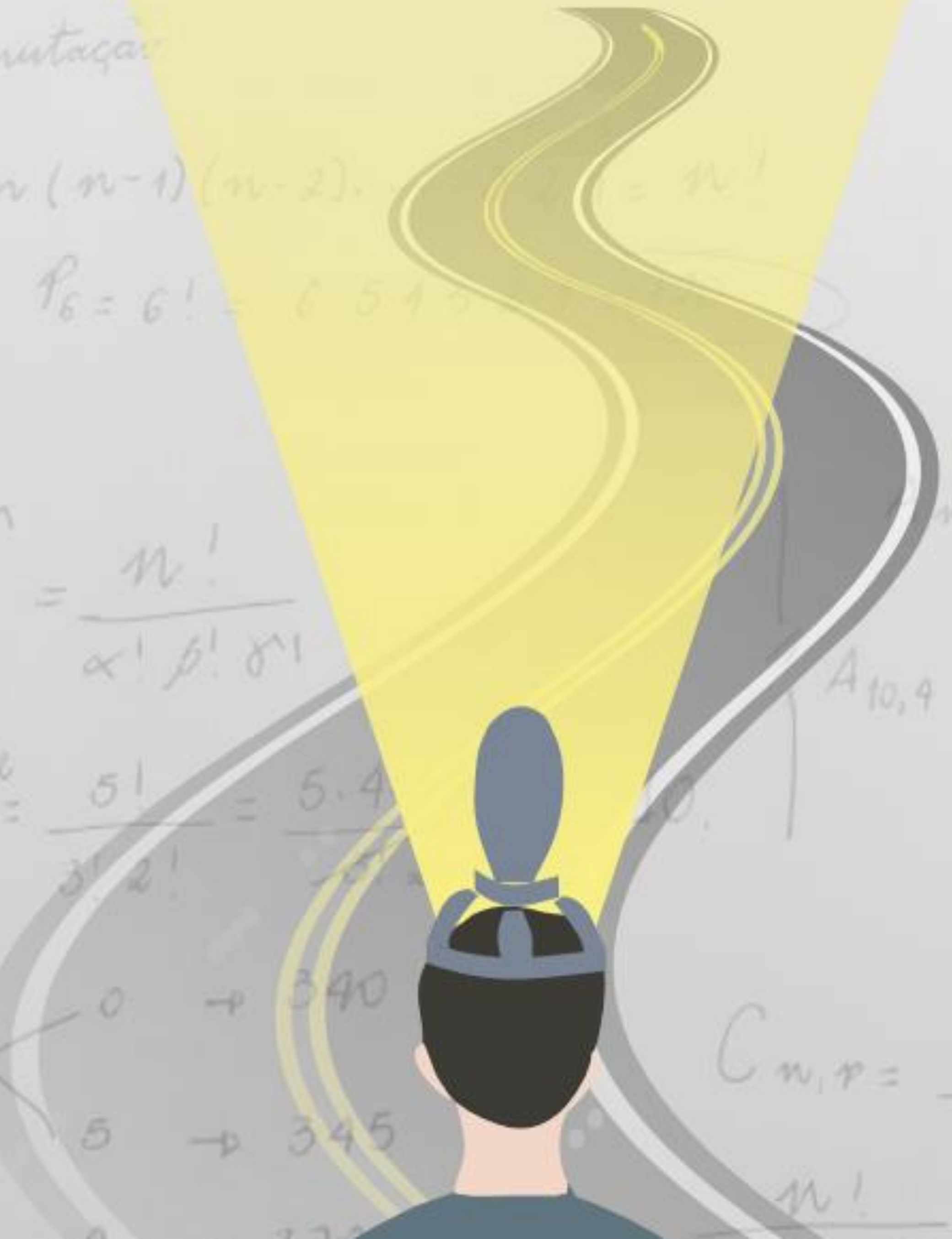
Inayara Rodrigues de Carvalho

Análise Combinatória

Sugestão de atividades com uso da ferramenta Power Point para anos iniciais do Ensino Fundamental e Médio

Ano - 2018



Análise Combinatória

Sugestão de atividades com uso da ferramenta Power Point para anos iniciais do Ensino Fundamental e Médio

Inayara Rodrigues de Carvalho

Rio Branco - AC

Abril de 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS E DA NATUREZA- CCBN
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Inayara Rodrigues de Carvalho

Análise Combinatória
Sugestão de atividades com uso da ferramenta Power Point para anos iniciais do Ensino Fundamental e Médio

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Francisco Alves de Melo

Produto Educacional elaborado a partir da dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado no Ensino de Ciências e Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre no ensino de Ciências e Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Gilberto Francisco Alves de Melo
Ufac- Orientador
Profa. Dra. Simone Maria Chalub Bandeira
Ufac
Profa. Dra. Mônica Lana da Paz
IFMG

Rio Branco - Ac, 13 de abril de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAC

C331a Carvalho, Inayara Rodrigues de, 1979-
Análise combinatória: sugestões de atividades com uso da ferramenta Power Point para os anos iniciais do Ensino Fundamental e Médio / Inayara Rodrigues de Carvalho. – 2018.
29 f. : il. ; 30 cm.

