min e 30 min?

Distância (Km)	1,5	3	7,5	15	45
Tempo(min)	1	2	5	10	30

Fonte: própria autora.

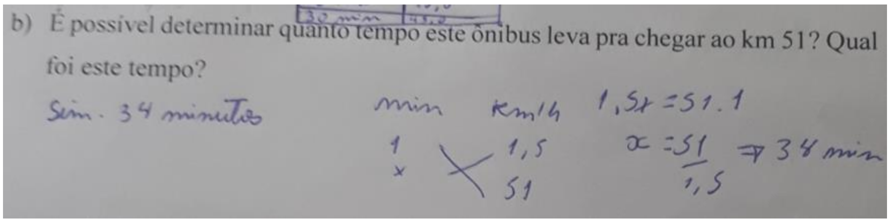
Em termos didáticos, podemos constatar que, embora tenhamos duas resoluções parcialmente corretas, todos os alunos souberam realizar a conversão do registro em linguagem materna para o registro de tabela, tendo em vista que os erros cometidos são por conta da falta de observação na transposição dos dados e não por conta da má compreensão do enunciado.

Percebemos que esse tipo de conversão não se torna tão difícil para o aluno por conta de sua frequente utilização nas atividades matemáticas. O que mostra como é importante diversificar nossa prática pedagógica, no que se refere à utilização de registros de representação de objetos matemáticos.

Para o item **(b)**, nosso objetivo era mostrar que existe uma constante de proporcionalidade e, principalmente, fazer com que o aluno estabeleça uma relação entre essa situação e o conceito de função.

Com a aplicação da atividade, tivemos 28 respostas corretas, 01 resposta em branco e 01 resposta com resultado considerado errado. As resoluções corretas se apresentaram, quase que exclusivamente, usando a razão entre grandezas, explorando o vínculo existente entre a proporcionalidade e a função afim. Conforme vemos na figura 8:

Figura 8 - Resposta apresentada por um aluno para o item (b) da Atividade 1.



b) É possível determinar quanto tempo este ônibus leva pra chegar ao km 51? Qual foi este tempo?

Sim. 34 minutos

min km/h 1,5x = 51.1

1 1,5 x = 51/1,5 ⇒ 34 min

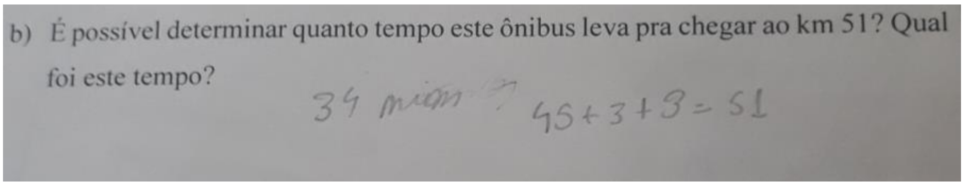
x 51

Fonte: própria autora.

Esse modo de resolução mostra que houve a compreensão de que, a cada variação de 1 minuto, a distância percorrida varia em 1,5 km, e que esse valor é a constante de proporcionalidade do problema.

Tivemos apenas 01 resposta entre as consideradas corretas que apresenta resolução de forma bem diferente das demais, conforme vemos na figura 9:

Figura 9 - Resposta apresentada por um aluno para o item (b) da Atividade 1.



b) É possível determinar quanto tempo este ônibus leva pra chegar ao km 51? Qual foi este tempo?

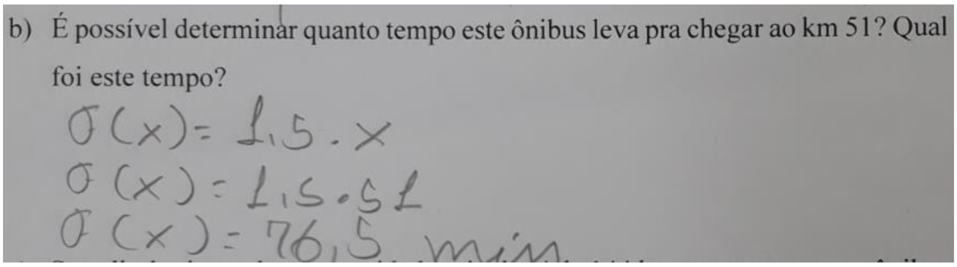
34 min ⇒ 45+3+3 = 51

Fonte: própria autora.

Nesse caso, o aluno usou os dados obtidos na construção da tabela no item (a) e, ao perceber que a cada 2 minutos, a distância percorrida era aumentada em 3 km, ele efetuou um tratamento diferente dos demais, somando a distância percorrida em 30 minutos com a distância percorrida em outros 4 minutos decompostos em 2 + 2, ou seja, “45 + 3 + 3”, obtendo 51 km que era a distância dada inicialmente. Embora o aluno não tenha deixado clara a compreensão de que existe uma constante de proporcionalidade na situação dada, ele utilizou procedimentos considerados interessantes, sob o aspecto do funcionamento de seu raciocínio lógico, pois mostra a compreensão da existência de uma proporcionalidade, mesmo que a comparação não esteja voltada para a variação de minuto em minuto.

Na figura 10, a seguir, vemos que, na única resposta considerada errada, o aluno ainda mostra compreensão de que existe uma constante de proporcionalidade, ele efetua o tratamento de forma correta, no entanto, apresenta dificuldades na interpretação de qual valor depende do outro, ou seja, qual é a variável dependente e qual é a variável independente.

Figura 10 - Resposta apresentada por um aluno para o item (b) da Atividade 1.


b) É possível determinar quanto tempo este ônibus leva pra chegar ao km 51? Qual foi este tempo?

$f(x) = 1{,}5 \cdot x$

$f(x) = 1{,}5 \cdot 51$

$f(x) = 76{,}5$ min

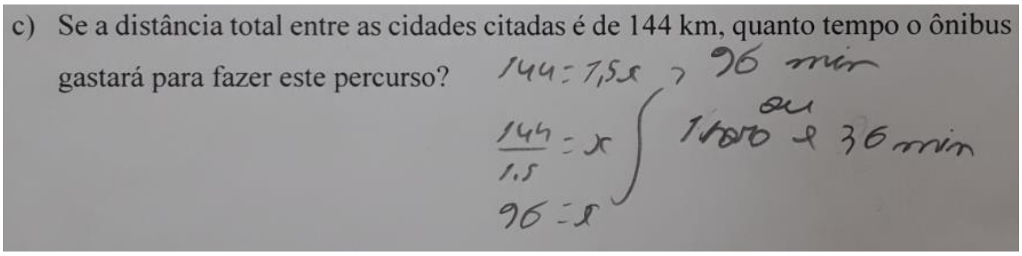
Fonte: própria autora.

De forma geral, a resolução desse item também foi muito importante para a compreensão de que podemos representar a mesma situação utilizando outro tipo de registro, no caso, o registro algébrico. Reforçamos que a conversão entre diferentes tipos de registros deve ser uma prática rotineira em sala de aula, como forma de garantir a possibilidade de exploração das diferentes habilidades exigidas por diferentes tipos de registros.

Para o item **(c)**, tivemos 25 acertos, 01 aluno deixou a questão em branco e 04 responderam de forma equivocada.

Assim como na questão anterior, esperávamos que os alunos utilizassem a proporcionalidade como método de resolução, ou seja, que continuassem utilizando a regra de três no tratamento da questão para encontrar os resultados. No entanto, dos 25 alunos que acertaram a questão, 08 deles utilizaram uma fórmula matemática, mostrando que as discussões realizadas no item anterior serviram para a organização de uma sentença algébrica capaz de equacionar o problema, como vemos na figura 11:

Figura 11 - Resposta apresentada por um aluno para o item (c) da Atividade 1.


c) Se a distância total entre as cidades citadas é de 144 km, quanto tempo o ônibus gastará para fazer este percurso?

$144 = 1{,}5x \rightarrow 96$ min

$\frac{144}{1{,}5} = x$

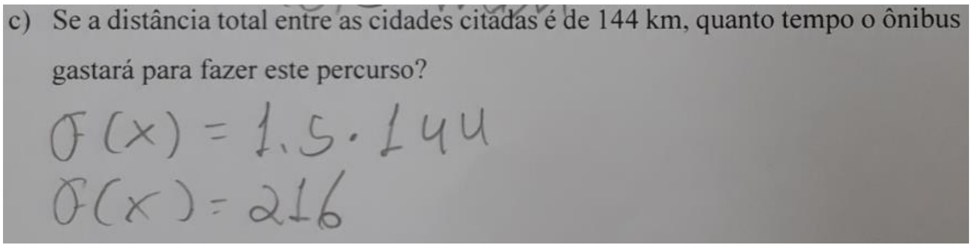
$96 = x$

ou 1 hora e 36 min

Fonte: própria autora.

Uma das 04 resoluções erradas é a mostrada na figura 12:

Figura 12 - Resposta apresentada por um aluno para o item (c) da Atividade 1.


c) Se a distância total entre as cidades citadas é de 144 km, quanto tempo o ônibus gastará para fazer este percurso?

$f(x) = 1.5 \cdot 144$

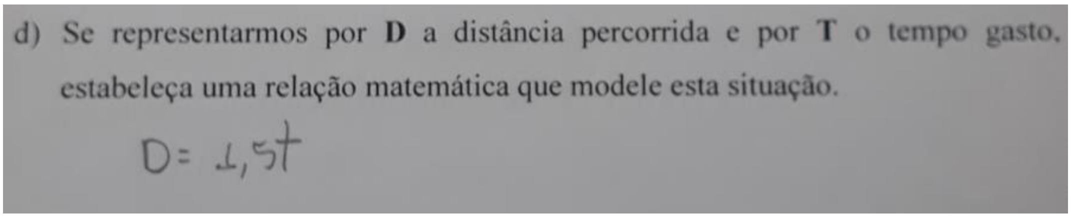
$f(x) = 216$

Fonte: própria autora.

Apesar do resultado não ser o esperado, vemos que o aluno consegue estabelecer uma relação algébrica para a situação, ou seja, ele compreende que existe outra forma de registro para essa situação, mas não consegue fazer a conversão corretamente, o que o faz incorrer no erro é a substituição dos valores das variáveis dependente e independente.

Dando continuidade à atividade, no item **(d)** questionamos os alunos sobre como expressar essa mesma situação utilizando uma fórmula algébrica. 24 alunos responderam corretamente à questão, 03 a deixaram em branco e 03 responderam de forma errada, trocando a variável dependente pela independente. Nas figuras 13 e 14, respectivamente, temos uma das resoluções corretas e uma das erradas apresentadas pelos alunos:

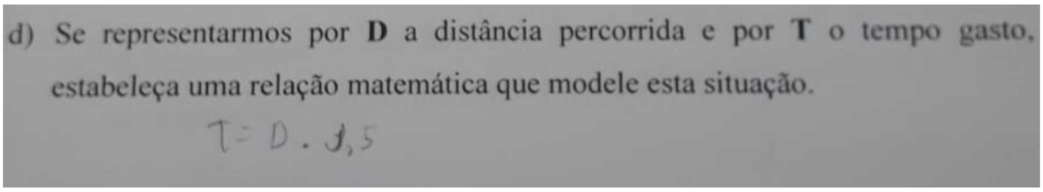
Figura 13 - Resposta apresentada por um aluno para o item (d) da Atividade 1.


d) Se representarmos por **D** a distância percorrida e por **T** o tempo gasto, estabeleça uma relação matemática que modele esta situação.

$D = 1{,}5t$

Fonte: própria autora.

Figura 14 - Resposta apresentada por um aluno para o item (d) da Atividade 1.


d) Se representarmos por **D** a distância percorrida e por **T** o tempo gasto, estabeleça uma relação matemática que modele esta situação.

$T = D \cdot 1{,}5$

Fonte: própria autora.

Em termos didáticos, podemos afirmar que os alunos que erraram essa questão não conseguem estabelecer a conversão entre o registro da língua materna e o registro algébrico, pois possuem dificuldade para identificar as variáveis dependente e independente em uma situação problema. Ao questionarmos esses alunos sobre como poderíamos utilizar a relação matemática representada por eles, apenas um, dos três alunos que erraram a questão, percebeu que, ao substituir os valores de D e T, os dados não seriam os mesmos encontrados na tabela anterior. Os outros dois alunos não se mostraram muito preocupados com o resultado que haviam encontrado.

Os alunos que deixaram a questão em branco alegaram não ter compreendido o que realmente deveriam fazer, embora a pesquisadora tenha explicado mais de uma vez, e de maneiras diferentes. Apenas no momento da socialização das respostas é que eles disseram ter entendido a questão.

Ao solicitarmos que os alunos representassem, por meio de um gráfico, a situação descrita no problema, utilizando o *software* GeoGebra, tarefa exigida no item **(e)**, 05 alunos tiveram dificuldades em fazer essa conversão para o registro gráfico.

Diante disso, e, por acreditarmos que a conversão entre as diversas formas de representação semiótica de uma função afim não acontece de forma tão natural para os alunos, houve a necessidade de fazermos algumas intervenções na tentativa de deixar claro esse processo, partindo do registro algébrico para o registro gráfico com auxílio do *software* GeoGebra. O que dificultou essa atividade foi que os alunos não conseguiram converter a situação apresentada em linguagem natural para o registro algébrico, como analisamos anteriormente. Somente depois de fazermos questionamentos do tipo: quais são as informações que influenciam esta situação? Existe alguma relação de dependência entre elas? Qual é esta relação? É que esses alunos perceberam que, a cada variação de 1 minuto, a distância percorrida varia em 1,5 km, e que esse valor é constante no problema.

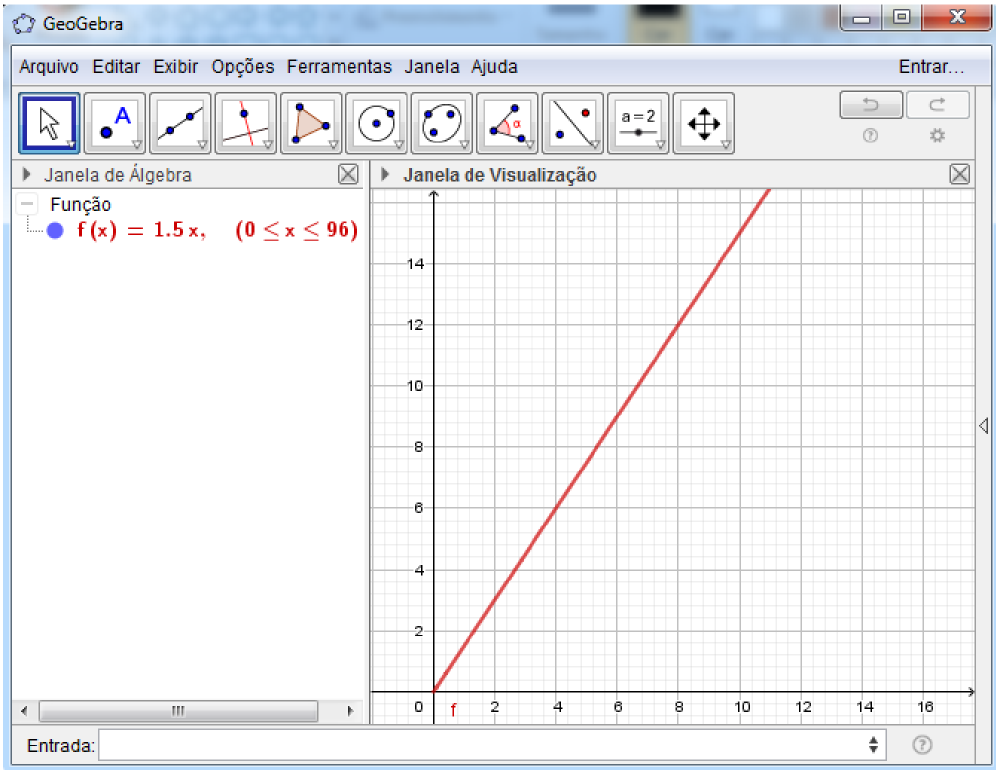
A socialização da questão com os colegas foi muito importante para que percebessem que, conforme o tempo aumenta, a distância também aumenta, proporcionalmente, e isso faz com que ela seja dependente do tempo, ou seja, ao fazermos a conversão para a forma algébrica, o tempo é a variável x e a distância é a variável y e, como a constante de proporcionalidade é 1,5, temos $y=1,5x$ como sendo outro tipo de registro que representa o mesmo problema.

Como última tarefa dessa atividade, no item **(f)**, pedimos aos alunos que verificassem se todos os pares ordenados definidos na tabela organizada por eles estavam contidos no gráfico apresentado no programa. Todos fizeram essa conferência e perceberam que o gráfico forma uma reta que passa por todos os pontos anteriormente encontrados. Essa análise permitiu a visualização dos dados fornecidos na tabela convertidos em pares ordenados, ou seja, outra forma de representar a situação.

Mesmo com as dificuldades relatadas, houve grande aceitação do uso do *software* pelo grupo de alunos, no que se refere à sua contribuição na aprendizagem matemática. Ao serem questionados se o uso do *software* contribuiu de forma significativa no desenvolvimento da atividade, todos os alunos disseram que sim, tendo em vista a rapidez com que o gráfico foi formado, o que otimizou o tempo de execução da tarefa e também destacaram a precisão dos dados mostrados na tela do computador.

Apresentamos, a seguir, o gráfico construído no programa GeoGebra, correspondente à situação descrita no problema da atividade 1:

Figura 15 - Registro gráfico da função *f(x) = 1,5x* no GeoGebra.



Fonte: Tela do Geogebra, criada pela autora.

4.2 Engenharia didática para a atividade 2

No encontro no qual desenvolvemos essa atividade, tivemos a participação de todos os 32 alunos da turma e, como dissemos, havíamos organizado os alunos em duplas por acreditarmos que o compartilhamento de experiências poderia favorecer suas aprendizagens. No entanto, a partir deste segundo encontro não foi possível a utilização dessa dinâmica, tendo em vista o aumento de conversas paralelas entre os alunos. Com a separação das duplas, o trabalho foi individualizado e fluiu normalmente conforme o planejado.

Como tentamos organizar essa atividade, levando em consideração a necessidade da proposição de situações em que apresentassem os dados em registros diversos ao da língua natural, utilizamos, nesse caso, uma tabela como registro de saída e esperávamos poder verificar se os alunos compreenderiam esses dados, se conseguiriam fazer as conversões entre os registros de tabela, língua natural, algébrico e gráfico e se a utilização do programa GeoGebra contribuiria para a aprendizagem nesse tipo de atividade.

Assim como na atividade 1, uma das estratégias possíveis de resolução seria utilizar a constante de proporcionalidade para encontrar os valores que completam a tabela. Dessa forma, se houver compreensão do que representa esse valor na situação descrita, o aluno terá compreendido que a distância percorrida é função da quantidade de combustível gasto e a possibilidade de realizar uma conversão entre diferentes tipos de registro, de forma correta, será consideravelmente ampliada.

De antemão, pudemos prever duas possíveis situações que poderiam ser encontradas durante a resolução dessa questão, então tratamos de antecipar, também, quais procedimentos deveriam ser adotados diante da ocorrência:

1ª situação: caso o aluno não consiga completar a tabela ou a complete parcialmente, deve ser verificado o motivo de tal impedimento/desistência, (se ele não compreendeu a situação, se compreendeu, mas não conseguiu estabelecer uma constante de proporcionalidade, se as grandezas envolvidas na situação são conhecidas pelo aluno, se consegue associá-las, ou algum outro motivo que o impeça).

É importante que o tratamento dado a essa questão leve à compreensão de que estamos criando uma função. O aluno deve conseguir interpretar as generalizações ao fazer o processo de tratamento.

2ª situação: caso o aluno complete a tabela corretamente, isso não implica dizer que ele compreendeu que está trabalhando com um modelo de função, para isso, pode ser necessário que se identifique quais são os elementos constantes e quais são os variáveis. Esperamos que o aluno reconheça que o valor de 9 km/ℓ é constante no problema e que isso significa que a cada 9 km percorridos, gasta-se 1 ℓ de combustível.

Ainda nesse sentido, consideramos pertinente levar o aluno a fazer conjecturas em torno do conceito de função e estabelecer, a partir de seu entendimento, uma relação de proporcionalidade entre as grandezas: distância percorrida e combustível gasto. Esta modelagem é o registro algébrico da situação e deve ser descrita por $\boldsymbol{D} = 9.\boldsymbol{x}$.

Também avaliamos a importância da verificação de que todos os alunos seguiram os passos corretos nas construções da tabela e do gráfico no *software* geogebra e, principalmente, se houve a compreensão de que o gráfico expressa as mesmas informações contidas na tabela e na expressão algébrica.

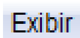
A seguir, trazemos os questionamentos feitos na ATIVIDADE 2:

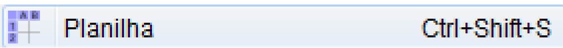
2º) Agora, supondo que o consumo de combustível desse ônibus seja conforme os dados apresentados na tabela.