Produto Educacional resultado da pesquisa de Dissertação intitulada: “Manifestações do saber pedagógico do conteúdo específico de análise combinatória: o caso da professora que atua no Programa de Formação Continuada – Poronga médio.” – Mestrado Profissional Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Acre. Rio Branco, 2018.
Orientador: Prof. Dr. Gilberto Francisco Alves Melo.

1. Produto educacional. 2. Matemática – Estudo e ensino. 2. Power point – Ferramenta educacional. 3. Ensino médio e fundamental. I. Título.

CDD: 510.7

Bibliotecária: Vivyanne Ribeiro das Mercês Neves CRB-11/600

Arte da Capa - Significado

A partir da imagem elaborada para composição da arte da capa deste produto educacional, objetivo de demonstrar que a busca do conhecimento e da aprendizagem leva o homem a descobrir caminhos diversos para dar sentido ao mundo e as informações que recebe diariamente seja pela escola ou nos vários espaços sociais que interage; consequentemente tais caminhos abre um leque de possibilidades a novas conquistas.

Analogamente, a Poronga, instrumento utilizado pelos seringueiros em suas caminhadas para iluminar e ver adiante, na imagem idealizada, simboliza uma luz que o professor pode manter acesa no ensino da Matemática. Os números dispostos (soltos) remetem a disciplina em si, que na maioria das vezes, é transmitida de maneira mecânica, e, portanto, não é compreendida como importante e essencial para vida em sociedade, uma vez que não se dá sentido a ela. Essa situação é diferente quando o homem, na figura do professor, "ilumina" o "caminho da Matemática" dando sentido a razão de ser dos números a partir da sua utilização diária.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este produto é fruto de uma pesquisa de mestrado[1] e sua finalidade é dar suporte ao trabalho docente do Projeto Poronga Ensino Médio, e também para os anos iniciais do ensino fundamental e médio, envolvendo o objeto de estudo “Análise Combinatória”, tendo por base o princípio fundamental da contagem ou princípio da multiplicação que inicia-se nos anos iniciais do Ensino Fundamental com retomada e aprofundamento nos anos finais do Ensino Fundamental e Médio.

Para isso, como produto deste estudo, apresenta-se (10) dez situações problemas, envolvendo raciocínio combinatório, 06 das quais foram aplicadas a estudantes do Programa Especial do Ensino Médio (PEEM), vinculado à Secretaria de Estado de Esporte e Educação do Acre, foi registrada e posteriormente analisada, durante a pesquisa vinculada a Universidade Federal do Acre (Ufac).

Nesta direção, apresenta-se os exemplos observados em sala de aula durante a pesquisa, enquadrando-os nos conteúdos para o Ensino Médio indicados por Sabo (2010) e elaborando outros que podem compor o acervo de situações problemas envolvendo combinação, permutação, arranjos e partições.

Desta forma, o produto educacional tem o objetivo de contribuir com a formação continuada de professores da Educação Básica do Estado, no que diz respeito à Análise Combinatória por se constituir em ferramenta para diversas áreas do conhecimento científico devido o vasto campo de aplicação e também por permitir elaborar situações problemas que possibilitam o aluno realizar conjecturas e desenvolver capacidade de argumentação para defender o caminho que percorreu para chegar a um dado resultado, conforme interpreta o enunciado.

Por fim, boa leitura e reflexões!

[1] CARVALHO (2018), pesquisa desenvolvida no Programa de Mestrado no Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Acre.

ALGUMAS REFLEXÕES SOBRE ENSINAR-APRENDER COMBINATÓRIA

Afinal ensinar-aprender[2] combinatória é importante para a compreensão de conceitos matemáticos? Em que este saber e conhecimento contribui? Ora, todos os dias muitos brasileiros jogam na loteria esperando ficar milionários, alguns escolhem números aleatórios para jogar, outros, repetem sempre os mesmos números para ver se um dia têm sorte, porém existem aqueles que vão além e procuram fazer combinações com números que muitas vezes foram sorteados pensando na probabilidade de acertar. Isso em se tratando de quem gosta de jogo.

No entanto, sempre há escolhas e arranjos para fazer no dia a dia: é olhando as tantas roupas que se tem à disposição para combinar peças, na linguagem da moda "*look*", para combinar com sapato, óculos, chapéu, brincos ou outros adereços. Na sorveteria quando se dispõem vários sabores e precisa escolher os de sua preferência para fazer um arranjo, ou ainda, no restaurante *self-service* para compor um arranjo para o almoço diante de tantas opções. Enfim, todos os dias as pessoas fazem escolhas, arranjos, combinações, partições, etc.

Sabe-se que o pensamento combinatório é desenvolvido no dia a dia, muito antes da criança ingressar na escola, porém, partindo de situações do cotidiano, a escola formaliza e trata dentro do eixo números e operações ao longo de toda a Educação Básica de forma mais simples e recorrendo a material manipulativo ou visual nos anos iniciais e parte do Ensino Fundamental II, tornando mais complexos os agrupamentos, até o final do Ensino Médio.

No Ensino Médio, observa-se como conteúdo específico de Análise Combinatória a ensinar: partição, permutação, arranjo e combinação[3], a partir das estratégias para agrupar coleções de objetos seguindo certos critérios de contagem, pelo caminho do princípio aditivo ou multiplicativo, base para este estudo, sobretudo para fazer cálculos extensos.

No entanto, ensinar tal conteúdo, inicialmente com agrupamentos mais simples e depois mais extensos vem demonstrando entraves no aprendizado por entendimento equivocado de conceito, por exemplo, distribuir como dividir em problemas que envolvem permutação e arranjo, dificuldade de uso de procedimentos

---

[2] Para Charlot (2000) o saber-aprende só ocorre nas relações eu-outro sendo construídas a partir de um determinado conteúdo e sua forma de representar que sirva de referência.

[3] Sabo (2010) indica conteúdos para o ensino médio.

recursivo que os leve a formulação de todas as possibilidades; o não uso da árvore de possibilidades ou sua construção inadequada, ou seja, não conseguem explicar de onde tirou qual número e caminho percorrido. Tais erros decorrem das dificuldades de distinguir as diferenças entre problemas que envolviam arranjo e combinação[4].

Por isso, considera-se importante o contato com problemas de contagem desde os anos iniciais para que o aluno compreenda o princípio aditivo e multiplicativo, e utilize desde cedo várias representações possíveis para dar resposta a uma situação problema proposta em sala de aula: árvores de possibilidades, tabelas e diagramas[5].

Portanto, torna-se imprescindível o profissional do ensino conhecer o conteúdo específico que propõe o estudo para desenvolver o raciocínio combinatório, para que se atenha não só a fórmulas, que em alguns momentos não permitem resolver os problemas de contagem.

Torna-se, pois, fundamental o professor dominar o conteúdo específico e o pedagógico relacionado ao porquê de ensinar e como ensinar conceitos e procedimentos para resolver problemas de raciocínio combinatório, arranjos e emprego de fórmulas sem que o cálculo prevaleça sobre o estabelecimento de relações entre os agrupamentos[6].

Existem problemas combinatórios simples como aqueles que podem ser resolvidos com apenas uma operação, com ou sem repetição[7], que podem ser classificados em três tipos diferentes: de partição, de colocação e de seleção. Para melhor entendimento pontua-se assim:

- Problemas de partição têm por propósito dividir grupos e subgrupos, para determinar de quantas formas diferentes podemos fazer determinada seleção;
- Problemas de colocação trazem situações de n elementos, diferentes ou não, podem ocupar determinado lugar, desde que considerem suas peculiaridades, ou seja, se os elementos são iguais ou diferentes, se os lugares possuem ou

---

[4] Meneses (2001) aponta as dificuldades de aprendizagem de combinatória e os principais entraves, ao realizar estudo sobre esta temática com alunos de 14 anos de uma escola em São Paulo.

[5] Costa (2004) traz para o centro da reflexão o papel do professor para desenvolver a habilidade de raciocínio combinatório e a importância da familiaridade com este conteúdo.

[6] Bortoloti, Wagner e Ferreira (2011) chamam a atenção para o esquecimento de estudantes da formação inicial de habilidades em resolver problemas de contagem usando raciocínio multiplicativo ou aplicar fórmulas para combinação e/ou arranjo quando contextualizada.

[7] Roa, Rafael e Navarro-Palayo (2001) define o que considera ser um problema combinatória simples.

não ordenação; se os elementos serão colocados em tais lugares de acordo com uma determinada ordem existente;

- Problemas de seleção estão diretamente relacionados com amostras, sendo estes com mais grau de complexidade e mais direcionados ao ensino médio. Os problemas estão relacionados a esquemas de seleção que envolvem a apresentação de mais opções para se chegar a uma escolha.