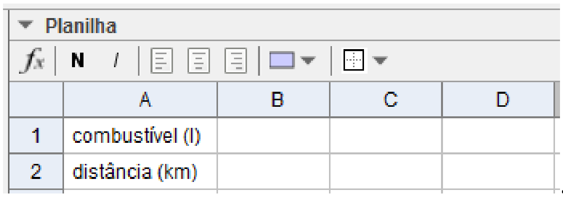
Combustível gasto (ℓ)	0,5	2	3		15	18	
Distância percorrida (km)	4,5	18		90			225

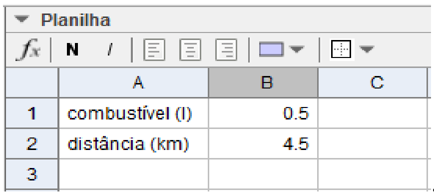
Complete o restante da tabela e responda:

a) Existe uma constante de proporcionalidade nessa situação? Qual é esse valor e o que ele representa nesse contexto?

b) Organize esta tabela no *software* Geogebra Classic 5, clicando no botão 

e escolhendo a opção 

. Para incluir os dados, você deve escrever as grandezas que são trabalhadas na situação: 

. Em seguida, deve incluir um dos valores de cada coluna e, na outra linha da mesma coluna, dar o comando necessário para que apareça o valor correspondente, por exemplo: na linha 1 da coluna B, digitamos "**0.5**" e na linha 2 da mesma coluna, digitamos "**=B1*9**". Com esse comando irá aparecer o resultado de "**4.5**" no campo B2, conforme imagem a seguir: 

. Agora, verifique se todos os resultados encontrados estão de acordo com o que você tinha previsto.

c) Considerando a distância de 144 km, aproximadamente quantos litros de combustível esse ônibus gasta para fazer esse percurso?

d) Se representarmos por **D** a distância percorrida e por **X** o total de combustível gasto, estabeleça uma relação matemática que modele essa situação.

e) Represente essa situação graficamente utilizando o *software* geogebra.

Para apresentarmos os dados obtidos com a aplicação dessa atividade, utilizaremos o mesmo quadro de categorias da atividade 1, conforme vemos, a seguir:

Quadro 3 - Distribuição dos resultados das categorias obtidas na Atividade 2

Resultados obtidos a partir da análise da experimentação da ATIVIDADE 2					
Categorias	**Itens da atividade 2**				
	(a)	**(b)**	**(c)**	**(d)**	**(e)**
Acertos totais	22	32	27	28	32
Acertos parciais	07	0	0	0	0
Em branco	03	0	05	03	0
Erradas	0	0	0	01	0

Como era esperado, para que os alunos pudessem fazer as conversões desejadas, era necessário que houvesse a compreensão das informações apresentadas na tabela. Já no item **(a)**, esperávamos que os alunos reconhecessem que o valor de 9 km/ℓ é constante no problema e que isso significa que a cada 9 km percorridos, gasta-se 1ℓ de combustível. Tivemos 22 respostas que mostraram esse entendimento, pois os alunos completaram corretamente a tabela, além de identificarem a constante de proporcionalidade existente, inclusive explicando, por escrito, quais eram seus entendimentos sobre esse valor. Por outro lado, tivemos 07 alunos que apenas completaram a tabela, mas não expressaram por escrito a compreensão sobre o valor e significado da constante de proporcionalidade. Como havíamos previsto isso, sabíamos que o procedimento a ser tomado seria o de questionar os alunos sobre o porquê de suas respostas para tentarmos fazer as intervenções necessárias e assim o fizemos. Descobrimos que 02 desses alunos não compreenderam a situação e que preencheram suas tabelas porque olharam as respostas de outro colega, enquanto os outros 05 disseram ter compreendido apenas a parte da tabela, no entanto, não conseguiram perceber algum valor que seja constante no problema.

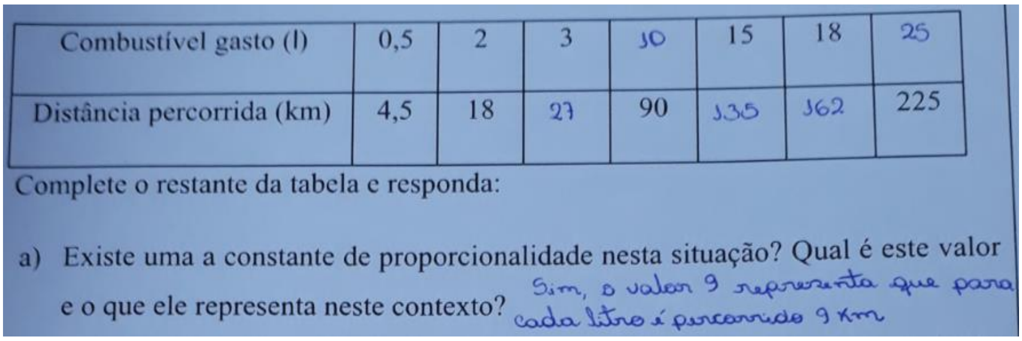
Diante disso, foi necessário intervirmos com o seguinte questionamento: como você chegou a cada um dos valores que completaram a tabela? Um dos alunos respondeu que, se com 2 litros de combustível dava para percorrer 18 km, era porque com 1 litro percorria-se 9 km, logo, com 3 litros, a distância percorrida seria de 27 km.

Nesse momento, enfatizamos que no problema, a constante de proporcionalidade é justamente o valor que relaciona a distância percorrida a cada 1 litro de combustível gasto e, como temos 9 km por litro de combustível, essa é nossa constante de proporcionalidade.

Tivemos também três alunos que se recusaram a responder à questão, apesar de todos afirmarem ter tido compreensão da situação proposta.

A seguir, apresentamos uma das produções feitas pelos alunos para o item **(a),** na qual o processo de conversão se mostra totalmente correto:

Figura 16 - Resposta apresentada por um aluno para o item (a) da Atividade 2.



Combustível gasto (l)	0,5	2	3	10	15	18	25
Distância percorrida (km)	4,5	18	27	90	135	162	225

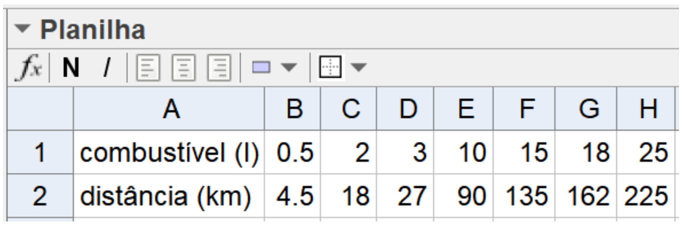
Complete o restante da tabela e responda:

a) Existe uma a constante de proporcionalidade nesta situação? Qual é este valor e o que ele representa neste contexto? Sim, o valor 9 representa que para cada litro é percorrido 9 Km

Fonte: própria autora.

Após a discussão do item **(a)**, a tarefa proposta aos alunos no item **(b)** foi que construíssem a mesma tabela apresentada no problema, mas, agora, usando o *software* GeoGebra. Para essa questão, não obtivemos erros nem falta de interesse dos alunos, todos quiseram participar da atividade. Temos a construção desta planilha na figura 17, a seguir, conforme instruções dadas na própria questão:

Figura 17 - Planilha construída sob orientações dadas no item (b) da Atividade 2.



Planilha

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	combustível (l)	0.5	2	3	10	15	18	25
2	distância (km)	4.5	18	27	90	135	162	225

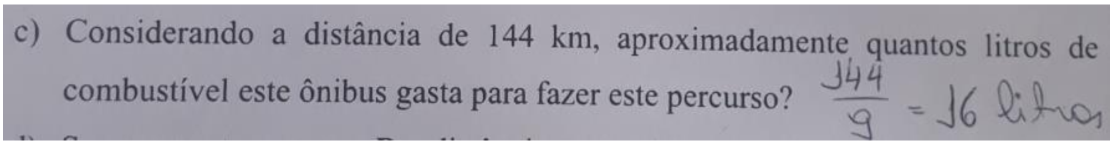
Fonte: própria autora.

A aplicação dessa atividade reforçou a ideia de que os alunos se interessam mais pelo ensino da matemática, quando há possibilidade de uso de programas educativos.

Também percebemos que o grau de dificuldade em completar a tabela com a utilização do *software* foi bem menor do que quando a construíram manualmente. Outro fator positivo, em relação a essa utilização, é a confiabilidade das respostas obtidas, ou seja, o tratamento que é efetuado no *software* possui uma margem de erro bem menor do que o tratamento dado aos registros feitos à mão.

Quanto ao item **(c)**, não tivemos nenhuma resposta errada, apenas acertos e desistências. 05 alunos deixaram a questão em branco e os outros 27 efetuaram o tratamento de forma correta, mostrando ter compreensão sobre o significado dos registros apresentados. A seguir, trazemos uma dessas resoluções apresentadas pelos alunos.

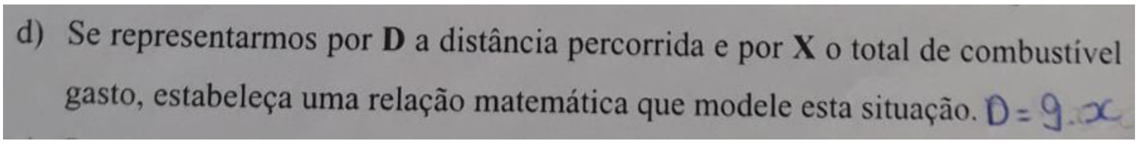
Figura 18 - Resposta apresentada por um aluno para o item (c) da Atividade 2.


c) Considerando a distância de 144 km, aproximadamente quantos litros de combustível este ônibus gasta para fazer este percurso? $\frac{144}{9} = 16$ litros

Fonte: própria autora.

Já no item **(d)**, tivemos um total de 28 respostas, as quais mostram que os alunos conseguiram fazer corretamente a conversão do registro de tabela para o registro algébrico, ou seja, conseguiram expressar, por meio de uma sentença matemática, a relação de proporcionalidade existente entre as grandezas distância percorrida e tempo gasto, conforme mostrado na figura 19:

Figura 19 - Resposta apresentada por um aluno para o item (d) da Atividade 2.

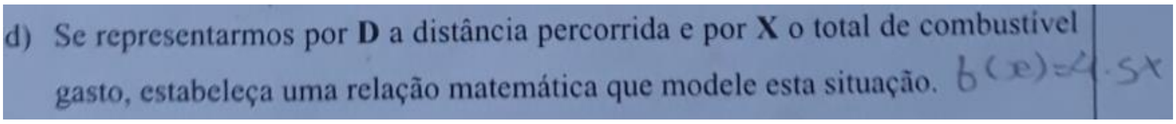

d) Se representarmos por **D** a distância percorrida e por **X** o total de combustível gasto, estabeleça uma relação matemática que modele esta situação. $D = 9 . x$

Fonte: própria autora.

Por outro lado, ainda persistiu a falta de entusiasmo por parte de 03 alunos em relação ao registro escrito da questão. Eles alegaram ter compreensão do que deveriam fazer, mas se negaram a registrar suas respostas.

Quanto às respostas erradas, tivemos apenas 01 resolução que apresenta discordância do que esperávamos. Ao relacionar as grandezas envolvidas no problema, o aluno usou o valor 4,5 para multiplicar a quantidade de combustível gasto, não observando que esse valor está relacionado a 0,5 litro de combustível. Esse fato mostra que o aluno não compreendeu de que forma a constante de proporcionalidade interfere no problema, pois, ele havia afirmado ter entendido que o valor de 9 km/ℓ é constante em todo o decorrer da situação descrita. O que ocorreu é que ele não soube fazer a conversão desejada, como podemos verificar na figura 20, a seguir:

Figura 20 - Resposta apresentada por um aluno para o item (d) da Atividade 2.


d) Se representarmos por **D** a distância percorrida e por **X** o total de combustível gasto, estabeleça uma relação matemática que modele esta situação. b(x)=4.5x

Fonte: própria autora.

No item **(e)**, solicitamos que os alunos representassem, por meio de um gráfico, a situação descrita no problema, utilizando, para isso, o *software* GeoGebra. Não obtivemos respostas erradas nesse item e todos os alunos demonstraram interesse nesse processo de conversão.

No desenvolvimento dessa atividade, até mesmo os alunos que não haviam realizado a conversão do registro da tabela para o registro algébrico se mostraram animados quanto à sua resolução, reforçando nossa observação sobre o quanto o interesse dos alunos cresce diante da possibilidade do uso de *softwares* matemáticos.

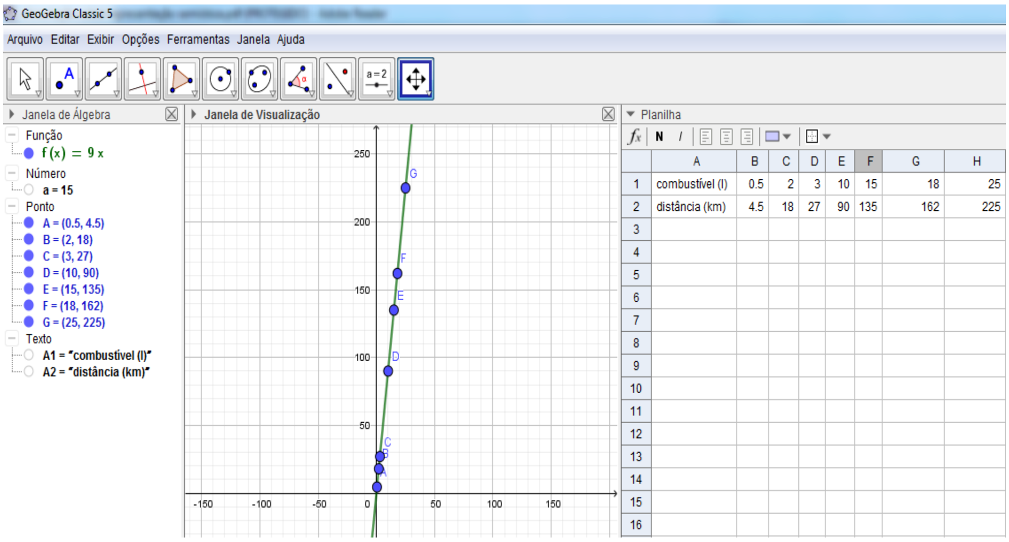
Quanto ao aluno que não conseguiu estabelecer o registro algébrico que representasse corretamente a situação, pedimos a ele para que seu trabalho fosse desenvolvido, a partir da sentença matemática que ele havia encontrado e, em seguida, o questionamos se a reta formada pelo gráfico passava pelos pontos encontrados na tabela. Como essa verificação não pode ocorrer, solicitamos, então, que fosse construído o gráfico da função $f(x)=9x$, e explicamos que devemos utilizar o número 9 ao invés de 4,5 porque a relação estabelecida entre as grandezas, envolvidas no problema, era de que gastava-se uma unidade de litro de combustível para percorrer 9 km.

Acreditamos que o resultado obtido com essa atividade corrobora de maneira satisfatória com o objetivo da pesquisa, tendo em vista que essa análise nos permitiu observar como o interesse dos alunos aumenta à medida que introduzimos a utilização do *software* GeoGebra na aula.

Os resultados encontrados nessa atividade estão em conformidade com as afirmações de Gravina (1996, 2015) e Fontoura (2016), que nos alertam para o fato de que representações matemáticas de forma estática não possuem mais o destaque que tinham, no que se refere à conquista da atenção dos alunos, uma vez que vivemos em um mundo envolto de transformações, informações e tecnologias digitais.

A seguir, apresentamos a figura 21 na qual há o registro gráfico e a tabela construídos com o *software* GeoGebra para representar a função afim descrita na situação:

Figura 21 - Registros gráfico e tabular da função *f(x)* = 9*x* no GeoGebra.



Fonte: própria autora.

4.3 Engenharia didática para a atividade 3

Como as duas atividades anteriores, embora apresentassem situações diversas, mostravam o comportamento de uma função afim do tipo crescente, consideramos importante a inclusão de situações que apresentem ideias de decrescimento. Por isso, nosso objetivo nesta atividade é fazer a análise e reflexão de uma situação de caráter congruente que não é representada por uma função crescente, para isso, adaptamos um problema apresentado em Iezzi, 2013, p. 71, conforme vemos, a seguir:

3º) Fábio está se preparando para uma competição de judô que irá participar dentro de 1 mês, mas ele está acima do "peso" permitido para sua categoria, por isso submeteu-se a um treinamento específico para diminuição de gordura, na qual se garante perda de 320 gramas por dia. Suponha que isso realmente ocorra e que Fábio esteja pesando 95 kg no início do treinamento.

a) Determine o “peso” de Fábio decorrido uma semana de treinamento.
b) Essa situação apresenta ideia de função? Justifique.
c) De que forma podemos relacionar as informações apresentadas utilizando a linguagem algébrica?
d) Utilizando o *software* GeoGebra, apresente essa situação por meio de um gráfico.
e) Caso Fábio siga rigorosamente esse treinamento, será possível diminuir seu peso para 86 kg no tempo de um mês?

Em uma análise a priori da situação, consideramos que, após a compreensão do problema apresentado em língua natural, o aluno deveria ser levado a converter as informações para o registro numérico, pois acreditávamos que, dessa forma, o tratamento dado a esse registro seria melhor compreendido, podendo, ainda, facilitar a conversão para o registro algébrico.

Caso os alunos ainda não compreendam que a situação apresentada se trata de um caso de função afim, do tipo decrescente, deve ser proporcionado um momento para tal reflexão. É importante que percebam que, quanto **menor** for o “peso” pretendido pelo atleta, **maior** será a quantidade de dias necessários.

A construção gráfica no programa geogebra também é um momento valioso para a discussão do que representam os coeficientes angular e linear na função, além de poder relembrar os conhecimentos explorados nas atividades anteriores. Para facilitar essa compreensão, devem ser construídos controles deslizantes numa função genérica $f(x) = ax + b$ e explorar esses comandos de forma a deixar o assunto claro.

A partir dessas considerações, a aplicação dessa atividade seguiu sem grandes dificuldades. Sua resolução se deu de forma individual, assim como as posteriores, e contou com a participação de 27 alunos. Os alunos já se mostraram familiarizados com o *software* e com a dinâmica do trabalho. Assim, após a leitura da atividade pela pesquisadora, eles já deram início às suas resoluções e as dúvidas, em relação ao programa, foram diminuindo cada vez mais.

Para apresentarmos os dados referentes à análise das respostas dos alunos, utilizaremos o mesmo quadro de categorias das atividades anteriores, conforme vemos, a seguir:

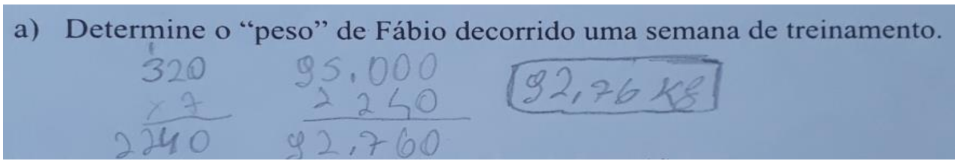
Quadro 4 - Distribuição dos resultados das categorias obtidas na Atividade 3

Resultados obtidos a partir da análise da experimentação da ATIVIDADE 3					
	Itens da atividade 3				
Categorias	**(a)**	**(b)**	**(c)**	**(d)**	**(e)**
Acertos totais	21	18	16	27	27
Acertos parciais	06	07	04	0	0
Em branco	0	02	01	0	0
Erradas	0	0	06	0	0

Na análise do item **(a)**, percebemos que, dos 27 alunos participantes da atividade, 21 deles conseguiram interpretar e responder à questão corretamente e 06 alunos apenas calcularam a quantia de peso perdido em uma semana e deram esse valor como resposta, não levando em consideração que o que estava sendo solicitado era o peso do atleta, depois de passar pelo treinamento. Esse tipo de resposta foi categorizado como parcialmente correta, tendo em vista que o tratamento efetuado está incompleto, ou seja, houve compreensão de que o total de gramas perdidos por dia deveria ser multiplicado por 7 (correspondente a uma semana), mas faltou observarem que esse resultado não responde totalmente à questão, já que não fornece o peso do atleta ao final do treinamento, mas, sim, o quanto ele emagreceu.

Nas figuras 22 e 23, a seguir, temos, respectivamente, uma das resoluções consideradas corretas, isto é, a conversão para o registro numérico está de acordo com o que esperávamos e o tratamento efetuado nesse registro permite a compreensão do resultado encontrado e uma das resoluções consideradas parcialmente corretas, que foi o caso em que a transformação ocorrida dentro do registro numérico não responde totalmente à questão:

Figura 22 - Resposta apresentada por um aluno para o item (a) da Atividade 3.


a) Determine o "peso" de Fábio decorrido uma semana de treinamento.

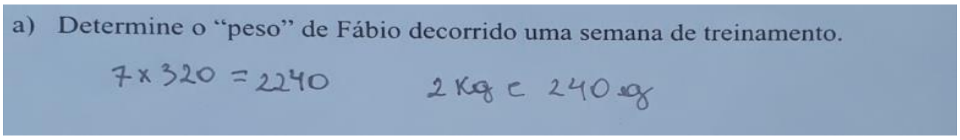
320 × 7 = 2240

95,000 − 2 240 = 92,760

92,76 kg

Fonte: própria autora.

Figura 23 - Resposta apresentada por um aluno para o item (a) da Atividade 3.


a) Determine o "peso" de Fábio decorrido uma semana de treinamento.

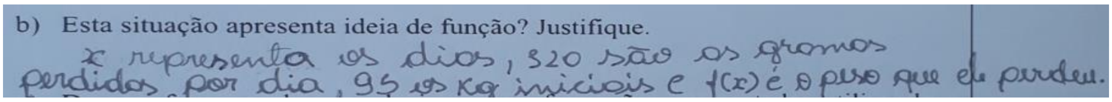
7 x 320 = 2240

2 Kg e 240 g

Fonte: própria autora.