Esta última, resulta da substituição pelos alunos da construção de tabelas, para uma resolução mais aritmética.

Assim, o produto deste estudo propõe apresentar algumas situações problemas para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, alguns conceitos de combinação, permutação e repartições, aportando em 10 (dez) situações problemas, sendo 06 (seis) observadas durante a realização da pesquisa: “Manifestações do saber pedagógico do conteúdo específico de Análise Combinatória: o caso da professora que atua no programa de formação continuada - Poronga Médio” e ainda, outros 04 (quatro) exemplos elaborados pela autora, como forma de contribuir tanto com o ensino, quanto com a aprendizagem dos professores participantes do Programa PEEM no Acre.

SITUAÇÕES PROBLEMAS DE COMBINATÓRIA

Apresenta-se 10 situações problemas e descreve em cada uma os vários recursos que o aluno pode dispor para resolver com base na interpretação do enunciado, tais como, árvore de possibilidades, tabela de dupla entrada, anagrama e fatorial.

Buscou-se assim, apresentar os problemas observados durante a pesquisa, mas também, ampliar as possibilidades ao resolver problemas de Análise Combinatória com combinação, permutação e partição.

Não é nosso objetivo propor inúmeras situações problemas, mas, demonstrar recursos e possibilidades ou caminhos possíveis para chegar a uma solução de forma mais adequada nas atividades proposta neste produto.

Atividade 1. Problema de partição

Contextualização: As diferentes maneiras de organizar objetos numa instante é muitas vezes um hábito que algumas pessoas têm para dar uma nova "cara" a um determinado ambiente. Muitas vezes é preciso analisar o espaço disponível para realizar a disposição dos objetos, verificar de que forma fica mais ou menos organizado e, assim, observar qual a disposição mais viável para o que se deseja no momento. Será que cabe uma reflexão como essa quando se trata de um número? Podemos escrever um mesmo número a partir de diferentes representações? No ano de 2011 o matemático da Universidade de Emory, Ken Ono e sua equipe descobriram que as partições[8] de um número inteiro se comportam como fractais.

Problematização inicial: Imagine que você tenha cinco caixas e quer guardá-las numa estante. De quantas maneiras você pode realizar isso? Cada uma das possíveis disposições é uma maneira de partição? Claro que sim! E como essas caixas podem ser dispostas? Você pode colocar as cinco caixas em uma única pilha na vertical, ou então em uma pilha de três caixas e outra com duas, ou ainda, uma caixa ao lado da

---

[8] Para entender a fórmula expressa por Ramanujan e sua história como um matemático que queria ser reconhecido pela elite inglesa recomenda-se assistir ao filme "O homem que viu o infinito"

outra, dentre outras maneiras. Cada uma dessas possíveis disposições é uma maneira de partição do conjunto inicial de caixas.

1ª Situação problema

Em se tratando de números inteiros, a questão é saber qual o número de partições $P(n)$ quando dado um número inteiro n? Ou seja, no caso das caixas, qual a partição do número 5, ou seja, $P(5)$?

1ª) 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5
2ª) 2 + 3 = 5
3ª) 3 + 2 = 5
4ª) 2 + 1 + 2 = 5
5ª) 2 + 2 + 1 = 5
6ª) 1 + 2 + 2 = 5
7ª) 5

É fácil perceber que são apenas 7 possibilidades de reescrever o número 5 como uma soma de inteiros menores. Assim, $P(5) = 7$.

Disponível em: http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2013/06matematica-no-dica-fractais-na.html

Atividade 2. Problema de combinação

Contextualização. Os jovens estão sempre ligados nas tendências da moda, presentes nas novelas, seriados, filmes, etc., logo vira febre determinado tipo de vestimenta, sapatos e acessórios. No dia a dia, o jovem busca looks diferentes para incrementar sua aparência utilizando o que dispõe em seu guarda-roupa, deixando sua aparência alegre e jovial. Melhorar a qualidade do que compra, nem sempre se consegue devido aos preços altos de produtos, ditos “finos”, de “grife”. Mas é possível arrumar combinações que cabem no seu bolso.

Problematização inicial: O que é combinar? O que pode combinar? Dê um exemplo do seu dia a dia de como você faz. Quantas maneiras diferentes Sabrina pode organizar seu visual com o que dispõe? O que tem maior variedade? O que tem a mesma quantidade? Faça combinações possíveis para produzir looks (objetos) que Sabrina pode usar.

2ª Situação problema

Sob a mesa encontra-se três acessórios com as seguintes quantidades: 3 óculos, 4 chapéus e 3 blusas. De quantas maneiras diferentes **Sabrina** poderá combinar seu visual (look) com tais acessórios?

<u>1ª estratégia de resolução:</u>

O professor poderá levar para a sala de aula os acessórios mencionados no problema, convidar dois alunos à frente da sala de aula para que eles mesmos, com a ajuda/participação de todos, montem as diferentes combinações, utilizando os 3 óculos, os 4 chapéus e as 3 bolsas. A medida que forem realizando a montagem dos looks, farão as suas anotações para que, ao final de todas as combinações possíveis, respondam à questão proposta.

Representação de algumas combinações:

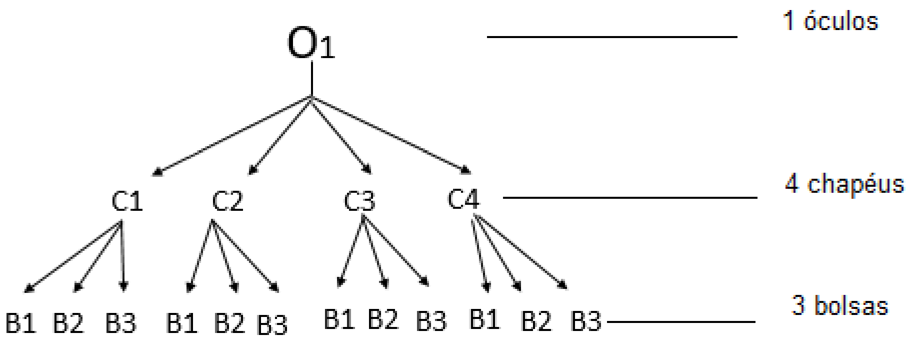
Fonte: elaboração da autora, 2018.

Importante os alunos serem estimulados a desenvolverem o raciocínio matemático após as combinações dos primeiros looks. Observe que com um mesmo chapéu há 9 maneiras de combinar os acessórios, logo por dedução, e ainda, pelo princípio fundamental da contagem ou princípio da multiplicação, temos:

9 combinações x 4 chapéus = 36 maneiras diferentes de compor esses acessórios.

<u>2ª estratégia de resolução:</u>

Outra maneira de destacar as diferentes combinações possíveis com esses acessórios, é utilizando a árvore de possibilidades ou diagrama de árvore. Deve-se está atento à quantidade de elementos, que são: 3 óculos, podendo ser descritos como O_1, O_2 e O_3; 4 chapéus, simbolizados como C_1, C_2, C_3 e C_4 e por último, mas não necessariamente nessa ordem, as 3 bolsas, representadas por B_1, B_2 e B_3, ficando assim esquematizado:



Fonte: elaboração da autora, 2018

Assim, realizando a combinação apenas com o óculos 1 (O1), obtemos 12 possibilidades, pois 1 x 4 x 3 = 12, no entanto, como a situação problema menciona 3 óculos, logo devemos multiplicar 12 x 3 = 36 maneiras de combinar esses acessórios, ou ainda, somar 12 + 12 + 12 = 36

3ª estratégia de resolução:

Os alunos podem ser estimulados, pelo professor, a enumerar no caderno os elementos que farão parte da combinação, um a um, seja ele pelo nome do acessório, por sigla (nomeada pelo próprio aluno), ou desenho e ao final realizar a contagem.

4ª estratégia de resolução:

Utilizando o Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio da Multiplicação, ao multiplicar a quantidade de elementos de cada objeto. Ficando assim, descrito: 3 x 4 x 3 = 36 possibilidades de compor os acessórios descritos na questão problema.

É muito importante que o professor utilize material concreto quando se trata de pequenas quantidades, mas amplie para situações problemas que o aluno não precise mais operar com auxílio de material concreto, mas interprete o problema e construa respostas possíveis usando diferentes recursos.

Atividade 3. Problema de combinação

Contextualização. Tem dias em Rio Branco que o calor deixa qualquer um de cabeça e corpo quente, quando marca 30ºC com sensação térmica de 40ºC. Haja suor. Uma das possíveis saídas é tomar algo gelado, como sorvete, por exemplo. Procurar uma sorveteria, escolher um ou mais sabores e os adicionais é uma ótima opção para matar o calor, pelo menos, momentaneamente. Escolher as várias opções vai do gosto de cada pessoa.

Problematização inicial: Quantas maneiras são possíveis de montar um sorvete se optar pelo tamanho? Se optar dentre os sabores oferecidos? Se optar pelos adicionais oferecidos? Como podemos resolver de forma rápida se optarmos pelo princípio multiplicativo para achar as combinações de açaí cremoso? Recursos para resolução: árvore das possibilidades? Como você resolveria através da árvore de possibilidades?