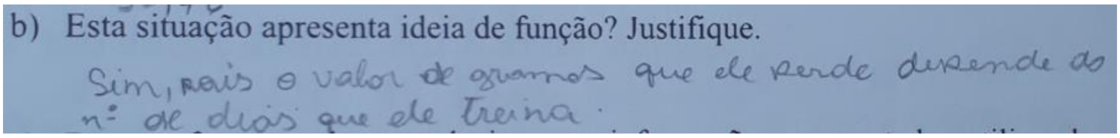
Já no item **(b)**, tivemos um total de 18 alunos que apresentaram respostas coerentes com a pergunta realizada e, analisando essas respostas, pudemos perceber como é diversificada a forma como os alunos conseguem explicar o conceito de função. Trazemos algumas dessas resoluções nas figuras, a seguir:

Figura 24 - Resposta apresentada por um aluno para o item (b) da Atividade 3.


b) Esta situação apresenta ideia de função? Justifique.
x representa os dias, 320 são os gramos perdidos por dia, 95 os Kg iniciais e f(x) é o peso que ele perdeu.

Fonte: própria autora.

Figura 25 - Resposta apresentada por um aluno para o item (b) da Atividade 3.

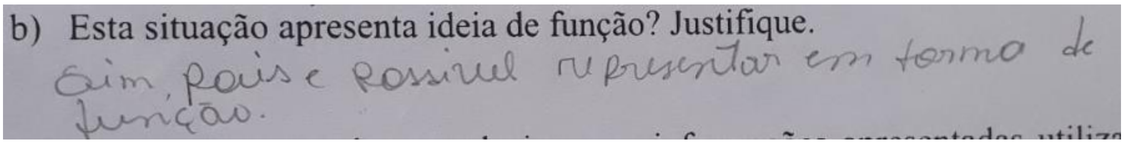

b) Esta situação apresenta ideia de função? Justifique.
Sim, pois o valor de gramos que ele perde depende do nº de dias que ele treina.

Fonte: própria autora.

Na figura 24, por exemplo, vemos que a compreensão do conceito de função está muito atrelada à representação na forma algébrica, enquanto que, na resolução apresentada na figura 25 podemos observar que a noção de dependência entre as grandezas "peso" e "tempo" é utilizada para explicar a univocidade dos pares ordenados obtidos nessa relação.

Além de 02 respostas em branco, tivemos, ainda, 07 respostas que se apresentaram parcialmente corretas, pois não ficou bem esclarecida a justificativa usada pelo aluno para sua afirmação de que a situação apresenta, sim, ideia de função. Podemos verificar isso na figura 26, a seguir:

Figura 26 - Resposta apresentada por um aluno para o item (b) da Atividade 3.


b) Esta situação apresenta ideia de função? Justifique.
Sim, pois é possivel representar em forma de função.

Fonte: própria autora.

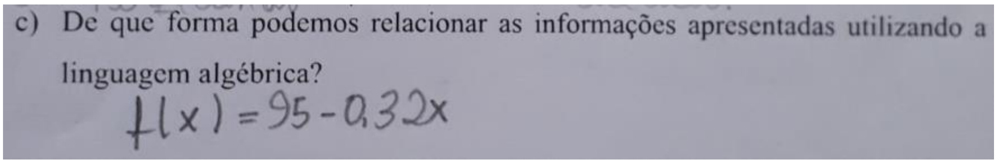
O que nos chamou a atenção nesse item foi descobrir a importância de saber como os alunos criam suas próprias explicações sobre os objetos matemáticos, a partir de perspectivas diferentes. Vimos que, por mais que o discurso do professor seja o mesmo para todos, cada um deles tem uma forma individual de internalizar o conhecimento, ainda mais se tratando de conceitos abstratos. Também percebemos que reflexões como essa podem ser oportunas para o favorecimento da organização das informações, ou seja, pode ser um momento para o aluno buscar sentido para aquele conhecimento, se tornando, assim, uma fase de descobertas.

Ao analisarmos o item **(c)**, verificamos que 16 alunos conseguiram realizar a conversão entre a linguagem natural e o registro algébrico de forma correta, no entanto, observamos que a dificuldade de alguns alunos foi o fato de a função ser decrescente, ou seja, conforme o tempo aumenta, o peso do atleta vai diminuindo na mesma proporção.

Assim, quando convertemos essa situação para a linguagem algébrica, é necessário subtrair do peso inicial do atleta todo o peso perdido naquele intervalo de tempo, o que, para alguns, gerou confusão e erro no tratamento dado ao registro numérico, pois, como o peso do atleta estava em quilogramas e o peso perdido estava em gramas, eles não atentaram para o fato de que, nesse tipo de registro, é necessário que cada grandeza envolvida no problema seja apresentada sempre com a mesma unidade de medida. Essa inobservância gerou 04 respostas que consideramos parcialmente corretas, já que demonstraram compreensão sobre o aspecto de decrescimento da função, no entanto, não fizeram a correta transformação interna ao registro, que seria a mudança da quantidade de gramas para quilogramas perdidos, fazendo com que o registro algébrico encontrado não representasse a situação descrita.

Nas figuras 27 e 28, respectivamente, temos uma das resoluções que consideramos de acordo com o que esperávamos e uma das respostas que consideramos parcialmente corretas:

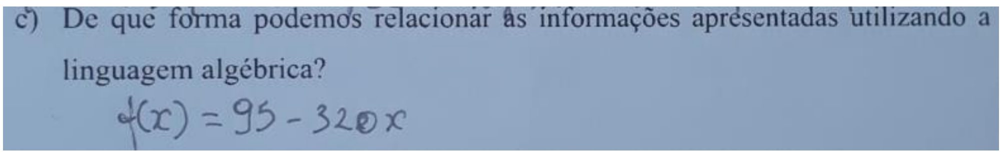
Figura 27 - Resposta apresentada por um aluno para o item (c) da Atividade 3.


c) De que forma podemos relacionar as informações apresentadas utilizando a linguagem algébrica?

$f(x) = 95 - 0{,}32x$

Fonte: própria autora.

Figura 28 - Resposta apresentada por um aluno para o item (c) da Atividade 3.


c) De que forma podemos relacionar as informações apresentadas utilizando a linguagem algébrica?

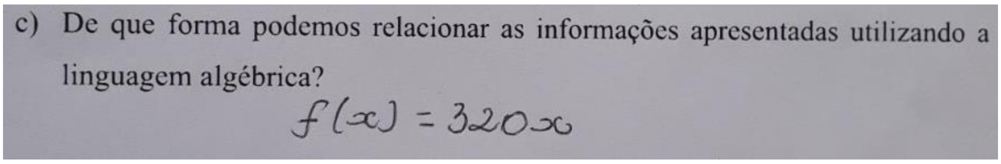
$f(x) = 95 - 320x$

Fonte: própria autora.

Nesse item, tivemos apenas um aluno que deixou de responder à questão e 06 que a apresentaram de forma errada. Nesse caso, o equívoco está no fato de os alunos não levarem em conta o peso do atleta no início do treinamento, o mesmo erro apresentado no item **(a)**.

Porém, agora, não podemos considerar esse tipo de resposta como sendo parcialmente correta, por conta de que essa conversão não se assemelha em nada à situação descrita no problema, conforme vemos na figura, a seguir:

Figura 29 - Resposta apresentada por um aluno para o item (c) da Atividade 3.


c) De que forma podemos relacionar as informações apresentadas utilizando a linguagem algébrica?

$f(x) = 320x$

Fonte: própria autora.

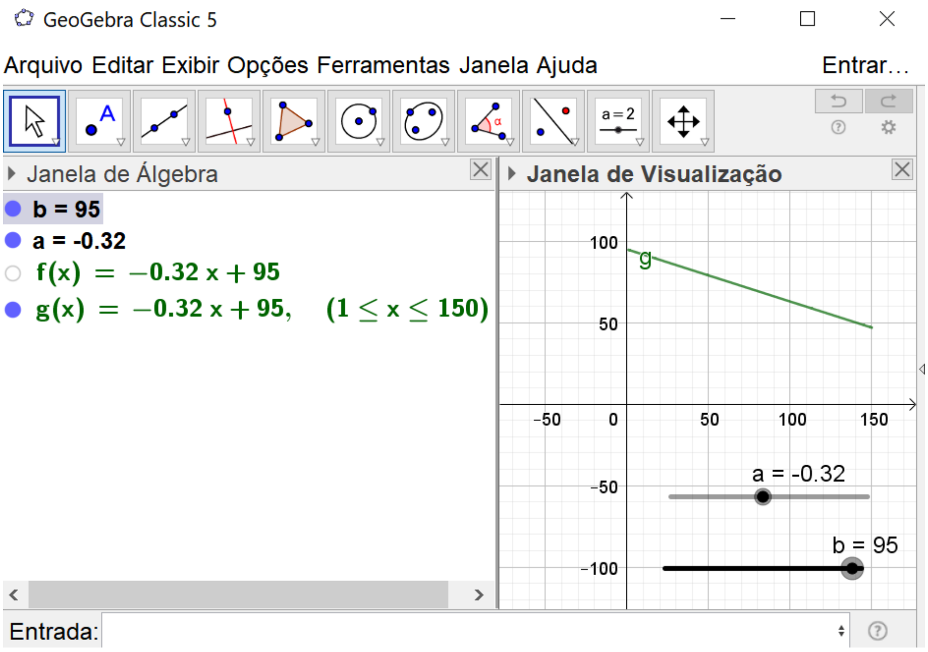
Quanto ao item (d), não tivemos problema com a falta de interesse em sua resolução, apenas foi necessário que conduzíssemos aqueles alunos que não haviam obtido o registro algébrico correto para que, a partir dele, dessem prosseguimento à atividade.

Foi interessante observar como a construção gráfica de uma função possibilita momentos de reflexão e até mesmo de descobertas. Aproveitamos essa atividade para questionar os alunos sobre as características dessa função. Fizemos perguntas do tipo: por que a reta está “virada para baixo”? Como denominamos as funções desse tipo? Faz sentido associarmos valores de *x* e de *y* no segundo quadrante na representação dessa situação? Por quê?

Consideramos, ainda, que a utilização do *software* GeoGebra, no processo de construção e análise gráfica, teve grande influência positiva, desde a rapidez e praticidade na construção gráfica, o que, por sinal, permitiu que tivéssemos um tempo maior para nos dedicarmos à análise desse gráfico, como, também, por conta da possibilidade de movimento da reta, por meio da criação de controles deslizantes, favorecendo a compreensão sobre como os valores dos coeficientes *a* e *b* interferem no gráfico de uma função afim.

Na figura, a seguir, apresentamos um *print screen* da tela do *software* GeoGebra com o gráfico formado para representar a situação descrita no problema, inclusive com a criação de controles deslizantes que utilizamos como ferramenta de apoio.

Figura 30 - registro gráfico da função *f(x) = -0,32x + 95* no GeoGebra com utilização do controle deslizante.

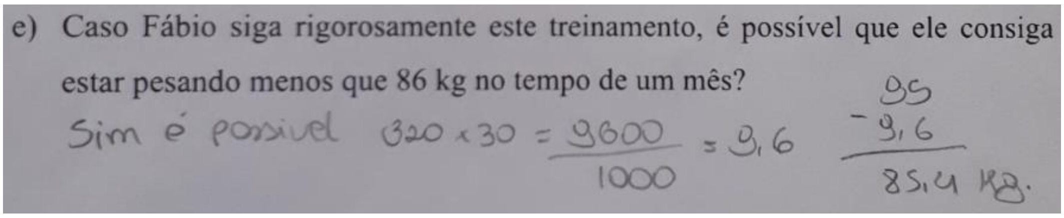


Fonte: própria autora.

A resolução do item (e) se mostrou bem mais tranquila, com unanimidade de acertos. Muitos alunos, inclusive, se apoiaram na construção gráfica para respaldarem suas respostas, apontando mais uma entre as diversas vantagens que a utilização do programa GeoGebra trouxe para o desenvolvimento dessa atividade.

A figura, a seguir, mostra uma dessas resoluções:

Figura 31 - Resposta apresentada por um aluno para o item (e) da Atividade 3.


e) Caso Fábio siga rigorosamente este treinamento, é possível que ele consiga estar pesando menos que 86 kg no tempo de um mês?

Sim é possivel $320 \times 30 = \frac{9600}{1000} = 9,6$ $\quad 95 - 9,6 = 85,4$ kg.

Fonte: própria autora.

4.4 Engenharia didática para a atividade 4

A seguir, apresentamos os questionamentos que foram realizados no desenvolvimento dessa atividade:

4º) Supondo que um certo capital seja aplicado a uma taxa de 1,5% ao mês no regime de juros simples e que apresente no primeiro mês um montante de R$ 203,00. Responda:

a) De acordo com essas informações, qual deve ter sido o valor aplicado?
b) Represente numa tabela o montante acumulado mês a mês, durante os seis primeiros meses.

Tempo decorrido (mês)	1	2	3	4	5	6
Montante (R$)	203					

c) Qual é a expressão matemática que relaciona o montante obtido em função do tempo de aplicação?
d) Utilizando o *software* geogebra, construa o gráfico dessa situação e o analise sob os seguintes aspectos:
   - ✓ Qual valor representa o coeficiente angular desta função? E, em que aspecto este valor interfere no gráfico formado?
   - ✓ Qual valor representa o coeficiente linear da função? De que forma este valor auxilia na construção de um gráfico?
   - ✓ Essa função é crescente ou decrescente? Por quê?
   - ✓ Qual é o seu domínio?

Essa questão se diferencia das questões anteriores pelo fato de não haver transparência entre as unidades significantes do registro de saída e o registro de chegada. Se compararmos esses registros, podemos observar que:

- ✓ Há uma mudança na ordem em que aparecem as informações entre o registro da língua natural e o registro algébrico;
- ✓ Os valores apresentados no registro de chegada não são os mesmos que aparecem no registro de saída;
- ✓ A situação não se mostra tão clara sobre quais procedimentos devem ser adotados.

Conforme apontam as pesquisas de Damm (2003), Mineiro (2016) e Duval (2009), temos aqui uma situação que envolve conversões não congruentes e que precisam fazer parte do cotidiano escolar do aluno.

Acreditamos que a análise e resolução de questões como essa, promove a aprendizagem matemática, ao mesmo tempo em que possibilita uma evolução no raciocínio lógico de quem as interpreta.

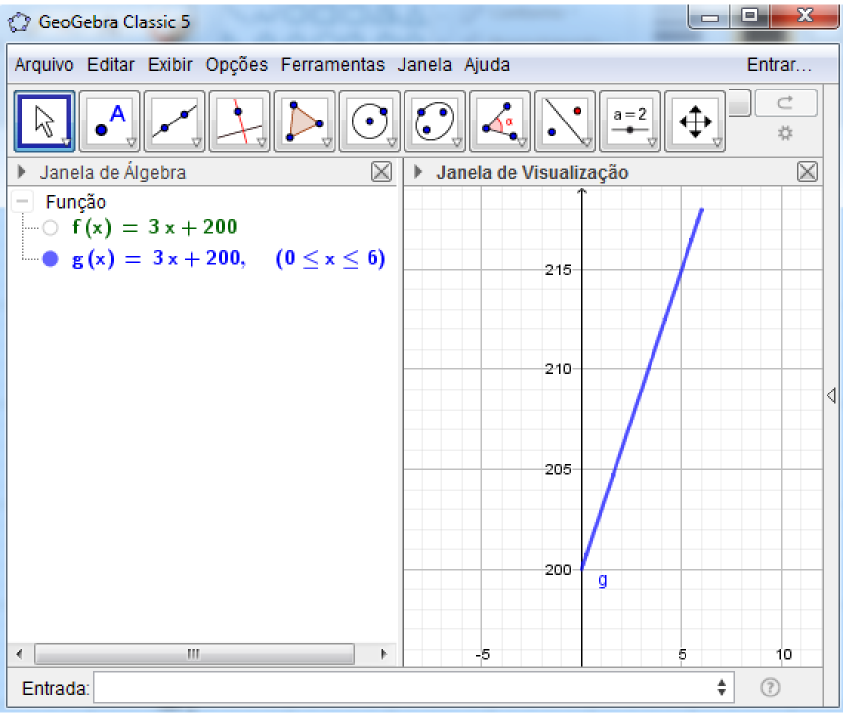
Também consideramos que, ao conseguirem formular um registro algébrico que represente a situação descrita, o aluno pode compreender as relações existentes entre os conceitos matemáticos envolvidos, apesar de ser totalmente compreensível o surgimento de dificuldade para isso, pois essas diferentes formas de representar um mesmo objeto matemático podem esbarrar em obstáculos epistemológicos existentes na construção de seu conhecimento matemático.

A construção gráfica com o uso do *software* GeoGebra deve ser um momento importante para a exploração de algumas características presentes no estudo da função afim, por isso, é extremamente importante fazermos os questionamentos a seguir:

- Qual valor representa o coeficiente angular desta função? E em que aspecto esse valor interfere no gráfico formado?
- Qual valor representa o coeficiente linear da função? De que forma esse valor auxilia na construção de um gráfico?
- Esta função é crescente ou decrescente? Por quê?
- Qual é o seu domínio?

Com objetivo de melhorar a compreensão dessas características, pode ser construído um controle deslizante na tela do geogebra, a fim de proporcionar a comparação entre a interferência dos coeficientes angular e linear dessas funções e mostrar como se comporta o gráfico de uma função, conforme esses valores são alterados. Também, nesse sentido, para reforçar a ideia de domínio da função, deve ser colocado de forma clara que, para representar graficamente a situação descrita, devemos considerar apenas o segmento de reta, formado no intervalo $0 \leq x \leq 6$, como mostra a figura, a seguir:

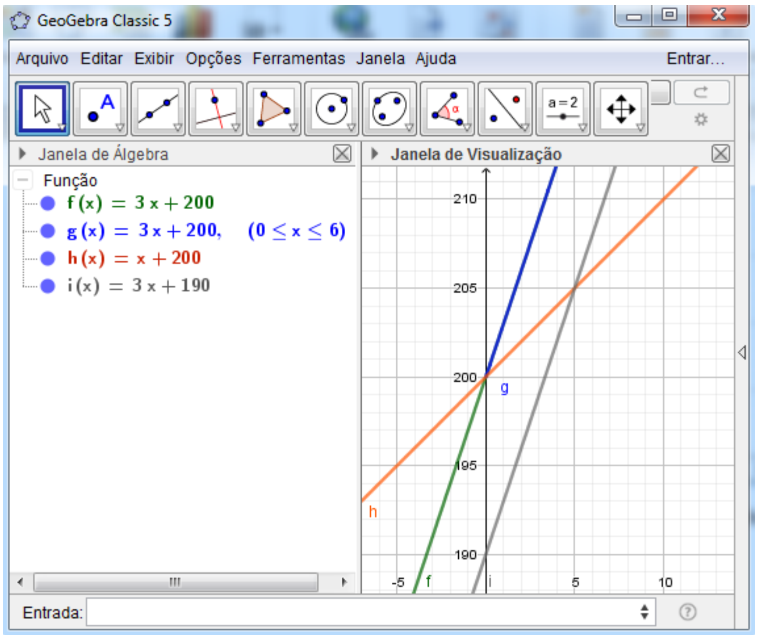
Figura 32 - registro algébrico e gráfico da função *f(x) = 3x + 200* no GeoGebra, no intervalo $0 \leq x \leq 6$.



Fonte: própria autora.

Também podemos explorar esses conhecimentos por meio da construção de gráficos de diferentes funções e destacar como se comporta cada uma delas, conforme seus coeficientes são alterados. Para exemplificarmos essa situação, trazemos algumas possíveis construções na figura, a seguir:

Figura 33 - Registro algébrico e gráfico de diferentes funções no GeoGebra.



Fonte: própria autora.

Tendo essas concepções como base, no quarto encontro que tivemos, o desenvolvimento da atividade foi realizado com os 28 alunos que participaram dessa aula. Desta vez, os alunos demonstraram certa dificuldade na compreensão da atividade proposta, devido à apresentação de ideias associadas à função afim, por meio de uma situação não congruente. No entanto, após uma breve explicação do que estava sendo solicitado, grande parte dos alunos conseguiu superar a dificuldade e resolveu o problema corretamente.

Utilizando o mesmo quadro de categorias das atividades anteriores, vamos organizar os resultados obtidos, conforme vemos abaixo:

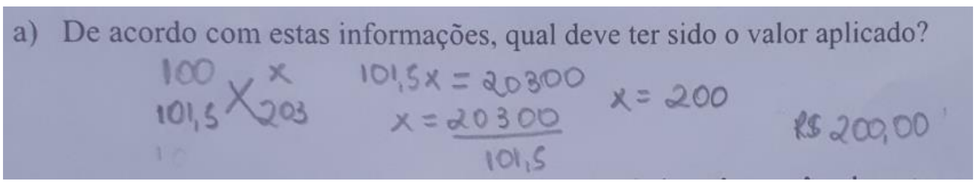
Quadro 5 - Distribuição dos resultados das categorias obtidas na Atividade 4

Resultados obtidos a partir da análise da experimentação da ATIVIDADE 4				
Categorias	**Itens da atividade 4**			
	(a)	**(b)**	**(c)**	**(d)**
Acertos totais	18	13	19	24
Acertos parciais	02	0	0	04
Em branco	0	0	0	0
Erradas	08	15	09	0

Já na análise das respostas do item **(a)**, percebemos o quanto esse tipo de questão confunde os alunos. A falta de habilidade com situações não congruentes faz com que os alunos tenham maior dificuldade em saber quais procedimentos adotar, tendo em vista que a situação não se mostra tão clara e as informações fornecidas não estão organizadas em uma mesma ordem quando pensamos em uma possível conversão.