3ª Situação problema

Letícia foi a uma lanchonete e fez o pedido de um açaí cremoso para lanchar. O garçom mostrou o cardápio com as seguintes opções de escolha para que a cliente monte seu próprio açaí. Veja:

- ✓ Tamanho: pequeno, médio ou grande;
- ✓ Fruta picada: banana ou morango;
- ✓ Adicional: sucrilhos, amendoim ou castanha.

Quantas combinações diferentes Letícia tem para solicitar seu açaí ao garçom?

Esta situação é mais complexa que a anterior, pois requer que o aluno faça observação do tamanho, os tipos de frutas disponíveis e o que pode ser adicional.

<u>1ª estratégia de resolução:</u>

Pode-se recorrer a representação dos elementos por meio de desenhos para realizar as diferentes combinações.

Três combinações possíveis dentre as soluções existentes

Fonte: da autora, 2018.

Interessante o aluno perceber que utilizando o mesmo tamanho de copo e fruta e apenas alterando as opções de adicionais (amendoim, sucrilhos e castanha), é possível realizar 3 combinações distintas. Então, ao mudar apenas o tamanho do copo já se conclui que há 9 possibilidades, no entanto, como temos mais uma opção de fruta (morango) para realizar essas combinações, teremos o dobro das possibilidades mencionadas, ou seja, 2 x 9 = 18.

<u>2ª estratégia de resolução:</u>

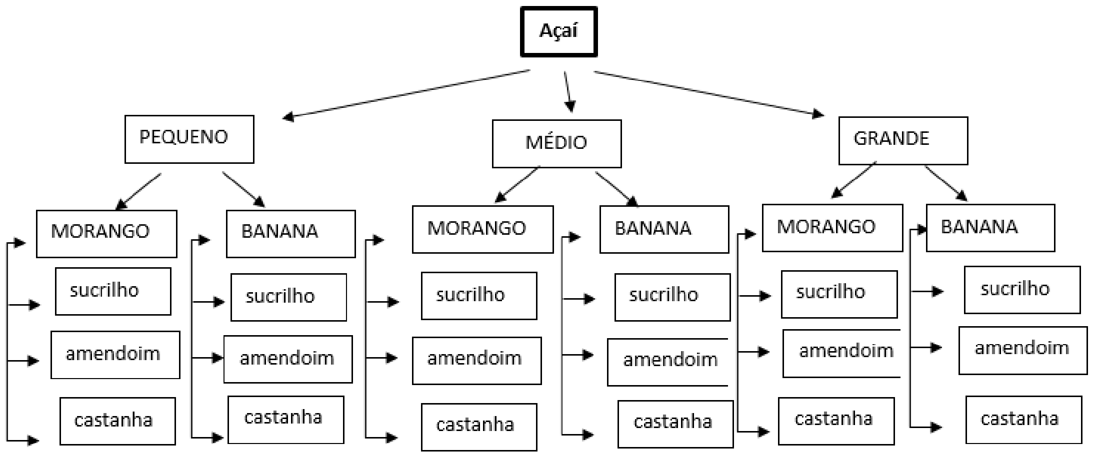
Há possibilidade de desenvolver inicialmente a contagem das possibilidades com dois grupos de elementos, como por exemplo as frutas e os tamanhos de recipientes disponíveis, utilizando uma tabela de dupla entrada, e posteriormente considerar o outro grupo de elementos, nesse caso os adicionais, e efetuar a multiplicação.

Tabela de dupla entrada			
Frutas	**Vaso pequeno (p)**	**Vaso médio (m)**	**Vaso grande (g)**
Banana (B)	Bp	Bm	Bg
Morango (M)	Mp	Mm	Mg

Observando a tabela verifica-se que com os dois grupos considerados inicialmente, há 6 possibilidades de combinação, no entanto, é necessário incluir os adicionais oferecidos. Dessa forma, como são 03 elementos nesse grupo de adicionais faz-se 6 x 3 = 18. Assim, há 18 possibilidades de escolha para a montagem do açaí.

3ª estratégia de resolução:

Para facilitar a compreensão pode ser utilizado o esquema denominado árvore de possibilidades ou diagrama de árvore:



Fonte: Da autora, 2017 (p. 47)

Utilizando essa estratégia visualizamos as diferentes maneiras de montar o açaí, e a partir desse esquema podemos responder à questão proposta.

4ª estratégia de resolução:

Observe que neste problema temos três opções de escolha (E1, E2 e E3):

E1: Optar por um tamanho dentro os três oferecidos;

E2: Optar por uma fruta dentre as duas oferecidas;

E3: Escolher um adicional entre os três oferecidos.

Então, usando o Princípio Multiplicativo temos: 3 x 2 x 3 = 18 combinações de açaí cremoso.

Vale lembrar que desde os anos iniciais situações problemas com quantidades menores são tratadas quer envolvendo coleções de objetos, formas geométricas ou números para desenvolver o raciocínio combinatório.

Atividade 4. Problemas de permutação

É importante conceituar partições para que o aluno não confunda com operação de divisão. É importante ainda retomar o Princípio Fundamental da Contagem para que o aluno possa dizer quantas sequências é possível formar, trazendo cálculo aritmético, ou seja, saiba expressar o fatorial.

Contextualização. Existem diferentes formas de ordenar os elementos distintos de um conjunto. Essa ordenação e reordenação configura-se numa permutação de números ou de palavras. As de palavras são chamados anagramas, que é um jogo de palavras que utiliza a transposição ou rearranjo de letras de uma palavra, com o intuito de formar outras palavras com ou sem sentido. É calculado através da propriedade fundamental da contagem, utilizando o fatorial de um número de acordo com as condições impostas pelo problema. É fácil e bom de aprender. Vamos exercitar!

Problematização inicial: Para propor a atividade que envolve problemas de permutação é importante explorar o conceito: o que é permutar? O que é fatorial de um número? Como calcular? Como você pode calcular o fatorial da palavra Flor e Arara? Você utiliza o princípio aditivo ou multiplicativo? ...

4ª Situação problema

Quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) poderei formar usando as letras da palavra Flor?

<u>1ª estratégia de resolução:</u>

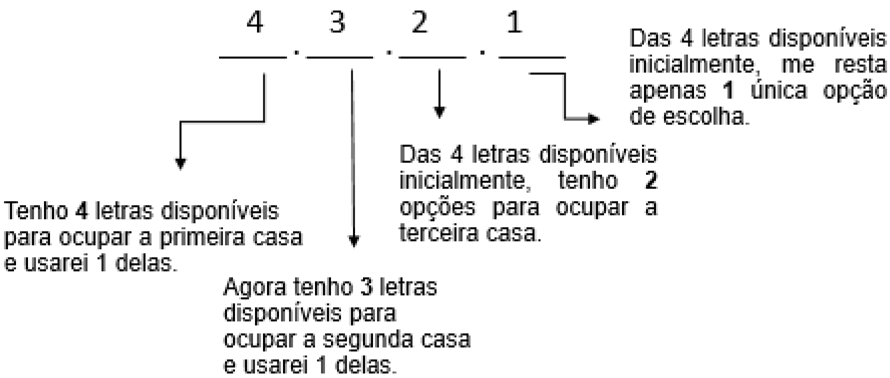
Realizando a troca de posições das letras, formando diferentes palavras (com ou sem sentido):

FLOR	LOFR	ORFL	ROLF
FLRO	LORF	ORLF	ROFL
FOLR	LFOR	OFRL	RLOF
FORL	LFRO	OFLR	RLFO
FRLO	LROF	OLFR	RFOL
FROL	LRFO	OLRF	RFLO

Ao final de todas as possibilidades possíveis, verificar a quantidade de anagramas formados. Nesse caso específico, formou-se 24 maneiras diferentes de dispor as letras da palavra FLOR.

<u>2ª estratégia de resolução:</u>

Compreendendo que a palavra FLOR é composta por quatro letras, temos a “casa” onde cada uma delas pode ocupar:



Fonte: elaboração da autora, 2018

Portanto, seguindo essa ideia pode-se realizar a multiplicação: 4 x 3 x 2 x 1 = 24, ou seja, permutar os 4 elementos (letras) da palavra FLOR, matematicamente simbolizado ou representado por $P_n = n!$ onde o n, representa um número natural, nesse caso específico, ao número de elementos da palavra FLOR. Dessa forma, se temos **n** elementos distintos, então o número de agrupamentos ordenados que podemos obter com todos esses **n** elementos é dado por:

$$n(n-1)(n-2)\ldots\ .3.2.1 = n!$$

Esses agrupamentos ordenados (diferem pela ordem), recebem o nome de permutação simples. Indicamos por:

$$P_n = n(n-1)(n-2).\ldots\ .3.2.1 = n!$$

Ou seja, $P_4 = 4! = 4\ x\ 3\ x\ 2\ x\ 1 = 24$ possibilidades de escrita com as letras da palavra FLOR.