Diante disso, nesse item tivemos o total de 18 respostas consideradas corretas, 02 respostas parcialmente corretas e 08 respostas que não se adéquam ao problema. Abaixo, trazemos uma das resoluções que se apresentaram como corretas:

Figura 34 - Resposta apresentada por um aluno para o item (a) da Atividade 4.

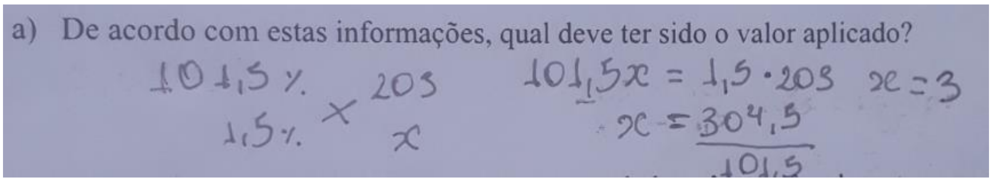


Fonte: própria autora.

Nessas resoluções vimos que, tanto o processo de conversão para o registro numérico, quanto o tratamento efetuado nesse registro se apresentam de forma correta.

Já as duas respostas que consideramos parcialmente corretas, mostraram que os alunos conseguiram estabelecer uma conversão entre os registros apresentados, porém, a transformação interna do registro numérico ficou incompleta. Em outras palavras, podemos dizer que houve compreensão de que os R$ 203,00 se tratavam de 101,5% do valor. No entanto, ao invés de buscarem, a partir dessa relação, o valor correspondente a 100%, eles equacionaram o problema e deram como resposta o valor equivalente a 1,5%, o que não responde por completo à questão, como podemos ver na figura abaixo:

Figura 35 - Resposta apresentada por um aluno para o item (a) da Atividade 4.


a) De acordo com estas informações, qual deve ter sido o valor aplicado?

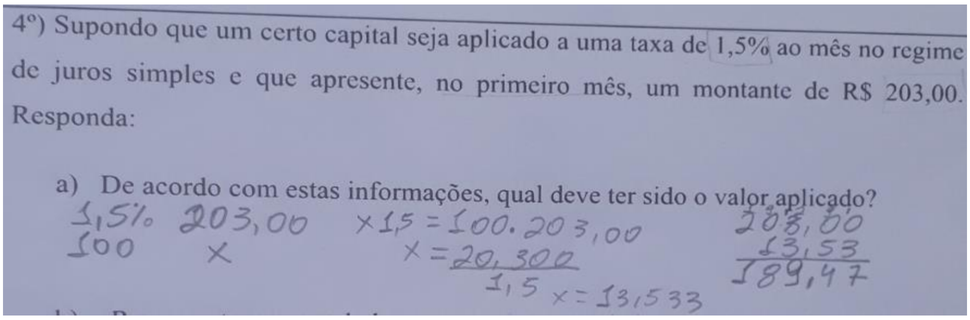
101,5% 203
1,5% x
101,5x = 1,5 · 203 x = 3
x = 304,5 / 101,5

Fonte: própria autora.

Consideramos como fatores que mais influenciaram na quantidade de erros dessa questão: a falta de transparência entre as unidades significantes do problema e a escassez de propostas de atividades não congruentes no cotidiano escolar dos alunos, pois, quando comparamos esse resultado com os resultados obtidos nas atividades anteriores, percebemos um aumento significante na quantidade de respostas erradas.

Chamou-nos à atenção, três das respostas que se apresentaram erradas, pois todas elas tentaram responder o problema organizando as informações na mesma ordem que elas apareciam no enunciado, ou seja, a não congruência da questão não foi observada, conforme vemos na figura, a seguir:

Figura 36 - Resposta apresentada por um aluno para o item (a) da Atividade 4.


4º) Supondo que um certo capital seja aplicado a uma taxa de 1,5% ao mês no regime de juros simples e que apresente, no primeiro mês, um montante de R$ 203,00. Responda:

a) De acordo com estas informações, qual deve ter sido o valor aplicado?

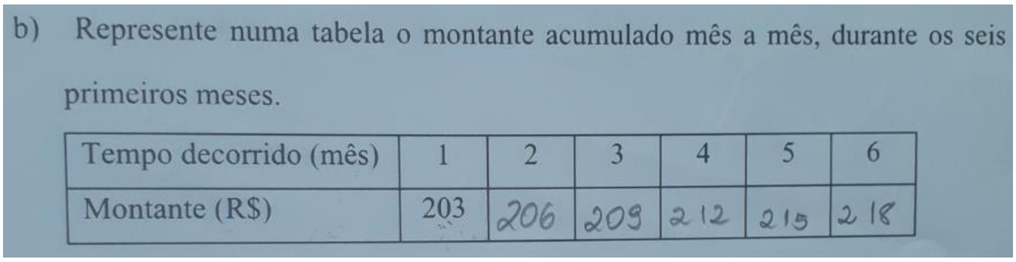
1,5% 203,00
100 x
x 1,5 = 100 . 203,00
x = 20.300 / 1,5
x = 13,533
203,00
13,53
189,47

Fonte: própria autora.

Ao analisarmos o item **(b)**, verificamos como a conversão da linguagem natural para a linguagem de tabela se tornou difícil para os alunos. Apenas 13 alunos apresentaram essa resposta corretamente e os outros 15 alunos não obtiveram êxito na questão. O equívoco cometido por todos os alunos que erraram foi o de considerar o valor de 203 reais como sendo o juro obtido mês a mês, o que implicou na construção de uma tabela que não reflete a situação descrita no enunciado da atividade.

Trazemos, nas figuras, a seguir, respectivamente, uma das respostas consideradas corretas e uma das respostas equivocadas para o item **(b)**:

Figura 37 - Resposta apresentada por um aluno para o item (b) da Atividade 4.

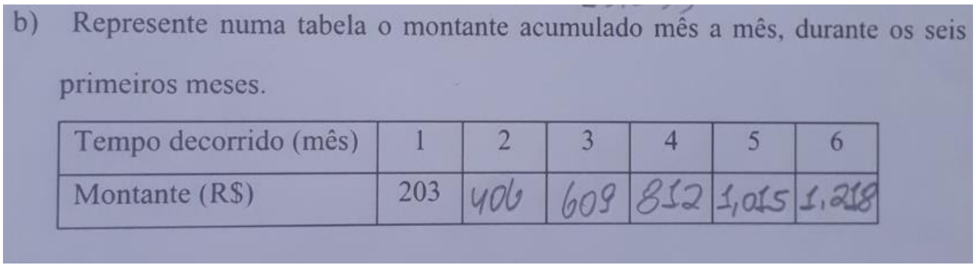


b) Represente numa tabela o montante acumulado mês a mês, durante os seis primeiros meses.

Tempo decorrido (mês)	1	2	3	4	5	6
Montante (R$)	203	206	209	212	215	218

Fonte: própria autora

Figura 38 - Resposta apresentada por um aluno para o item (b) da Atividade 4.



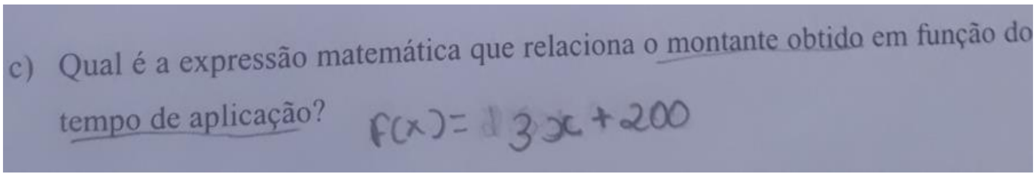
b) Represente numa tabela o montante acumulado mês a mês, durante os seis primeiros meses.

Tempo decorrido (mês)	1	2	3	4	5	6
Montante (R$)	203	406	609	812	1,015	1,218

Fonte: própria autora

Na análise do item **(c)**, percebemos como é importante desenvolver o ensino da função afim utilizando processos de conversões entre as diferentes representações. Nesse item, tivemos 19 respostas corretas e 09 respostas que não condizem com o resultado esperado, conforme vemos, a seguir:

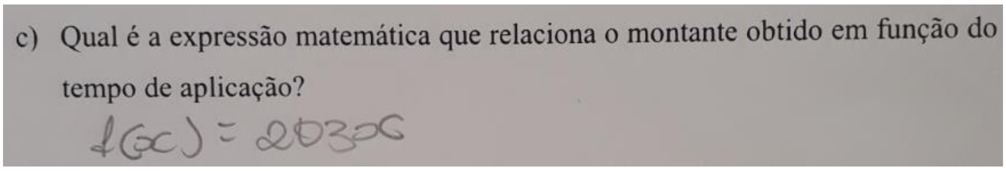
Figura 39 - Resposta correta apresentada por um aluno para o item (c) da Atividade 4.



c) Qual é a expressão matemática que relaciona o montante obtido em função do tempo de aplicação? f(x)= 3x + 200

Fonte: própria autora

Figura 40 - Resposta errada apresentada por um aluno para o item (c) da Atividade 4.


c) Qual é a expressão matemática que relaciona o montante obtido em função do tempo de aplicação?

f(x) = 203x

Fonte: própria autora

Nesse último caso, o erro cometido pelos alunos foi o de considerar como coeficiente angular o valor 203. É interessante observar que esse registro algébrico não representa a situação descrita no enunciado do problema, no entanto, ele traz as mesmas informações obtidas na tabela que os alunos apresentaram de forma equivocada como resposta do item **(b)**. Também é importante ressaltar que não foram os mesmos alunos que erraram ambas questões e, por esse motivo, chamamos a atenção para o fato de que não é porque o aluno consegue realizar um tipo de conversão que ele vai conseguir voltar ou converter em outro registro, a mudança de sentido pode facilitar ou dificultar o processo de conversão.

O desenvolvimento desse item mostrou que as afirmações de Jahn e Karrer (2004), sobre a necessidade do ensino da matemática ser desenvolvido com a utilização de diferentes tipos de registros do mesmo objeto matemático, estão em sintonia com o que encontramos na prática. Elas também consideram que o trabalho desenvolvido dessa forma, influencia a compreensão do objeto pelo aluno. Elas ressaltam que:

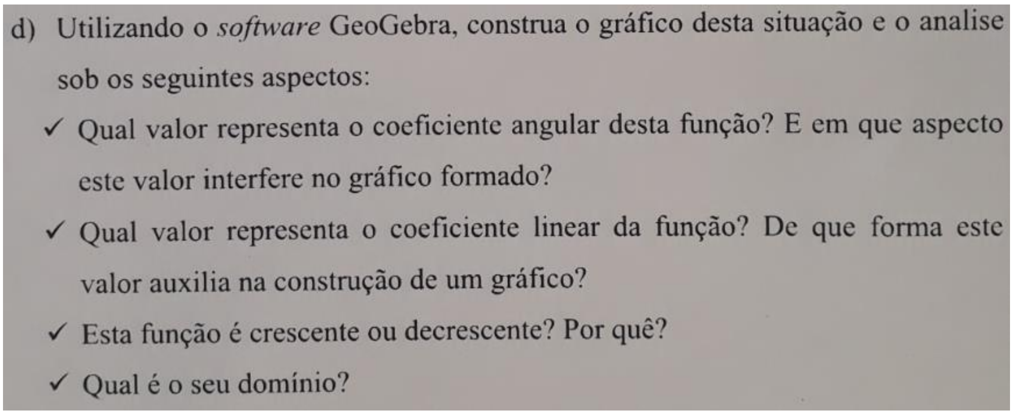
> [...] a aprendizagem de um conceito matemático consiste em desenvolver coordenações progressivas entre vários sistemas de representação semiótica. Sua teoria (de Duval) está inserida no modelo cognitivo do processo da aprendizagem matemática, cujo foco está na complexidade cognitiva do pensamento humano. Neste contexto, a principal preocupação reside na análise das condições cognitivas internas, necessárias para o estudante entender Matemática, as quais compõem o que ele intitula de arquitetura cognitiva. Desta forma, na concepção desse autor, o entendimento matemático depende, então, da mobilização de vários registros e, por consequência, um indivíduo aprende Matemática se ele integra, em sua arquitetura cognitiva, todos os registros necessários como novos sistemas de representação. (JAHN e KARRER, 2004, p.16-17).

Isto reforça nossa opinião sobre a importância do professor trabalhar com diferentes tipos de registro para o mesmo objeto matemático e também sobre a necessidade dele saber realizar e coordenar a conversão entre esses registros, principalmente quando este objeto envolve conceitos sobre função. Duval (2003) nos lembra que o aprimoramento da criatividade e do conhecimento do aluno se desenvolve melhor na utilização de diferentes registros e não na formação de apenas um registro, mesmo que seu tratamento seja intensificado.

Para o item **(d)**, nossa análise se deu em função do reconhecimento ou não de aspectos relacionados à função afim, descrita no problema. Como o processo de construção gráfica no *software* GeoGebra já havia se tornado, nesse momento, conhecido pelos alunos, julgamos importante explorar, não apenas essa construção gráfica mas, os fatores que contribuem para que o gráfico formado tenha tal representação. Neste sentido, tivemos 24 respostas consideradas corretas e apenas quatro alunos demonstraram ter dificuldade com alguma das análises feitas, por isso, categorizamos suas respostas como parcialmente corretas, já que, sem a intervenção do professor (ou dos próprios colegas, pois as respostas eram socializadas ao final da atividade), eles não teriam obtido os mesmos resultados de aprendizagem.

A seguir, apresentamos os questionamentos feitos a partir da construção gráfica produzida no *software* GeoGebra, que se encontra na figura 32:

Figura 41 - item (d) da Atividade 4.



d) Utilizando o *software* GeoGebra, construa o gráfico desta situação e o analise sob os seguintes aspectos:

- ✓ Qual valor representa o coeficiente angular desta função? E em que aspecto este valor interfere no gráfico formado?
- ✓ Qual valor representa o coeficiente linear da função? De que forma este valor auxilia na construção de um gráfico?
- ✓ Esta função é crescente ou decrescente? Por quê?
- ✓ Qual é o seu domínio?

Fonte: própria autora

4.5 Engenharia didática para a atividade 5

Apresentamos, a seguir, os questionamentos da atividade proposta aos alunos no quinto encontro:

5º) Gustavo não se sente bem quando viaja de ônibus, por isso pretende ir de Sena Madureira a Rio Branco usando um táxi. Sabendo que a distância entre as duas cidades é de 140 km e que o valor cobrado pelo taxista é de R$ 1,70, por quilômetro rodado (desconsiderando paradas e/ou congestionamentos), mais R$ 6,00 de taxa fixa (bandeirada), responda:

a) Quanto Gustavo pagará pelo frete do táxi para que ele faça esse percurso?
b) Caso ele divida essa despesa com mais 3 amigos, quanto cada um deve

desembolsar?
c) Como podemos representar a situação descrita nesta atividade usando uma fórmula matemática que permita encontrar o valor cobrado, de acordo com a distância percorrida pelo táxi?
d) Utilizando o *software* GeoGebra, expresse graficamente essa situação.

Com o desenvolvimento dessa atividade, esperávamos poder verificar se os alunos compreendem e identificam os valores constantes e variáveis de uma função (que respectivamente, nesse caso, são: valor de R$ 6,00 correspondentes à bandeirada e de R$ 1,70 correspondente ao valor cobrado por km rodado).

Uma estratégia esperada para a resolução do item **(a)** dessa atividade é que seja feita a conversão do registro em língua natural para o registro numérico, tendo em vista, este ser mais apropriado para a execução de cálculos, conforme o quadro abaixo:

Quadro 6 – Conversão entre o registro em língua natural e o registro numérico.

Registro de saída (língua natural)	**Registro de chegada (registro numérico)**
Gustavo não se sente bem quando viaja de ônibus, por isso pretende ir de Sena Madureira a Rio Branco usando um táxi. Sabendo que a distância entre as duas cidades é de 140 km e que o valor cobrado pelo taxista é de R$ 1,70, por quilômetro rodado (desconsiderando paradas e/ou congestionamentos), mais R$ 6,00 de taxa fixa (bandeirada). Quanto Gustavo irá gastar se pagar esse valor sozinho?	Valor = 6,00 + 140 x 1,70

Observamos, ainda, que, nesse caso, nota-se uma transparência nas informações do problema, facilitando a conversão de um registro para outro e que os três critérios de congruência, propostos por Duval (1993) são respeitados:

- ✓ Existe uma correspondência semântica entre os registros, ou seja, o significado dos símbolos se mantém iguais, mesmo havendo a troca de registro;
- ✓ Também é respeitada a univocidade semântica, isto é, cada termo do registro de saída tem seu único correspondente no registro de chegada e vice-versa;
- ✓ A ordem de apreensão nos diferentes registros é a mesma.

Na construção gráfica também podemos fazer questionamentos sobre o crescimento e decrescimento da função e qual deve ser o domínio para que o gráfico mostrado na tela do computador represente a situação descrita. Também é importante reforçar a ideia de que esse problema não admite valores negativos para x, já que esse valor se refere ao preço cobrado por cada km percorrido pelo taxista.

Assim, no quinto e último encontro, desenvolvemos a ATIVIDADE 5, última atividade da sequência que havíamos planejado para o desenvolvimento desta pesquisa. Nesse dia estavam presentes 30 alunos da turma.

Ressaltamos que, ao final de cada encontro, sempre foi proporcionado aos alunos um momento de reflexão, verbal e/ou escrita, sobre a contribuição (ou não) do *software* utilizado. Os resultados dessas socializações eram sempre positivos, mostrando que os alunos consideravam vantajoso o uso do programa nas atividades, principalmente, como sendo um potencializador de aprendizagem.

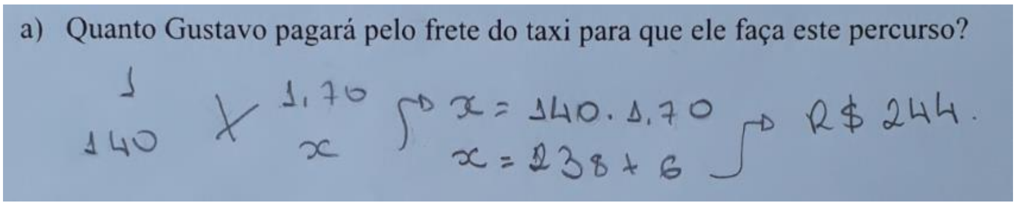
Assim como nas demais atividades, vamos utilizar o mesmo quadro de categorias para organizar os resultados obtidos, conforme vemos abaixo:

Quadro 7 - Distribuição dos resultados das categorias obtidas na Atividade 5

Resultados obtidos a partir da análise da experimentação da ATIVIDADE 5				
Categorias	**Itens da atividade 5**			
	(a)	**(b)**	**(c)**	**(d)**
Acertos totais	30	14	30	30
Acertos parciais	0	16	0	0
Em branco	0	0	0	0
Erradas	0	0	0	0

Na resolução do item **(a)** dessa atividade, os alunos fizeram a conversão do registro em língua natural para o registro numérico sem grandes dificuldades. Todos os alunos que participaram da atividade conseguiram fazer essa conversão, de forma correta, inclusive, utilizando estratégias de tratamento diferentes. Trazemos, na figura, a seguir, uma dessas resoluções:

Figura 42 - Resposta apresentada por um aluno para o item (a) da Atividade 5.

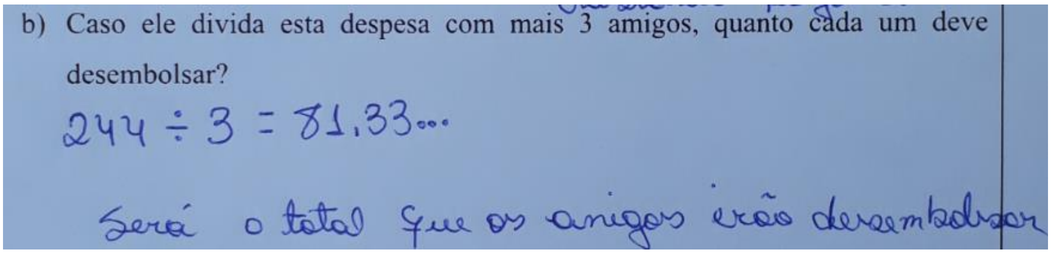

a) Quanto Gustavo pagará pelo frete do taxi para que ele faça este percurso?

1 — 1,70
140 — x
x = 140 . 1,70
x = 238 + 6 → R$ 244.

Fonte: própria autora

Já no item **(b)**, tivemos muitas respostas consideradas parcialmente corretas, por conta da má interpretação do enunciado, pois, nele foi dito que "caso ele divida essa despesa com mais 3 amigos, quanto cada um deve desembolsar?" e 16 alunos desconsideraram a participação do primeiro passageiro e dividiram o valor da corrida entre os três últimos amigos, como vemos na figura, a seguir:

Figura 43 - Resposta apresentada por um aluno para o item (b) da Atividade 5.


b) Caso ele divida esta despesa com mais 3 amigos, quanto cada um deve desembolsar?

244 ÷ 3 = 81,33...

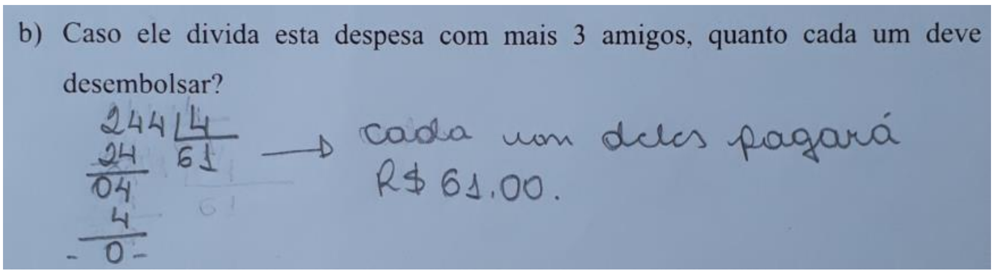
Será o total que os amigos irão desembolsar

Fonte: própria autora

Notamos que o tratamento feito no registro numérico se encontra correto, inclusive com a compreensão de que o valor a ser dividido corresponde a R$ 244,00, o que proporcionou erro na questão foi o processo de conversão entre os registros da língua natural e numérico, conforme mencionado.

Por outro lado, 14 alunos apresentaram o processo de conversão e o tratamento do registro de chegada de forma correta, respondendo, assim, adequadamente à questão, como vemos na figura, a seguir:

Figura 44 - Resposta apresentada por um aluno para o item (b) da Atividade 5.


b) Caso ele divida esta despesa com mais 3 amigos, quanto cada um deve desembolsar?

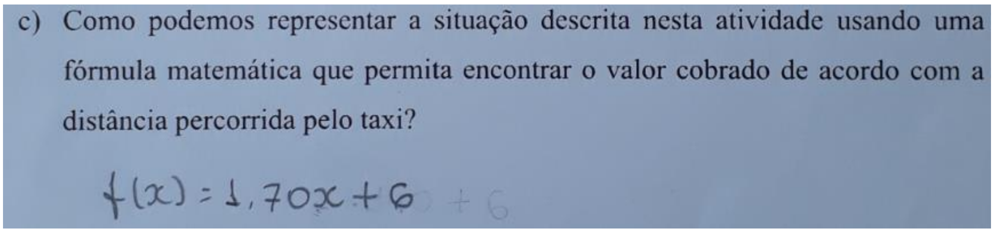
244 | 4
24   61
04
4
0

→ cada um deles pagará R$ 61,00.

Fonte: própria autora

No item **(c)**, solicitamos que os alunos realizassem a conversão do registro em linguagem natural para o registro algébrico. Verificamos que todos os alunos conseguiram apresentar sua resposta de forma correta, conforme vemos na figura, a seguir:

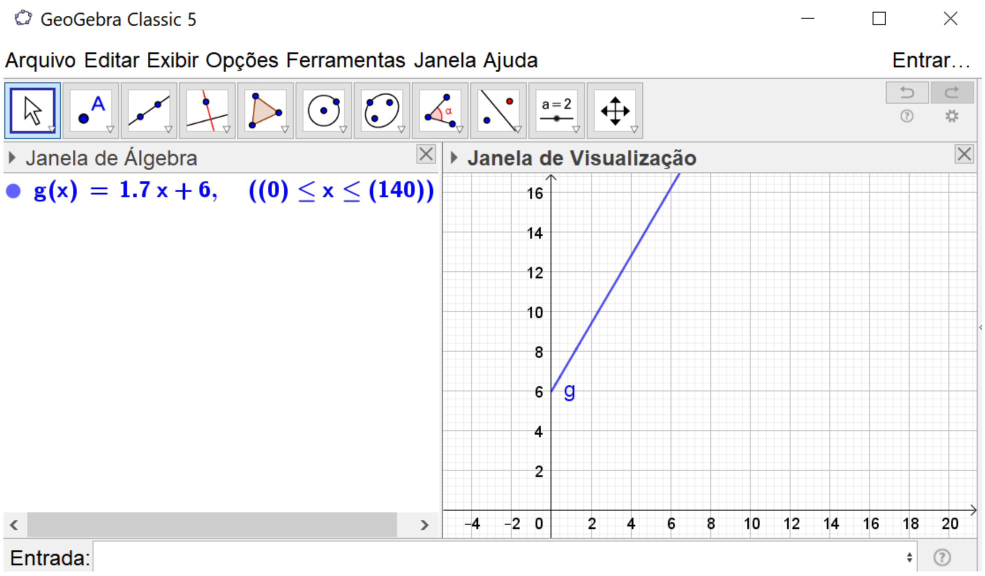
Figura 45 - Resposta apresentada por um aluno para o item (c) da Atividade 5.



Fonte: própria autora

Também tivemos reflexos desses acertos do item **(c),** na conversão para o registro gráfico com a utilização do *software* GeoGebra, tarefa exigida no item **(d)**. Essa construção se deu de forma bem mais tranquila e, conforme íamos questionando os alunos sobre os aspectos que o gráfico apresentava, eles instantaneamente nos respondiam e justificavam corretamente suas respostas. A figura abaixo apresenta o gráfico construído nessa atividade:

Figura 46 - Registro algébrico e gráfico da função $g(x) = 1.7x + 6$ no GeoGebra.



Fonte: própria autora.

Sobre as hipóteses que havíamos conjecturado no início deste trabalho, tivemos as seguintes conclusões:

Hipótese 1: Conjecturamos que os alunos não teriam grandes dificuldades na compreensão de conceitos básicos da função afim.

Mesmo sendo minoria, alguns alunos ainda demonstraram certa dificuldade na compreensão de noções básicas sobre o objeto matemático explorado. Também percebemos essa dificuldade transparecer nas atividades que exigiam algum tipo de procedimento, principalmente, em relação ao processo de conversão do registro em linguagem natural para o registro algébrico.

Hipótese 2: Conjecturamos que a formação de duplas para a execução do trabalho traria resultados mais satisfatórios.

Infelizmente esse não foi um procedimento que favoreceu a aprendizagem dos alunos. Tivemos que mudar a estratégia já na aplicação da segunda atividade para que pudéssemos ter menos interferência de conversas paralelas.

Hipótese 3: Conjecturamos que a escolha dos sujeitos tornaria o desenvolvimento desta pesquisa relativamente mais fácil, devido ao fato de serem alunos da pesquisadora.

Para o bem da pesquisa, estávamos corretos em pensar dessa forma, pois, o relacionamento existente entre os participantes da pesquisa e a pesquisadora proporcionou confiança para que os alunos respondessem aos questionamentos das atividades propostas.

Hipótese 4: Conjecturamos que a utilização do *software* GeoGebra neste trabalho poderia instigar sua utilização em outros momentos de resolução de atividades matemáticas.

Essa hipótese não foi confirmada, apesar de haver falas por parte dos alunos de que poderiam fazer uso dele em outras atividades, devido a terem gostado do programa. Contudo, como não tivemos oportunidade de voltar ao laboratório de informática com os mesmos alunos, não pudemos fazer essa verificação.

Hipótese 5: Conjecturamos que a utilização do *software* pelos alunos ocorreria de maneira tranquila, sem grandes dificuldades.

Percebemos que o interesse dos alunos pelo uso do *software* ia aumentando, conforme iam adquirindo familiaridade com ele. No entanto, podemos afirmar que, desde a execução da primeira atividade, os alunos já demonstraram ter compreendido os principais comandos do programa e que seu uso não trouxe dificuldades ao processo de ensino e de aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em nossa proposta, pretendíamos desenvolver um trabalho orientado pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval, devido a sua importante contribuição na análise de como acontece o processo de ensino e aprendizagem de matemática. Nossa metodologia de pesquisa seguiu as considerações da Engenharia Didática, de Artigue, pois necessitávamos de um referencial que nos permitisse compreender os fatores condicionantes da pesquisa, bem como, que nos ajudasse a formular a proposta de atividade a ser investigada. Também foi necessário que fizéssemos um aprofundamento de nossos estudos sobre o programa GeoGebra, tendo em vista, não considerarmos possível o desenvolvimento desta pesquisa sem o conhecimento do *software* utilizado.

Enfatizamos que o uso de novas tecnologias na sala de aula, em especial o uso do programa GeoGebra, pode instigar a curiosidade dos alunos, na busca de novas aprendizagens. Não defendemos que o programa, por si só, consiga fazer a aprendizagem acontecer, mas, acreditamos que ele seja capaz de proporcionar condições favoráveis a essa construção de sentidos que tanto almejamos, como professores. É relevante o fato de que quando questionados sobre de que forma esse programa estava interferindo em suas aprendizagens, os alunos ressaltavam a prestabilidade das funções do programa, a rapidez com que tudo é construído, a possibilidade de manipulação dos objetos criados e, ainda, diziam considerar muito importante o dinamismo que o *software* apresenta.

Diante do que colocamos como conjecturas, podemos concluir que nossas reflexões sobre de que modo a utilização do *software* Geogebra pode potencializar a aprendizagem do objeto matemático função afim para os alunos de um curso técnico em informática, podem servir de incentivo para outros professores na busca por mudanças na forma de ensinar matemática.

Também esperamos que este trabalho frutifique em nossa própria prática docente, nos amadurecendo e nos permitindo enxergar o quão importante pode se tornar uma sala de aula do ponto de vista de um pesquisador.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática.** Curitiba, Editora UFPR, 2007.

ALMOULOUD, Saddo Ag ; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva . **Engenharia Didática**: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd.. Revemat : Revista Eletrônica de Educação Matemática , v. 2008, p. 6, 2008. Disponível em: <file:///D:/MEUS%20ARQUIVOS/Downloads/13031-40188-1-PB%20(1).pdf> Acesso em: 25 janeiro 2018.

ARTIGUE, Michele; DOUADY, Régine; MORENO, Luis. **Ingeniería didáctica en educación matemática.** México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Tradução de:Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4, p. 193-217.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Trad. Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BALACHEFF, N. **Didactique et intelligence artificielle**. Recherches en Didactique des Mathematiques, La Pensee Sauvage, 1994, pp.9-42.

BOCCATO, V. R. C. **Metodologia da pesquisa bibliográfica na área odontológica e o artigo científico como forma de comunicação.** Rev. Odontol. Univ. Cidade São Paulo, São Paulo,v. 18, n. 3, p. 265-274, 2006. Disponível em: <http://arquivos.cruzeirodosuleducacional.edu.br/principal/old/revista_odontologia/pdf/setembro_dezembro_2006/metodologia_pesquisa_bibliografica.pdf> Acesso em: 16 junho 2018.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC. 2018. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf > Acesso 20 maio 2018.

BRASIL. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Volume 2. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p.

BROUSSEAU, G. **Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática**. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a. Cap. 1, p.35-113.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. 9ª edição.Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. Zetetiké, FE-Unicamp, v. 13, n. 23, p. 87-120, 2005.

CAVALCANTE, Luiz Henrique de Vasconcelos. **Uma Sequência Didática para o ensino de Parábola: a Engenharia Didática como** apoio metodológico. 2017, 45 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Amazonas, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94952> Acesso em: 25 janeiro 2018.

CHAVES, M. I. A. e CARVALHO, H. C. **Formalização do Conceito de Função no Ensino Médio: uma Sequência de ensino-aprendizagem**. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife. Anais. Recife: SBEM/PE, 2004. 1 CD-ROM.

DAMM, R. F. **Representação, Compreensão e Resolução de Problemas Aditivos**. Em Machado, S. D. A. (Org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica (pp. 35-48). Campinas: Papirus, 2003.

DANTE, L. R. **Matemática Contexto & Aplicações**. Rio de Janeiro – RJ. Editora Ática, 2007.

DEMANA, F.; LEITZEL, J. **Estabelecendo conceitos fundamentais através da resolução de problemas numéricos.** IN: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. As idéias da álgebra, São Paulo: Atual, p. 70-79, 1995.

DIAS, Valmir Ancelmo. **O ensino de funções na educação básica**. 2015. 202 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2015. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/136736>. Acesso em: 08 julho 2017.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonction netent cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**. Strasbourg: IREM – ULP, 1993. p. 37-65.

______. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2003. P. 7-31.

______. **Semiosis y pensamento humano:** Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad Del Valle. Colômbia, 2004a.

______. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais (fascículo I). Trad. Levy, L. F. e Silveira, M. R. A. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

FARIA. C. O. e ÁVILA, J. B. **O Uso de Geradores de Representações Gráficas no Ensino de Funções e Equações Lineares e Quadráticas**. IV Congresso Ribie, Brasília, 1998. Disponível em:<http://www.ufrgs.br/niee/eventos/RIBIE/1998/pdf/com_pos_dem/253M.pdf> Acesso em: 10 julho 2017.

FIALHO, Edson de Souza Carneiro. **Uma proposta de utilização do software Geogebra para o ensino de geometria analítica**. 2010. 109 f. dissertação (Mestrado) Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, 2010. Disponível em: <file:///D:/MEUS%20ARQUIVOS/Downloads/38_EDSON%20DE%20SOUZA%20CARNEIRO%20FIALHO%20(2).PDF> Acesso em: 25 janeiro 2018.

FONT, Vicenç et al. **Enfoque ontosemiótico de lãs representaciones em educación matemática.** Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidade de Granada. 2005. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/>. Acesso em: 27 dezembro 2017.

FONTOURA, L. R. **Uma sequência de ensino para o estudo de integrais duplas**. 2016. 143 p. dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2016.

GITIRANA, Verônica. **Representações e Aprendizagem da Matemática**. 2013. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Vic60MQ9DkU> Acesso em: 15 julho 2017.

GRAVINA, M. A. **Geometria dinâmica**: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, VII, 1996, Belo Horizonte/MG: Pontifícia Universidade Católica do RS, 1996. p. 1-14.

______. **O potencial semiótico do GeoGebra na aprendizagem da geometria**: uma experiência ilustrativa. Vidya, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 237-253, jul./dez. 2015.

IEZZI, G. e MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Conjunto e Funções. Ed. São Paulo-SP: Atual, 2004.

IEZZI, Gelson. [et al.]. **Matemática:** Ciência e Aplicações, 1ª série: ensino médio. 7ª ed. – São Paulo: Saraiva, 2013.

JAHN, Ana P.; KARRER, Monica. Transformações lineares nos livros didáticos: uma análise em termos de registros de representação semiótica. Educação matemática em revista, Recife/PE, Ano 11, n.17, p. 16-28, 2004.

LIMA, Elon Lages. Números e Funções Reais. Versão preliminar (utilizada nas aulas do PROFMAT/2012). Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MACHADO, S. D. A. **Engenharia Didática**. In. Machado, S. D. A. et al. Educação Matemática: Uma Introdução. São Paulo: EDUC, 1999, p. 197-208.

__________.**Engenharia Didática**. In: Educação Matemática: uma nova introdução. 3 ed. - São Paulo: EDUC, 2010.

MARKOVITS, Z.; EYLON, B S.; BRUCKHEIMER, M. **Dificuldades dos alunos com o conceito de função.** IN: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. As ideias da álgebra, São Paulo: Atual, p. 49-69, 1995.

MENNA BARRETO, M..**MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO SEXUAL: modelagem do fenômeno da eliminação/absorção de anticoncepcionais orais diários.** 2007. 215 f. Dissertação (Mestrado em Programa de Pós-graduação em ensino de matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2007. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/12669/000632659.pdf?sequen> acesso em: 10 julho 2017.

MINEIRO, R. M. **Uma análise de situações de congruência e de não congruência em uma atividade de representação de circunferências**. Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo, SP, Brasil, pp.1-12, 2016.

MOTA, Ronaldo e SCOTT, David. Educando para inovação e aprendizagem independente. – 1. ed. – Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.

NICOLAS BOURBAKI. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2017. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Nicolas_Bourbaki&oldid=50213088>. Acesso em: 25 janeiro 2018.

POMMER, Wagner Marcelo.**A Engenharia Didática em sala de aula**: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares, 2013. 72 p.ils.: Tabs.

PONTE, J. P. **O conceito de função no currículo de Matemática**. Revista Educação e Matemática, APM, Portugal, n.15, p. 3-9, 1990.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO. **Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas.** Instituto São Paulo GeoGebra. Disponível em: <www.pucsp.br/geogebrasp/> Acesso em: 06 julho 2017.

PROCÓPIO, Wadames. **O currículo de Matemática no estado de São Paulo**: sugestões de atividades com o uso do Geogebra. Dissertação de Mestrado. PUC, São Paulo, 2011. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/7756>. Acesso em: 25 janeiro 2018.

SADOVSKY, P. **O ensino de matemática hoje**: enfoques, sentidos e desafios. 1. ed. São Paulo: Ática, 2010.

SANTOS, Adriana Tiago Castro dos. **O ensino da Função Logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do software GeoGebra**. 2011. 200 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10854> Acesso em: 25 janeiro 2018.

SCHIMIEGUEL. Hélio. **Metodologia Alternativa Para o Ensino de Funções a Partir de Uma Abordagem Baseada em Problemas do Cotidiano.** Programa de Desenvolvimento da Educação - PDE Secretaria de Estado da Educação – SEED, 2007.

SILVA, Benedito A.; FIGUEIREDO, Auriluci de C. **Registros de Representação e o Ensino-Aprendizagem de Probabilidade Condicional.** In: II SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2003. Santos.Anais eletrônicos do II SIPEM. Santos, 2003, 1 CD.

SILVA, Manoel Roberto Alves da. **A utilização do software Geogebra no processo de ensino-aprendizagem da geometria plana.** 2017. 74 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2017. Disponível em:<http://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/1756/1/A%20utiliza%C3

%A7%C3%A3o%20do%20software%20Geogebra%20no%20processo%20de%20ensino-aprendizagem%20da%20Geometria%20plana.pdf> Acesso em: 25 janeiro 2018.

SILVA, Maria Helena Morais. **Análise Histórica do Conceito de Função.** In:Caderno de licenciatura em matemática, n. 2, ano 2, 1999. Disponível em: <http://www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/volume2/Anlise_Historica_do_Conceito_de_Funo.pdf> Acesso em: 08 julho 2017.

SOUZA, Viviane Dal Molin de; MARIANI, Viviana Cocco. **Um breve relato do desenvolvimento do conceito de função**. In: V EDUCERE, 2005, Curitiba. Anais do V EDUCERE, 2005. v. 1. p. 1-12. Disponível em: <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2005/anaisEvento/documentos/com/TCCI021.pdf> Acesso em: 07 julho 2017.

VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Um olhar sobre a modelagem matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. 2007. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007. Disponível em: <http://www.uel.br/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/rodolfo_vertuan.pdf>. Acesso em: 27 dezembro 2017.

ZUFFI, E. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Educação Matemática em Revista**, ano 8, n. 9/10, abril, 2001. Biografia de James Gregory. Disponível em: <http://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/viewFile/436/75> Acesso em: 07 julho 2017.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Autorização de participação

Eu, ____, após ter ciência dos objetivos e da metodologia desta pesquisa e por acreditar estar suficientemente informado sobre como será seu desenvolvimento, afirmo que minha participação é voluntária e autorizo a divulgação dos resultados obtidos, desde que não citado os nomes reais dos envolvidos.

Também é importante a informação de que minha desistência de participação pode ocorrer a qualquer momento sem qualquer penalidade ou perda de benefícios.

Atesto o recebimento de uma cópia deste termo de consentimento livre e esclarecido.

____

Assinatura do voluntário ou de seu representante legal

____

Assinatura de uma testemunha

Declaro que obtive esta autorização de participação nesta pesquisa de forma apropriada e voluntária.

____

Assinatura do responsável pela pesquisa

Sena Madureira-AC, ______ de ____________________ de 2018.

APÊNDICE B – Produto Educacional: Sequência de atividades com o uso do *software* GeoGebra na exploração de conceitos relacionados à função afim para estudantes do 1º ano do Ensino Médio.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS E DA NATUREZA – CCBN
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – MPECIM

ELIZABETH SILVA RIBEIRO

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES COM O USO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA NA EXPLORAÇÃO DE CONCEITOS RELACIONADOS À FUNÇÃO AFIM PARA ESTUDANTES DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Orientador: Prof. Dr. Itamar Miranda da Silva

Rio Branco

2019

ELIZABETH SILVA RIBEIRO

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES COM O USO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA NA EXPLORAÇÃO DE CONCEITOS RELACIONADOS À FUNÇÃO AFIM PARA ESTUDANTES DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Produto Educacional elaborado a partir da dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós – Graduação do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática (MPECIM), da Universidade Federal do Acre (UFAC), como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Itamar Miranda da Silva

CELA/UFAC – Orientador

Profª. Dr. Aline Andreia Nicolli

CELA/UFAC – Membro interno

Prof. Dr. Luiz Márcio Santos Farias

UFBA – Membro externo

Prof. Dr. Gilberto Francisco Alves de Melo

CAP/UFAC – Membro suplente

Rio Branco

2019

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Após o desenvolvimento desta pesquisa, organizamos as atividades que foram desenvolvidas com os alunos/sujeitos de forma que pudéssemos colocar à disposição, como sendo nosso produto educacional, uma sequência de atividades que utilize o *software* GeoGebra como recurso tecnológico no estudo da função afim. Também acrescemos a estas atividades outras situações que podem ser trabalhadas de forma complementar, já que as mesmas foram elaboradas com base nos resultados obtidos.

Por considerarmos importante que o trabalho docente esteja alinhado com o que propõe a BNCC, decidimos desenvolver as atividades que complementam nosso produto educacional com foco nas habilidades matemáticas que os alunos devem desenvolver, relativas ao ensino da função afim, sugeridas por este documento. Para isso, decidimos priorizar as habilidades que se referem a:

- (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. [...];
- (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica;
- (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. [...].

Desta forma, o produto educacional gerado a partir do desenvolvimento desta pesquisa tem o objetivo de servir de apoio ao trabalho docente, no que diz respeito ao ensino da função afim.

Por fim, desejamos sucesso a todos que se interessarem em desenvolver esta proposta e que tenham sempre em mente que o processo de ensino e aprendizagem está condicionado a muitos fatores que, com boas práticas, podem ser aproveitados para a melhoria dos resultados que se pretende obter.

CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA FUNÇÃO AFIM

É fato que todo professor tem ânsia de propor um bom ensino a seus alunos, muito embora os fatores condicionantes não dependam exclusivamente dele. No caso do ensino da matemática, além de o professor ter que escolher a melhor forma para interagir com os alunos, ele também deve estar atento à maneira como essas ideias serão apresentadas, pois, por muitas vezes, este ensino é prejudicado pela falta de clareza em relação à aplicabilidade de seus conceitos.

No que se refere ao ensino da função afim, os alunos também encontram dificuldades em conseguir associar este objeto matemático à situações dentro de um contexto. Sobre isto, apoiada em sua prática docente, Mangarinus (2013, p. 12), afirma que "apesar da contextualização e interdisciplinaridade, o ensino de funções não vem garantindo aos alunos sua efetiva aprendizagem ou a flexibilidade esperada para a resolução de problemas diversos". Ela também chama a atenção para o fato de que conceitos não compreendidos em anos anteriores dificultam a aprendizagem de funções no Ensino Médio, inclusive, chegam a comprometer o Ensino Superior. Afirmação também defendida por Costa (2004 apud Mangarinus, 2013, p. 12), segundo o autor: "muitas das dificuldades apresentadas pelos estudantes no que se refere ao conceito de limite, derivada e integral recaiam na compreensão do conceito de função".

A falta de compreensão e/ou a má interpretação de conceitos matemáticos faz com que o aluno apresente lacunas em sua aprendizagem, e isto se verifica muito nos estudantes do ensino médio. Temos muitas situações em que alunos não conseguem avançar em seus estudos por conta da falta de domínio sobre o que seria básico para a compreensão daquele conhecimento. Sobre isto e em relação ao ensino de funções, Chaves e Carvalho (2004) afirmam que:

> Muitos conteúdos estudados no Ensino Fundamental (EF) servem de "âncora" para o ensino de funções, como por exemplo: i) a proporção, pois trata de grandezas variáveis e interdependentes de forma direta ou indireta; ii) as equações do 1º e 2º graus e os sistemas que modelam situações do cotidiano; iii) a geometria onde perímetros e áreas dependem de medidas de lados, ângulos ou diagonais. (CHAVES e CARVALHO, 2004, p. 8).

Para Saraiva e Teixeira (2009 apud Andrade e Saraiva, 2012, p. 141), "algumas das dificuldades que os alunos enfrentam quando tentam compreender o conceito de função estão relacionadas com o uso do conjunto de símbolos relacionados com ele". O que traz para a discussão a ideia defendida por Duval (2009), em que afirma que a utilização de diferentes representações semióticas de um mesmo objeto matemático contribui para uma melhor aprendizagem, pois, os objetos matemáticos não são objetos “reais”, ou seja, que podemos ver, pegar ou até mesmo sentir. Portanto, uma maneira de conseguirmos perceber estes objetos é dando representantes a eles, no caso da função afim, estes representantes podem ser um gráfico, uma tabela uma relação algébrica entre duas incógnitas diferentes entre outras.

Por outro lado, também consideramos importante analisar qual a real contribuição do principal instrumento de apoio ao trabalho docente, que é o livro didático, ao ensino de funções. Neste sentido, segundo Rocha (2008, p. 18), “os autores abordam muitos conceitos que envolvem as funções em poucas páginas dos livros, não possibilitando ao aluno o tempo necessário para seu amadurecimento conceitual”.

Também encontramos no trabalho de Mesa (2001), argumentos a favor de uma investigação sobre os livros didáticos, na tentativa de explicar o motivo da dificuldade que os alunos têm na compreensão do conceito de função. A autora ainda afirma que os alunos formam suas concepções sobre os objetos matemáticos conforme são estimuladas pelos problemas e exercícios propostos em sala de aula, daí a importância de valorizarmos estas atividades.

Resumidamente, podemos concluir que, para termos uma melhor possibilidade de êxito no processo de ensino e aprendizagem da função afim, precisamos, por um lado, desenvolver nosso trabalho voltado para a coordenação das diferentes representações existentes para uma mesma função e, por outro, tentar potencializar este processo com a proposição de atividades estimuladoras do conhecimento matemático. Nossa fala também tem respaudo em Ponte (2005, p. 11-12), onde afirma que “formulando tarefas adequadas o professor pode suscitar a atividade do aluno. Não basta, no entanto, selecionar boas tarefas; é preciso ter atenção ao modo de propor e de conduzir a sua realização na sala de aula”.

Todas estas considerações nos remetem à busca de melhores ferramentas pedagógicas e de propostas de ensino diversificadas. Desta forma, o produto desta pesquisa visa apresentar uma sequência de atividades que utiliza o *software* GeoGebra para explorar a função afim, tendo em vista que o trabalho que desenvolvemos nos fez entender que o uso da tecnologia pode ser um grande aliado nesta busca por diferentes propostas de ensino que estimulam a aprendizaegem de nossos alunos.

SUGESTÕES DE ATIVIDADES SOBRE FUNÇÃO AFIM

Atividade 1 – Construir modelos empregando a função polinomial de 1º grau, para resolver problemas em contextos diversos, com apoio de tecnologias digitais.

Situação-problema

Suponha que um ônibus saia da Cidade de Sena Madureira com destino a Rio Branco, com velocidade constante de 90 km/h, o que equivale a 1,5 km/min. Com base nessas informações, responda:

a) Como podemos representar esta informação utilizando uma tabela que mostre a distância percorrida pelo ônibus em 1 min, 2 min, 5 min, 10 min e 30 min?
b) É possível determinar quanto tempo este ônibus leva pra chegar ao km 51? Qual foi este tempo?
c) Se a distância total entre as cidades citadas é de 144 km, quanto tempo o ônibus gastará para fazer este percurso?
d) Se representarmos por **D** a distância percorrida e por **T** o tempo gasto, estabeleça uma relação matemática que modele esta situação.
e) As grandezas distância e tempo são diretamente proporcionais? Com a utilização do *software* geogebra, represente esta situação graficamente?

Estratégias de resolução:

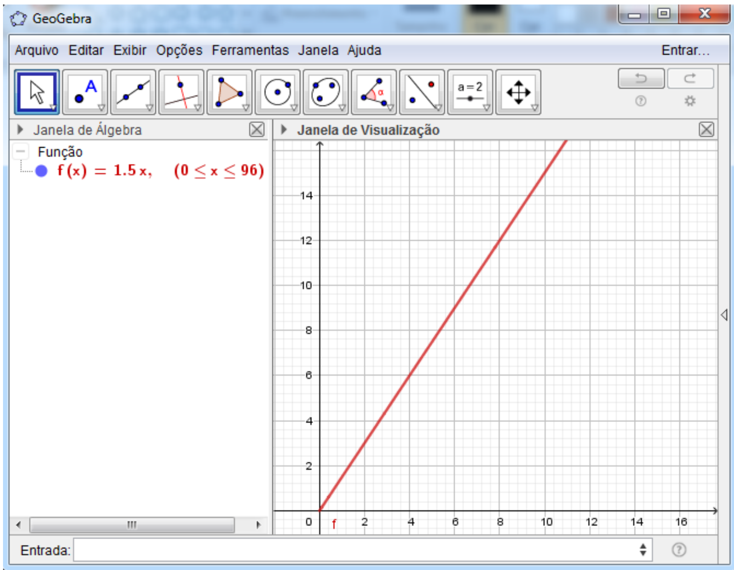
Nesta atividade, é necessário que o aluno interprete o enunciado de forma suficiente para poder realizar as conversões solicitadas. Inicialmente, os alunos terão que passar do registro da língua natural para o registro de tabela, analisando quais informações constam no problema e quais eles precisam encontrar. Em seguida, o que se pede é que façam a conversão para o registro algébrico e geométrico. Neste sentido, nosso objetivo é o de provocar a conversão entre estes diferentes tipos de registro de uma mesma função.

Também, como forma de evidenciar o coeficiente de proporcionalidade da função linear, é solicitado que o aluno relacione as grandezas tempo e distância e verifique como podemos obter a duração de tempo, sendo percorrida certa distância. Nosso objetivo é mostrar que existe uma constante de proporcionalidade nesta situação e relacioná-la com o conceito de função, tornando mais fácil a compreensão dos registros gráfico e algébrico.

Esta atividade deve ser trabalhada no Geogebra com o objetivo de verificar se as conjecturas e afirmações feitas pelos alunos estão coerentes com o que está representado na tela do computador. Esperamos que, com auxílio da visualização gráfica, o aluno consiga fazer manipulações e estabelecer relações entre as variáveis já identificadas.

Como forma de estimular o conhecimento dos alunos, perguntas provocativas podem se colocadas. Neste caso, sugerimos as seguintes indagações: o gráfico que aparece na tela corresponde aos dados apresentados no problema? Teremos alguma representação gráfica no 2º e 3º quadrante? De acordo com o problema, qual é o menor valor que pode ser atribuído para x? Qual é o domínio desta função?

Figura 1 - Registro gráfico da função $f(x) = 1,5x$ no geogebra



Fonte: Tela do Geogebra criada pela autora.

Como dito anteriormente, nossa opinião é de que o dinamismo apresentado no *software* pode contribuir para o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, traduzindo-se em melhora na interpretação de informações e na organização dos dados apresentados.

Atividade 2 – Investigar relações entre números expressos em tabelas, identificando padrões e criando conjecturas para expressar algebricamente e graficamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

Situação-problema

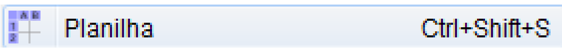
Agora, supondo que o consumo de combustível deste ônibus seja conforme os dados apresentados na tabela.

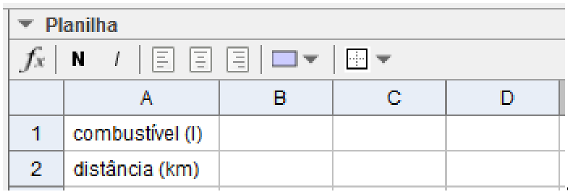
Combustível gasto (ℓ)	0,5	2	3		15	18	
Distância percorrida (km)	4,5	18		90			225

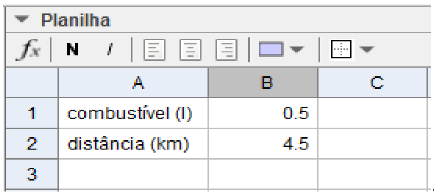
Complete o restante da tabela e responda:

a) Existe uma a constante de proporcionalidade nesta situação? Qual é este valor e o que ele representa neste contexto?

b) Organize esta tabela no *software* GeogebraClassic 5,clicando no botão 

e escolhendo a opção 

. Para incluir os dados, você deve escrever as grandezas que são trabalhadas na situação: 

. Em seguida, deve incluirum dos valores de cada coluna e, na outra linha da mesma coluna, dar o comando necessário para que apareça o valor correspondente, por exemplo: na linha 1 da coluna B, digitamos "**0.5**" e na linha 2 da mesma coluna, digitamos "**=B1*9**". Com este comando irá aparecer o resultado de "**4.5**" no campo B2, conforme imagem, a seguir: 

. Agora, verifique se todos os resultados encontrados estão de acordo com o que você tinha previsto.

c) Considerando a distância de 144 km, aproximadamente quantos litros de combustível este ônibus gasta para fazer este percurso?

d) Se representarmos por **D** a distância percorrida e por **X** o total de combustível gasto, estabeleça uma relação matemática que modele esta situação.

e) Represente esta situação graficamente utilizando o *software* geogebra.

Estratégias de resolução:

A organização desta atividade levou em consideração a necessidade de propormos situações aos alunos em que apresentem os dados não apenas no registro da língua materna, no caso, utilizamos uma tabela como registro de saída e espera-se poder verificar se eles compreendem estes dados e se conseguem fazer a conversão entre os registros de tabela, língua materna, algébrico e gráfico.

Uma das estratégias possíveis para a resolução desta atividade é utilizar a constante de proporcionalidade para encontrar os valores que completam a tabela. Desta forma, se houver compreensão do que representa este valor na situação descrita, o aluno terá compreendido que a distância percorrida é função da quantidade de combustível gasto.

De antemão, podemos citar duas possíveis situações que poderão ser encontradas durante a resolução desta questão e quais procedimentos devem ser adotados diante da situação:

1ª situação: caso o aluno não consiga completar a tabela ou a complete parcialmente, deve ser verificado o motivo de tal impedimento/desistência, (se ele não compreendeu a situação, se compreendeu mas não consegue estabelecer uma constante de proporcionalidade, se as grandezas envolvidas na situação são conhecidas pelo aluno, se consegue associá-las, ou algum outro motivo que o impeça).

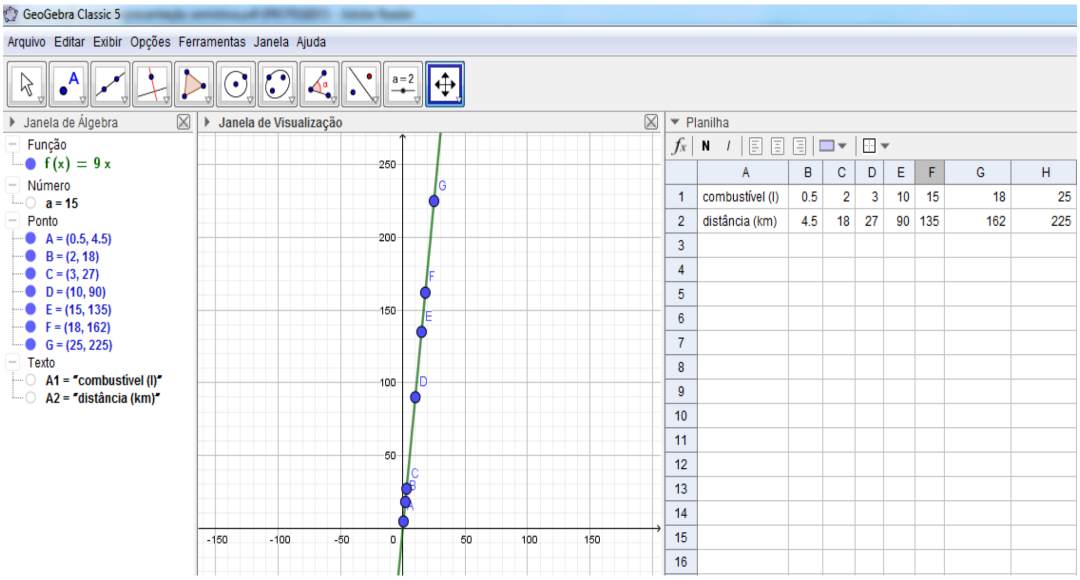
É importante que o tratamento dado a esta questão leve a compreensão de que estamos criando uma função. O aluno deve saber interpretar as generalizações ao fazer o processo de tratamento.

2ª situação: caso o aluno complete a tabela corretamente, isso não implica dizer que ele compreendeu que está trabalhando com um modelo de função, para isso, pode ser necessário que se identifique quais são os elementos constantes e quais são os variáveis. Esperamos que o aluno reconheça que o valor de 9 km/ℓ é constante no problema e que isso significa que a cada 9 km percorridos, gasta-se 1 ℓ de combustível.

Ainda neste sentido, o aluno é levado a fazer conjecturas em torno do conceito de função e a estabelecer, a partir de seu entendimento, uma relação de proporcionalidade entre as grandezas distância percorrida e combustível gasto. Esta modelagem será o registro algébrico da situação e deve ser descrita por ***D*** = 9.***x***.

É importante verificar se todos os alunos seguiram os passos corretos nas construções da tabela e do gráfico no *software* GeoGebra e, principalmente, se houve a compreensão de que o gráfico expressa as mesmas informações contidas na tabela e na expressão algébrica.

Figura 2 - Registro gráfico e da tabela da função *f(x)* = 9*x* no geogebra



Fonte: própria autora.

Também acreditamos que, a partir destas construções, os alunos podem fazer verificações acerca de suas conjecturas iniciais e que pode ser aproveitado este momento para a realização de uma discussão sobre coeficiente angular da função, sobre crescimento e decrescimento, sobre o fato de todos os pontos pertencerem a reta formada, sobre o domínio da função, entre outros questionamentos.

Atividade 3 – Construir modelos empregando a função polinomial de 1º grau, para resolver problemas em contextos diversos, com apoio de tecnologias digitais.

Situação-problema

Fábio está se preparando para uma competição de judô que irá participar dentro de 1 mês, mas ele está acima do "peso" permitido para sua categoria, por isso se submeteu a um treinamento específico para diminuição de gordura, em que se garante perca de 320 gramas por dia. Suponha que isso realmente ocorra e que Fábio esteja pesando 95 kg no início do treinamento.

a) Determine o "peso" de Fábio decorrido uma semana de treinamento.
b) Qual a expressão algébrica que relaciona o "peso" de Fábio (p), em quilogramas, em função do número de dias de treinamento (n)?
c) Faça um esboço de seu gráfico em seu caderno, depois verifique se esta construção está correta com auxílio do programa geogebra.
d) Caso Fábio siga rigorosamente este treinamento, será possível diminuir seu peso para 86 kg no tempo de um mês?

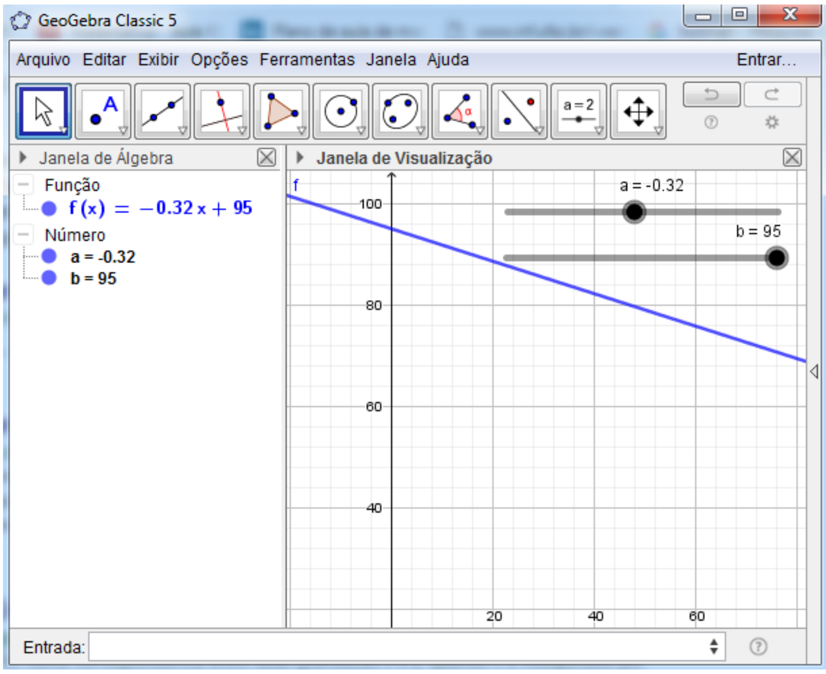
Estratégias de resolução:

O objetivo desta atividade é fazer a análise e reflexão de uma situação de caráter congruente que não é representada por uma função crescente. Após a compreensão do problema apresentado em língua materna, o aluno deve fazer a transformação para o registro numérico, pois acreditamos que desta forma o tratamento dado ao registro será melhor compreendido, podendo, ainda, facilitar a conversão para o registro algébrico.

Caso os alunos não tenham compreendido que o fato do atleta querer diminuir seu "peso" enquanto passam-se os dias se trata de um caso de função decrescente, deve ser proporcionado um momento para tal reflexão. É importante que percebam que, quanto menor for o "peso" pretendido pelo atleta, maior será a quantidade de dias necessários.

A construção gráfica no programa geogebra também é um momento valioso para a discussão do que representam os coeficientes angular e linear na função. Para o desenvolvimento desta discussão, devem ser construídos controles deslizantes numa função genérica $f(x) = ax + b$ e explorar estes comandos de forma a deixar o assunto claro.

Figura 3 - Registro gráfico da função *f(x) = -0,32x + 95* no Geogebra com utilização do controle deslizante.



Fonte: própria autora.

Atividade 4 – Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Situação-problema

Supondo que um certo capital seja aplicado a uma taxa de 1,5% ao mês no regime de juros simples e que apresente no primeiro mês um montante de R$ 203,00. Responda:

a) De acordo com estas informações, qual deve ter sido o valor aplicado?
b) Represente numa tabela o montante acumulado mês a mês, durante os seis primeiros meses.

Tempo decorrido (mês)	1	2	3	4	5	6
Montante (R$)	203					

c) Qual é a expressão matemática que relaciona o montante obtido em função do tempo de aplicação?
d) Utilizando o *software* geogebra, construa o gráfico desta situação.

Estratégias de resolução:

Esta questão se diferencia das questões anteriores pelo fato de não haver transparência entre as unidades significantes do registro de saída e o registro de chegada. Se compararmos estes registros, podemos observar que:

- ✓ Há uma mudança na ordem em que aparecem as informações entre o registro da língua natural e o registro algébrico;
- ✓ Os valores apresentados no registro de chegada não são os mesmos que aparecem no registro de saída;
- ✓ A situação não se mostra tão clara sobre quais procedimentos devem ser adotados.

Conforme apontam as pesquisas de Damm (2003), Mineiro (2016) e Duval (2009), temos aqui uma situação que envolve conversões não congruentes e que precisam fazer parte do cotidiano escolar do aluno.

Acreditamos que a análise e resolução de questões como esta, promove a aprendizagem matemática ao mesmo tempo em que possibilita uma evolução no raciocínio lógico de quem as interpreta.

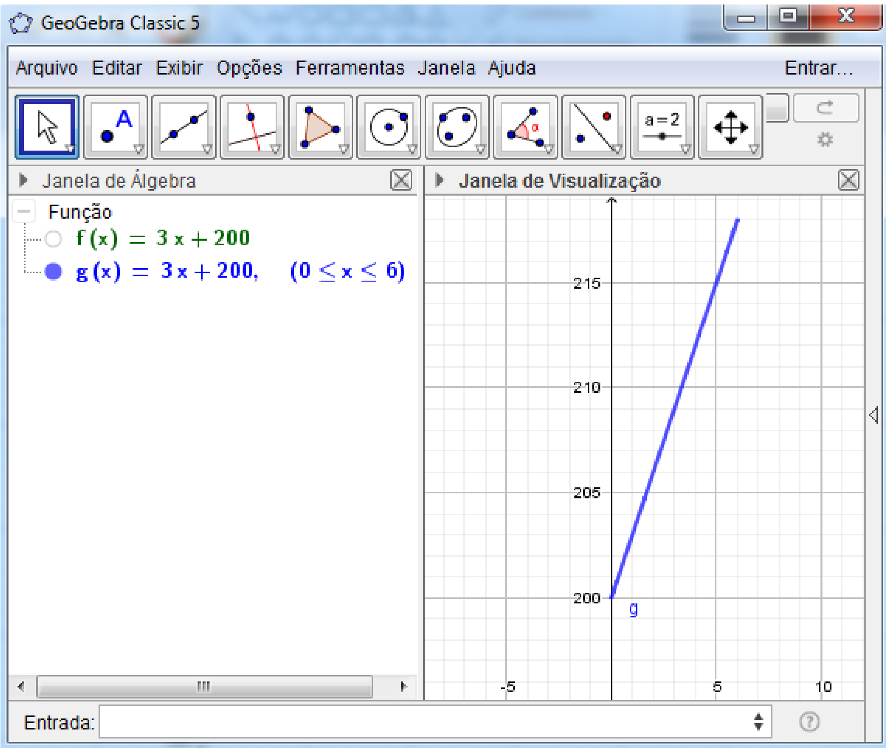
Ao conseguirem formular um registro algébrico que represente a situação descrita, o aluno poderá compreender as relações existentes entre os conceitos matemáticos envolvidos, apesar de que esperamos que tenham dificuldade para isso, pois estas diferentes formas de representar um mesmo objeto matemático podem esbarrar em obstáculos epistemológicos existentes na construção de seu conhecimento matemático.

A construção gráfica com o uso do geogebra deve ser um momento importante para a exploração de algumas características presentes no estudo de função afim. Desta forma, deve ser feito questionamentos do tipo:

- Qual valor representa o coeficiente angular desta função? E em que aspecto este valor interfere no gráfico formado?
- Qual valor representa o coeficiente linear da função? De que forma este valor auxilia na construção de um gráfico?
- Esta função é crescente ou decrescente? Por quê?
- Qual é o seu domínio?

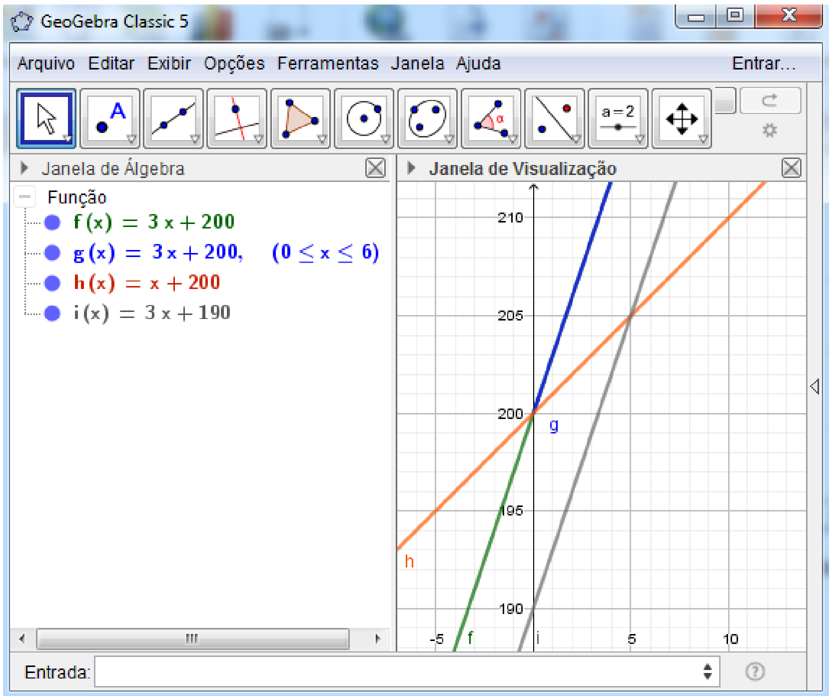
Com objetivo de melhorar a compreensão dessas características, sugerimos que seja construído um controle deslizante na tela do geogebra ou gráficos que representem outras funções, afim de proporcionar a comparação entre a interferência dos coeficientes angular e linear dessas funções. Também neste sentido, deve ser reforçada a ideia de domínio da função, deixando bem claro que, para representar graficamente a situação descrita, devemos considerar apenas o segmento de reta formado no intervalo $0 \leq x \leq 6$.

Figura 4 - Registro algébrico e gráfico da função $f(x) = 3x + 200$ no Geogebra, no intervalo $0 \leq x \leq 6$.



Fonte: própria autora.

Figura 5 - Registro algébrico e gráfico de diferentes funções no geogebra.



Fonte: própria autora.

Atividade 5 – Interpretar funções afins em diferentes representações e relacioná-las dentro de um mesmo contexto.

Situação-problema

Gustavo não se sente bem quando viaja de ônibus, por isso pretende ir de Sena Madureira à Rio Branco usando um taxi. Sabendo que a distância entre as duas cidades é de 140 km e que o valor cobrado pelo taxista é de R$ 1,70 por quilômetro rodado (desconsiderando paradas e/ou congestionamentos), mais R$ 6,00 de taxa fixa (bandeirada), responda:

a) Quanto Gustavo irá gastar se pagar este valor sozinho?
b) E se ele dividir esta despesa com mais 3 amigos, quanto cada um deve desembolsar?
c) Como podemos representar a situação descrita nesta atividade usando uma fórmula matemática?
d) Utilizando o programa geogebra, expresse graficamente esta situação.

Estratégias de resolução:

Com esta atividade, esperamos poder verificar se os alunos compreendem e identificam os valores constantes e variáveis de uma função (respectivamente são: valor de R$ 6,00 correspondentes a bandeirada e de R$ 1,70 correspondente ao valor cobrado por km rodado).

Uma estratégia esperada para a resolução da letra “a” desta atividade é que seja feita a conversão do registro em língua natural para o registro numérico, tendo em vista, este ser mais apropriado para a execução de cálculos, conforme quadro abaixo:

Registro de saída (língua natural)	**Registro de chegada (registro numérico)**
Gustavo não se sente bem quando viaja de ônibus, por isso pretende ir de Sena Madureira à Rio Branco usando um taxi. Sabendo que a distância entre as duas cidades é de 140 km e que o valor cobrado pelo taxista é de R$ 1,70 por quilômetro rodado (desconsiderando paradas e/ou congestionamentos), mais R$ 6,00 de taxa fixa (bandeirada). Quanto Gustavo irá gastar se pagar este valor sozinho?	Valor = 6,00 + 140 x 1,70

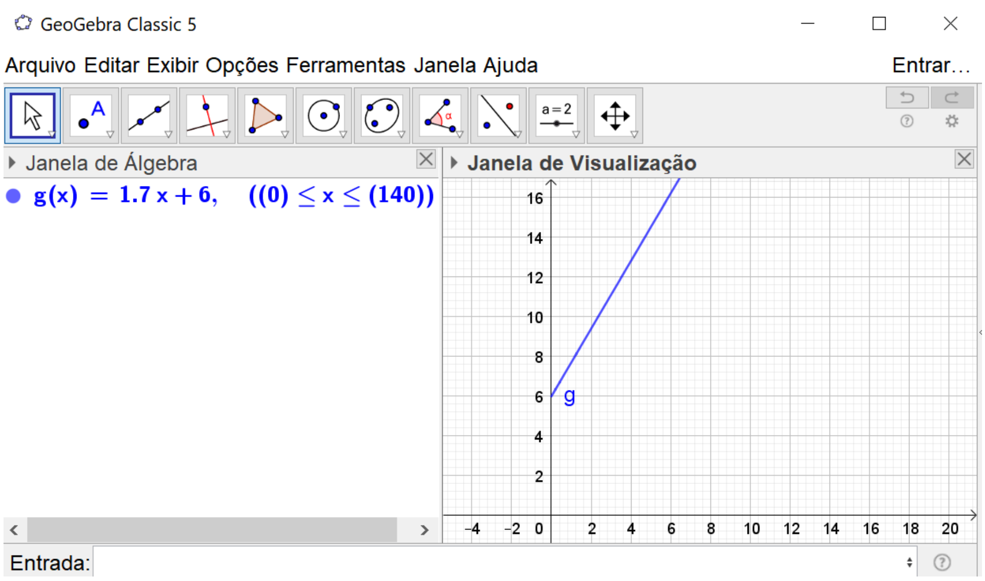
Quadro 1 – Conversão entre o registro em língua natural e o registro numérico.

Observamos ainda que, neste caso, nota-se uma transparência nas informações do problema, facilitando a conversão de um registro para outro e que os três critérios de congruência propostos por Duval (1993) são respeitados:

- ✓ Existe uma correspondência semântica entre os registros, ou seja, o significado dos símbolos se mantém iguais, mesmo havendo a troca de registro;
- ✓ Também é respeitada a univocidade semântica, isto é, cada termo do registro de saída tem seu único correspondente no registro de chegada e vice-versa;
- ✓ A ordem de apreensão nos diferentes registros é a mesma.

Na construção do gráfico também podem ser feitos questionamentos sobre o crescimento e decrescimento da função e qual deve ser o domínio para que o gráfico represente a situação descrita.

Figura 6 - Registro algébrico e gráfico da função $g(x) = 1.7x + 6$ no GeoGebra.



Fonte: própria autora.

Atividade 6 – Construir modelos empregando a função polinomial de 1º grau, para resolver problemas em contextos diversos, com apoio de tecnologias digitais.

Situação-problema

Para fazer uma corrida em seu taxi, Ronaldo cobra R$ 4,00 a bandeirada (taxa fixa), mais R$ 2,00 por quilômetro rodado. Podemos organizar estes valores em uma fórmula que permita calcular o preço de qualquer corrida que Ronaldo faça em seu taxi de acordo com o total de quilômetros que ele percorra. Com base nesta situação, responda às questões a seguir:

a) O que é a lei de formação de uma função?

b) Sendo y o preço em reais da corrida e x o número de quilômetros rodados pelo taxi, determine a lei que de formação desta função.

c) Suponha que Ronaldo faça uma corrida com percurso igual 10 km. Quanto o cliente deve pagar por esta corrida?

d) Construa uma tabela que relacione o número de quilômetros rodados com o preço que deve ser pago. Obs. Você mesmo deve escolher cinco distâncias diferentes para montar a tabela.

e) Faça esta mesma construção da tabela, mas, agora, utilizando o *software* Geogebra Classic 5. Para isso, clique no botão Exibir e escolha a opção Planilha Ctrl+Shift+S. Para incluir os dados, você deve escrever as grandezas que são trabalhadas na situação:

Planilha

	A	B	C	D
1	Distância percorrida (x) em km			
2	Valor pago pelo cliente (y) em R$			

. Em seguida, deve incluir os valores escolhidos para a distância percorrida e, na outra linha, em cada coluna, deve dar o comando necessário para que apareça o valor correspondente, por exemplo: na linha 1 da coluna B, podemos digitar "**05**" e na linha 2 da mesma coluna, digitamos "**=B1*2+4**" e teclamos "enter" ou outra tecla que permita sair deste espaço. Com este comando irá aparecer o resultado "**14**" no campo B2, conforme imagem a seguir:

Planilha

	A	B
1	Distância percorrida (x) em km	5
2	Valor pago pelo cliente (y) em R$	14

. Depois de preencher toda a tabela, verifique se os resultados encontrados estão de acordo com o que você tinha previsto.

f) Utilizando o *software* GeoGebra, expresse graficamente esta situação e compare com a tabela que você construiu.
g) Caso não fosse cobrada a taxa fixa denominada de bandeirada, como seria a lei de formação desta nova função?
h) Utilize o *software* GeoGebra para representar o gráfico desta nova função e compare-os.

Estratégias de resolução:

No item **(a)** desta atividade, os alunos devem ser levados à compreensão de que a lei de formação de uma função nada mais é do que uma regra matemática que define exatamente como tal função deve ser representada, ou seja, é uma regra que expressa a relação existente entre os elementos de dois conjuntos. No caso da função afim, temos $y = ax + b$, com a e b sendo números reais e $a \neq 0$.

Já no item **(b)**, o objetivo é que os alunos consigam realizar a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico, para isso, eles precisam compreender e identificar os valores constantes e variáveis em uma função afim (que respectivamente, neste caso, são: valor de R$ 4,00 correspondente à bandeirada e de R$ 2,00 correspondente ao valor cobrado por km rodado), e que, substituídos na expressão algébrica $y = ax + b$, temos $y = 2x + 4$.

Feita a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico, no item **(c)**, a ideia é que o aluno utilize esta lei de correspondência que ele encontrou para responder a questão. Assim, em $y = 2x + 4$, como temos y sendo o preço em reais da corrida e x representando o número de quilômetros rodados pelo taxi, se o motorista percorrer uma distância de 10 km, teremos: $y = 2 \cdot (10) + 4$, portanto, $y = 24$, o que quer dizer que o cliente deve pagar R$ 24,00 pela corrida.

Observamos que nesta situação existe uma transparência nas informações do problema, facilitando a conversão de um registro para outro e que os três critérios de congruência propostos por Duval (1993) são respeitados:

- ✓ Existe uma correspondência semântica entre os registros, ou seja, o significado dos símbolos se mantém iguais, mesmo havendo a troca de registro;
- ✓ Também é respeitada a univocidade semântica, isto é, cada termo do registro de saída tem seu único correspondente no registro de chegada e vice-versa;
- ✓ A ordem de apreensão nos diferentes registros é a mesma.

Na construção da tabela, o aluno deve se sentir livre para a escolha dos valores que serão substituídos nas distâncias percorridas. O professor deve verificar se o tratamento efetuado em todas as substituições estão de acordo. A seguir, apresentamos uma das possibilidades de respostas:

Distância percorrida (x) em km	05	10	15	20	25
Valor pago pelo cliente (y) em R$	14	24	34	44	54

Também podemos representar esta tabela utilizando o *software* GeoGebra:

Figura 7 - Planilha construída a partir da função *f(x) = 2x + 4*

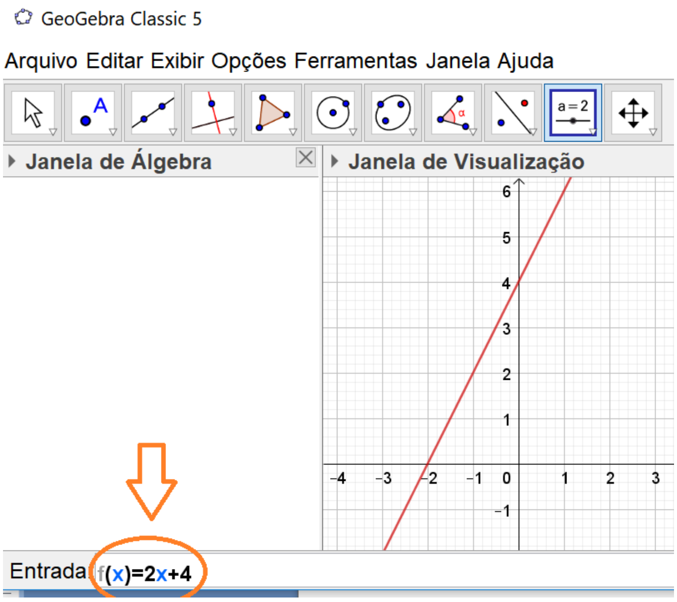
Planilha

	A	B	C	D	E	F
1	Distância percorrida (x) em km	5	10	15	20	25
2	Valor pago pelo cliente (y) em R$	14	24	34	44	54

Fonte: Própria autora

Para a construção gráfica, será necessário inserir no campo entrada a lei de formação da função, no caso, "**f(x) = 2x + 4**" e teclar "enter", conforme imagem, a seguir:

Figura 8 - Construção do gráfico da função *f(x) = 2x + 4* no GeoGebra

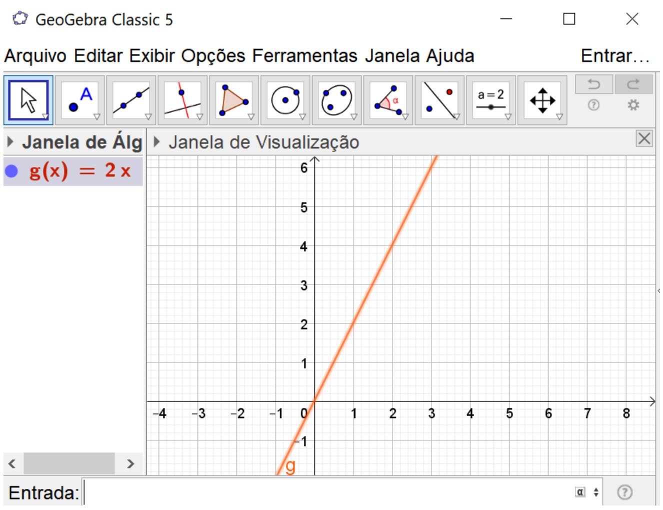


Fonte: Própria autora

Neste momento da atividade, podem ser feitos alguns questionamentos sobre o crescimento e decrescimento da função e qual deve ser o domínio para que o gráfico mostrado na tela do computador represente a situação descrita. Também é importante reforçar a ideia de que este problema não admite valores negativos para *x* já que este valor se refere ao preço cobrado por cada km percorrido pelo taxista.

Ao serem questionados sobre a organização de uma lei que relacione a distância percorrida com o preço a pagar para corridas sem a taxa fixa (bandeirada), os alunos devem observar que o valor que deve ser retirado da expressão algébrica é o 4, ou seja, a correta conversão, neste caso, seria $y = 2x$ e o gráfico a ser construído no GeoGebra deve ser o da figura a seguir:

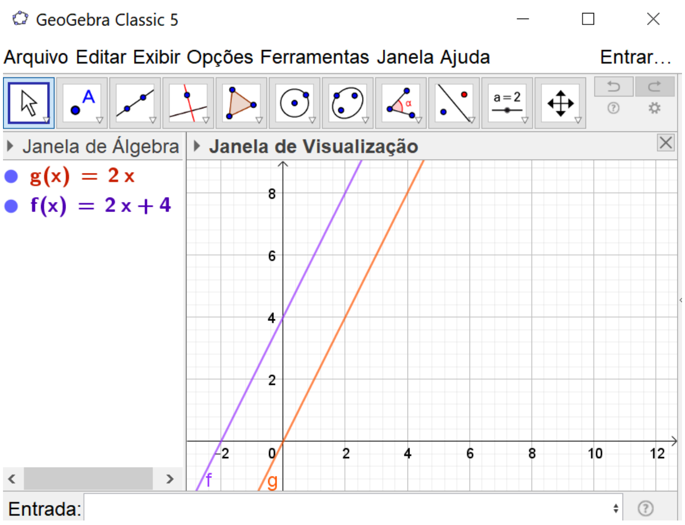
Figura 9 - Construção do gráfico da função $g(x) = 2x$ no GeoGebra



Fonte: Própria autora

Quanto à comparação entre as duas funções, graficamente, temos:

Figura 10 - Construção dos gráficos das funções $f(x)=2x+4$ e $g(x)=2x$ no GeoGebra



Fonte: Própria autora

Podemos observar que os gráficos formam duas retas paralelas, que a função f(x) corta o eixo y no ponto (0, 4) e a função g(x) corta o eixo y no ponto (0, 0). É interessante comentar que este ponto de corte é indicado pelo *coeficiente linear* da função que, no caso, é o valor de b na expressão algébrica $y = ax + b$.

Já o paralelismo existente entre as retas é consequência do *coeficiente angular* da função (o valor de a em $y = ax + b$), que nas duas situações é igual a 2, fazendo com que ambas as retas formem o mesmo ângulo com o eixo Ox.

Caso o professor queira proporcionar outros questionamentos a seus alunos, deve incluí-los no seu planejamento a fim de evitar improvisos.

Atividade 7 – Interpretar funções afins em diferentes representações e relacioná-las dentro de um mesmo contexto.

Situação-problema

Um grupo de amigos resolveu comemorar o aniversário de Marina fazendo uma excursão para o litoral brasileiro. Como meio de transporte para este passeio, resolveram alugar uma van em uma locadora de veículos. Ao pesquisarem na cidade, encontraram duas empresas de aluguéis de veículos, onde conseguiram as seguintes informações:

- Na Locadora **A**, ficaram sabendo que a empresa cobrava apenas o valor de R$ 2,00 por cada quilômetro percorrido, o que permitia a escrita de $f(x) = 2x$, para expressar o valor pago pelo aluguel em função do total de quilômetros rodados.
- E, na locadora **B**, descobriram a existência de uma taxa fixa de R$ 250,00, além do valor cobrado por cada quilômetro rodado. Nesta situação, eles apenas observaram alguns valores anotados em uma tabela que se referiam aos aluguéis pagos pelos últimos três clientes da loja, conforme vemos, a seguir:

Quantidade de quilômetros percorridos	180	284	528
Preço a pagar (R$)	520	676	1042

Sabendo que a distância que o grupo pretende percorrer é de aproximadamente 550 quilômetros, já contando o trajeto de ida e volta, responda:

a) Um dos amigos de Marina afirmou: “É sempre mais vantajoso alugar o veículo da Locadora **A**, pois eles não cobram a taxa fixa de R$ 250,00”. Você concorda com esta afirmação? Justifique sua resposta.
b) Qual locadora apresenta preços melhores para essa viagem? Justifique sua resposta.
c) Sabendo que o valor pago pelo aluguel depende da quilometragem percorrida pelo veículo, como podemos expressar algebricamente a situação apresentada pela segunda locadora?
d) Utilizando o *software* GeoGebra, construa os gráficos correspondentes a cada uma dessas funções.
e) Analisando os dois gráficos, verifique se sua resposta para o item (b) está correta.

Estratégias de resolução:

É necessário que o aluno compreenda o quanto antes que deve estabelecer uma estratégia que possibilite a comparação entre as duas funções.

A apresentação dos dados que permitem obter o valor do aluguel de cada empresa foi, propositadamente, realizada em linguagens diferentes (algébrica e tabular), para provocar a conversão entre essas representações com objetivo de comparar estes dados.

No item **(a)**, os alunos podem ser levados a concordarem com a afirmação apresentada por não terem, ainda, feito uma real comparação entre as duas situações. Os mais atentos podem observar que um dos valores mostrados na tabela da Locadora **B** é inferior ao valor que a Locadora **A** cobraria pelo mesmo percurso, mesmo sem taxa fixa.

Caso os alunos tenham dificuldade para responderem o item **(b)** e esta dificuldade esteja ligada à falta de compreensão do valor cobrado pela locadora **B**, o professor pode propôr uma reflexão sobre os preços cobrados por esta locadora, conforme apresentados na tabela. Um questionamento possível é: se esta locadora cobra R$ 250,00 de taxa fixa e um aluguel sai por R$ 520,00, tendo percorrido 180 km, qual é o valor cobrado por cada km percorrido? Uma possível estratégia a ser adotada é subtrair do valor pago o valor correspondente à taxa fixa, ou seja, fazer R$ 520,00 - R$ 250,00, o resultado obtido será o valor gasto apenas com a quilometragem que, dividido por 180 (total de km percorridos), fornece o valor cobrado por cada km rodado.

Já para a formação de uma representação algébrica desta situação, é interessante que seja explorada a relação existente entre a quantidade de quilômetros percorridos e o preço a pagar pelo aluguel. Ao entenderem que existe uma relação de dependência entre estas grandezas e que esta relação é um caso de função polinomial do 1º grau, também chamada por função afim, os alunos devem ser instigados a converterem os dados apresentados na tabela para a representação da forma $f(x) = ax + b$, onde x é a variável independente (quantidade de km percorridos), $f(x)$ é a variável dependente (valor pago pelo aluguel), a é o coeficiente de x (valor cobrado por cada km percorrido) e b é o termo constante (valor fixo).

Desta forma, pode ser utilizada uma das relações apresentadas na tabela para equacionar o problema, por exemplo, considerando a informação de que, por 180 km o cliente deve pagar R$ 520,00 e, sabendo que o valor fixo é de 250 (taxa cobrada pela locadora), podemos substituir estes valores em $f(x) = ax + b$.

Assim, temos:

$520 = a.180 + 250$

$a.180 = 520 - 250$

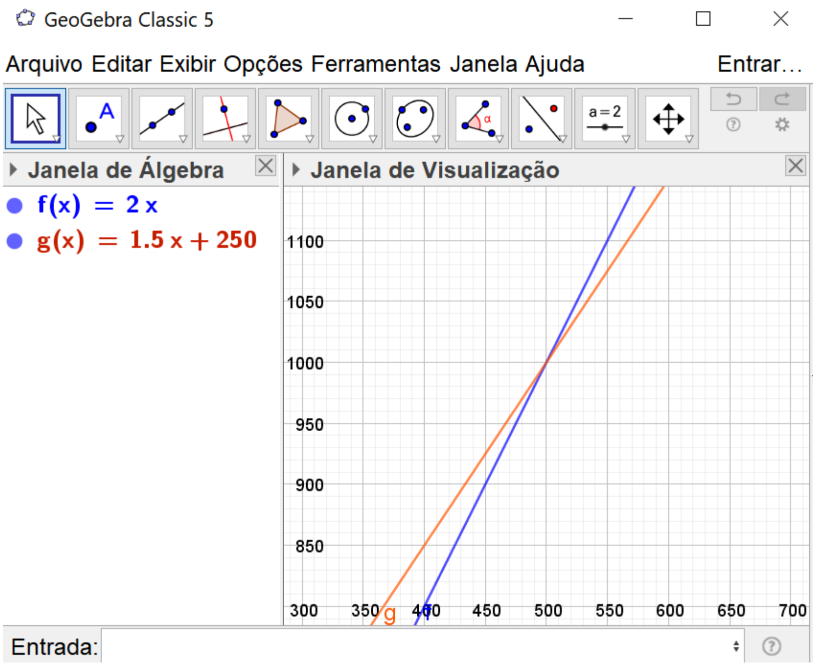
$a.180 = 270$

$a = \frac{270}{180}$

a = 1,5 ou seja, é cobrado R$ 1,50 por cada km percorrido com o veículo e a expressão algébrica da função é da forma $f(x) = 1{,}5x + 250$.

Na construção gráfica, estes devem ser construídos em uma mesma janela de visualização, a fim de facilitar a comparação entre o crescimento de cada função, conforme figura, a seguir:

Figura 11 - Construção dos gráficos das funções $f(x)=2x$ e $g(x)=1{,}5x+250$ no GeoGebra



Fonte: Própria autora

Espera-se que a visualização gráfica facilite a compreensão de como o coeficiente angular (coeficiente de x) interfere na inclinação da reta Neste caso, como na função $f(x)=2x$ temos $a = 2$ e em $g(x)=1{,}5x+250$ temos $a = 1{,}5$, a inclinação de $f(x)$ é menor que a de $g(x)$, isto é, quanto maior for o valor deste coeficiente, maior será o ângulo formado pela reta em relação ao eixo Ox.

Em uma análise contextualizada da situação, podemos afirmar que, para um percurso menor que 500 km é mais vantajoso o aluguel da Locadora **A** e, para um percurso maior que 500 km é mais vantajoso o aluguel da Locadora **B**, pois é neste valor que as funções se igualam, conforme vemos na imagem anterior.

Esta análise permite que os alunos reflitam sobre sua resposta para o item **(b)**. Eles precisam observar que nem sempre a Locadora **A** oferecerá melhores preços em relação a Locadora **B**, ou seja, a taxa fixa (coeficiente linear) tem maior interferência nos valores cobrados inicialmente, mas a elevação desses valores depende exclusivamente do valor cobrado por cada quilômetro percorrido (coeficiente angular).

Atividade 8 – Utilizar o *software* GeoGebra para promover a analise de como os coeficientes angular e linear interferem na construção gráfica de uma função afim.

Situação-problema

O professor de Gustavo, após tecer explicações sobre as características e propriedades da função afim, levou os alunos para o laboratório de informática da escola e solicitou que eles utilizassem o *software* GeoGebra para construir algumas representações gráficas dessas funções. Entre estas representações constavam as funções $f(x) = 2x - 5$ e $g(x) = -2x - 5$, no entanto, como Gustavo não havia prestado atenção nas explicações do professor, ele não entendeu o motivo dos gráficos ficarem ao contrário.

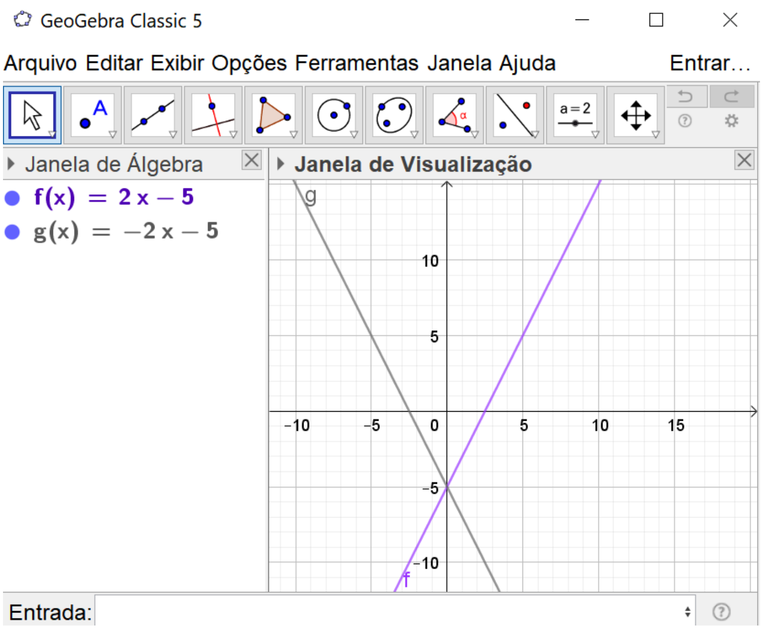
Diante disso, qual seria uma justificativa que poderia ser usada para explicar este fato a Gustavo? Utilize o *software* GeoGebra para construir esses gráficos e verifique o que mais podemos observar nessas construções.

Estratégias de resolução:

Esta atividade foi pensada para servir de apoio à atividade anterior. Neste caso, as conversões solicitadas mostram com muita clareza como o coeficiente angular interfere no ângulo que a reta faz com o eixo *Ox*.

As construções descritas no problema estão apresentadas na figura, a seguir:

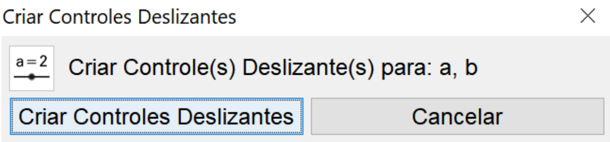
Figura 12 - Construção dos gráficos das funções $f(x)=2x-5$ e $g(x)=-2x-5$ no GeoGebra



Fonte: Própria autora

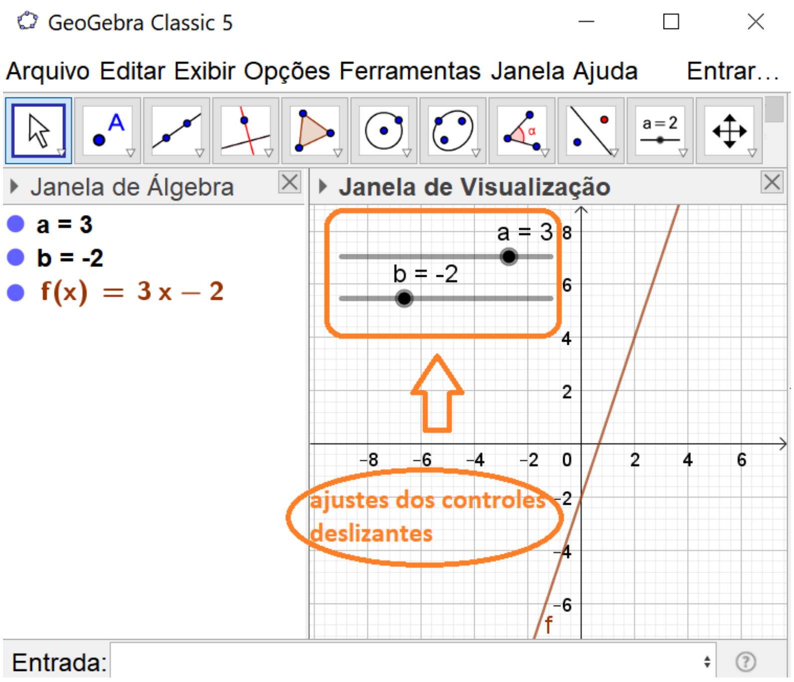
A construção de outros gráficos pode ser proposta pelo professor, como, também, a criação de controles deslizantes para os coeficientes de uma função genérica $f(x) = ax + b$ e, a partir daí, explorar estes comandos de forma a deixar o assunto claro.

A criação de controles deslizantes pode ser feita com a inserção da expressão genérica "$f(x) = ax + b$" no campo entrada, a seguir, aparecerá a caixa de diálogo:



, clicando na opção "criar controles deslizantes", a ação será automática e a manipulação dos valores para *a* e *b* serão através de comandos mostrados na janela de visualização, conforme vemos na figura, a seguir:

Figura 13 - Construção de controles deslizantes no *software* GeoGebra.



Fonte: Própria autora

A aplicação desta atividade pode ser aproveitada também para questionar os alunos sobre:

- Como podemos reconhecer se uma função afim é crescente ou decrescente quando ela está representada na forma algébrica?
- E quanto à representação gráfica? O que nos permite tipificar uma função afim como crescente ou decrescente?
- O que você entende por variável?

- Na primeira função $f(x) = 2x - 5$, qual a variável dependente e qual a variável independente? Explique.
- Como denominamos a função $g(x) = 3x$?
- Apesar de possuir uma classificação específica, podemos dizer que ela é também uma função afim?
- Qual o valor do termo independente (valor fixo), neste caso?
- Quando isso ocorre, o gráfico intercepta os eixos em que ponto? Utilize o software GeoGebra para conferir sua resposta.
- Como denominamos a função $h(x) = 7$?
- Apesar de possuir uma classificação específica, podemos dizer que ela é também uma função afim?
- Qual o valor da variável independente neste caso? E termo independente?
- O gráfico desta função é uma reta? Utilize o *software* GeoGebra para conferir sua resposta.

Acreditamos que estas reflexões podem contribuir para a construção de uma aprendizagem mais significativa sobre o tema estudado.

Atividade 9 – Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional e recorrendo a *softwares* de álgebra e geometria dinâmica.

Situação-problema

André gosta muito de fotografias e, como está chegando seu aniversário, seus amigos resolveram fazer uma "vaquinha" para comprar uma máquina fotográfica para presenteá-lo. Após algumas pesquisas de preço, colocaram como opções de compra quatro tipos de máquinas fotográficas, a primeira opção custa R$ 1800,00, a segunda R$ 2592,00, a terceira R$ 4776,00 e a quarta opção sai por R$ 3096,00. Caso optem pela primeira opção, cada amigo deve colaborar com um valor de R$ 150,00, pois, cada um deles deve contribuir com o mesmo valor para a compra do presente. A partir dessas informações, responda aos questionamentos a seguir:

a) Relacione em uma tabela os valores que cada amigo deve dar de acordo com cada uma das opções de presente.
b) Quais as grandezas que estão variando neste problema?
c) Essas grandezas são proporcionais? Por quê?
d) Observe o preenchimento da tabela do item (a). que número se manteve constante?
e) O que este número representa no problema?
f) Como podemos representar esta situação utilizando uma expressão algébrica, onde *f(x)* representa o valor do presente e *x* representa a contribuição de cada amigo?
g) Utilize o *software* GeoGebra para construir o gráfico correspondente a esta função.
h) Apesar de possuir uma classificação específica, podemos dizer que ela ainda é uma função afim? Qual é esta classificação?
i) O que acontece com o termo independente neste caso?
j) Quando isso ocorre o gráfico intercepta os eixos em que ponto?
k) Isso irá ocorrer em todos os gráficos das funções em que a termo independente for nulo? Por quê?

Estratégias de resolução:

Um dos objetivos desta atividade é promover a reflexão sobre as características da função linear, tendo em vista esta ser um caso particular da função afim, que pode ser utilizada para representar inúmeras situações frequentes no cotidiano do aluno.

No item **(a)**, os alunos devem construir a seguinte tabela:

Valor do presente em (R$)	**Contribuição de cada amigo em (R$)**
1800	150
2592	216
4776	398
3096	258

Como o enunciado do problema traz a informação de que, pela compra da máquina fotográfica que custa R$ 1800,00 cada amigo deve contribuir com R$ 150,00, podem concluir que (1800 ÷ 150 = 12), ou seja, existe 12 amigos dividindo o valor deste presente.

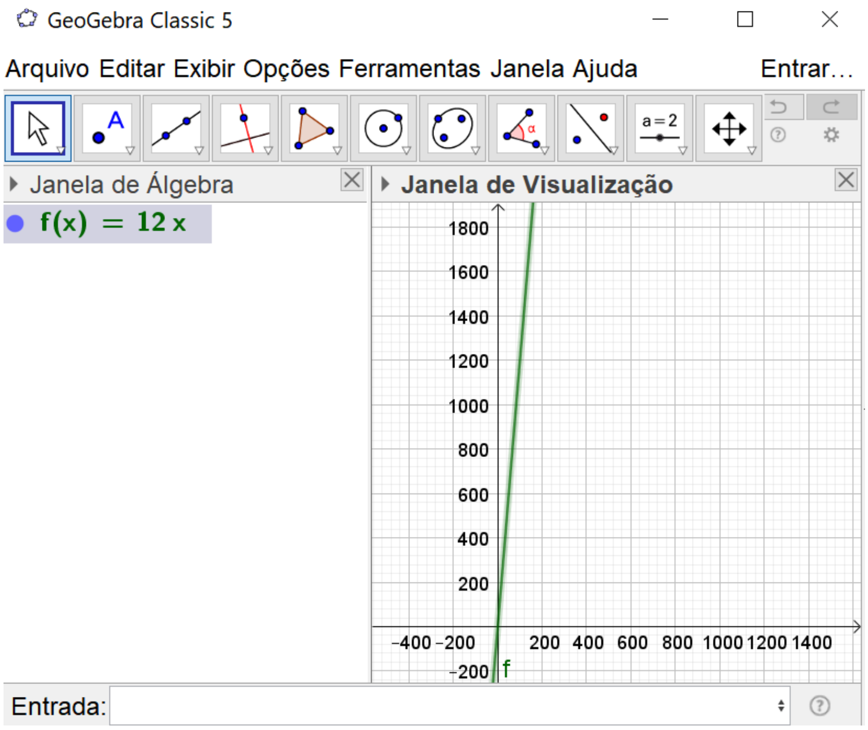
No item **(b)**, é importante que eles entendam que a quantidade de amigos não é variável no problema mas, sim, o valor do presente e a contribuição de cada amigo. Também deve ser destacada a relação de proporcionalidade existente na situação. Para responderem aos itens **(c), (d)** e **(e)**, os alunos devem observar que, quando duas grandezas x e y são diretamente proporcionais, a razão $\frac{y}{x}$ entre o valor de y e o valor correspondente de x é constante, neste caso, igual a 12 e representa o total de amigos que dividirá o valor do presente.

Se o valor dessa constante é a, então $\frac{y}{x} = a$, ou seja, $y = a.x$. Desta forma, dado o valor de x, para obtermos o valor correspondente de y, basta multiplicarmos x pela constante a. Então, dizemos que a expressão $y = a.x$ define y como uma função linear de x, e a situação descrita no problema pode ser representada pela expressão $y = 12x$, onde y representa o valor do presente e x representa a contribuição de cada amigo, (conversão solicitada no item **(f)**).

Esperamos, ainda, que a construção gráfica desta função no GeoGebra facilite a observação de como as variáveis do problema se relacionam.

A figura seguinte apresenta esta construção, conforme solicitado no item **(g)**.

Figura 14 - Construção do gráfico da função *f(x) = 12x* no *software* GeoGebra.



Fonte: Própria autora

Para a correta resolução dos itens **(h), (i), (j)** e **(k)**, os alunos devem compreender que o problema se trata de um caso de função afim, no entanto, por existir uma relação de proporcionalidade entre as grandezas envolvidas, também podem classificar a situação dada como sendo uma função linear. A observação de que o gráfico deste tipo de função sempre passa pela origem do plano cartesiano, ou seja, intercepta ambos os eixos no ponto (0, 0), também pode ser feita a partir de sua construção no GeoGebra e isso deve ser explorado como forma de esclarecer a interferência que o termo b exerce na função.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, J. M.; SARAIVA, M. J. **Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito função.** Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa, México, v. 15, n. 2, p. 137-169, 2012. Disponível em: <http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362012000200002> acesso em: 12 abril 2019.

CHAVES, M. I. de A.; CARVALHO, H.C. de. **Formalização do conceito de função no Ensino Médio:** uma sequência de ensino-aprendizagem. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004, Recife. Anais do VIII ENEM. Recife: 2004. p. 1-18. Disponível em: <http://www2.ufersa.edu.br/portal/view/uploads/setores/114/conceito_de_fun%C3%A7%C3%A3o.pdf > acesso em: 12 abril 2019.

MAGARINUS, R. **Uma proposta para o ensino de funções através da utilização de objetos de aprendizagem.** 2013, 99f. Dissertação (Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/10933/MAGARINUS%2C%20RENATA.pdf?sequence=1&isAllowed=y> acesso em: 08 abril 2019.

MESA, Vilma. **Functions in Middle School Mathematics Textbooks**: Implications for a Functional Approach to Álgebra. In: STUDY CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICAL INSTRUCTION (ICMI), 12, 2001, Melbourne. Proceedings of the 12^{th} ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Álgebra. Melbourne: Helen Chick et al. – University of Melbourne 2001, v. 1. p. 454-461.

ROCHA, S. M. C. da. **Investigação histórica na formação de professores de matemática:** um estudo centrado no conceito de função. 2008, 187 f. dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2008. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/16042> acesso em: 12 abril 2019.