Atividade 5. Problemas de permutação com repetição

5ª Situação problema

Quantos anagramas têm a palavra ARARA?

1ª estratégia de resolução

Realizando a troca de posições das letras, formando diferentes palavras (com ou sem sentido):

ARARA	ARAAR	RAARA	RARAA
AARRA	AAARR	RRAAA	
ARRAA	AARAR	RAAAR	

Então, verifica-se que a palavra ARARA tem 10 anagramas.

Essa é um tipo de situação que alunos dos anos finais do Ensino Fundamental II, devem resolver sem dificuldades, pois desde o Fundamental I é comum os livros didáticos proporem questões do tipo: quantos números são possíveis de escrever utilizando os algarismos 2, 5 e 6?

O que acrescenta no comando da questão é a utilização do termo anagrama, pois agora a combinação é feita também com letras. Assim a compreensão e aplicação da fórmula para tornar a resolução mais prática e rápida pode ser mais aceitável por parte dos alunos.

2ª estratégia de resolução:

A maneira mais prática de resolução é por meio da utilização da fórmula matemática. Porém, para melhor compreensão é importante destacar que a palavra ARARA, há letras que se repetem e por esse motivo a fórmula se difere da permutação sem repetição. A quantidade de vezes que determinada letra se repete deve ser considerada, nesse caso, observa-se que a palavra ARARA tem a letra A que se repete 3 vezes e a letra R que se repete 2 vezes, portanto usando as informações na fórmula, temos:

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}2!} = 10$$

Assim a permutação (com repetição) de n elementos dos quais α é um tipo, β é outro e γ é outro ainda, com $\alpha + \beta + \gamma = n$, é dada por:

$$P_n^{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!}$$

Atividade 6. Problema de combinação

Contextualização: Sugere-se que o (a) professor (a) contextualize a atividade realizando uma discussão sobre a quantidade de letras e números que há numa placa de veículo. Se sempre foram essas quantidades de letras e números. Será que antes era de um jeito a placa e depois mudou? Que ano? Questionar o porquê de tal mudança. Cada estado tem letras diferentes? Porque?

Lembrete: É importante ao aluno compreender que com essa modificação fica possível uma maior possibilidade de combinações, ficando subentendido que daqui alguns anos, é certo que aconteça uma nova alteração, pois as combinações se esgotarão.

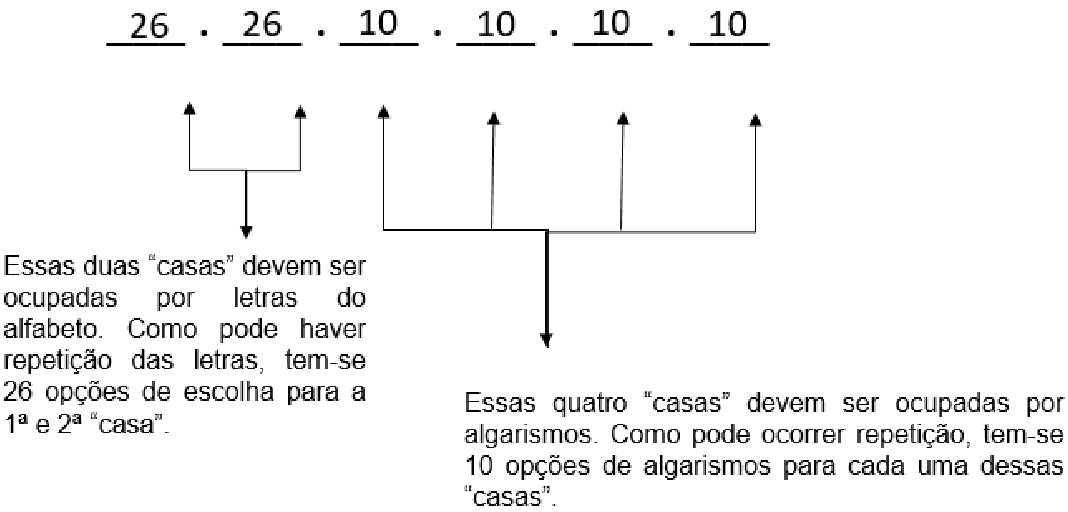
Problematização inicial: Quantas letras tem o alfabeto? Os algarismos simples vão de 0 a 9. Quantos totalizam? As letras e os números podem se repetir? Quantas consoantes? Quantas vogais? Quantos números pares? Quantos números ímpares? Quantos números primos? Após a discussão, lançar o problema.

6ª Situação problema

Quantas placas diferentes são possíveis formar com o modelo antigo, ou seja, com duas letras (A G) e quatro algarismos (2605)?

1968 - 1989, AC = Acre

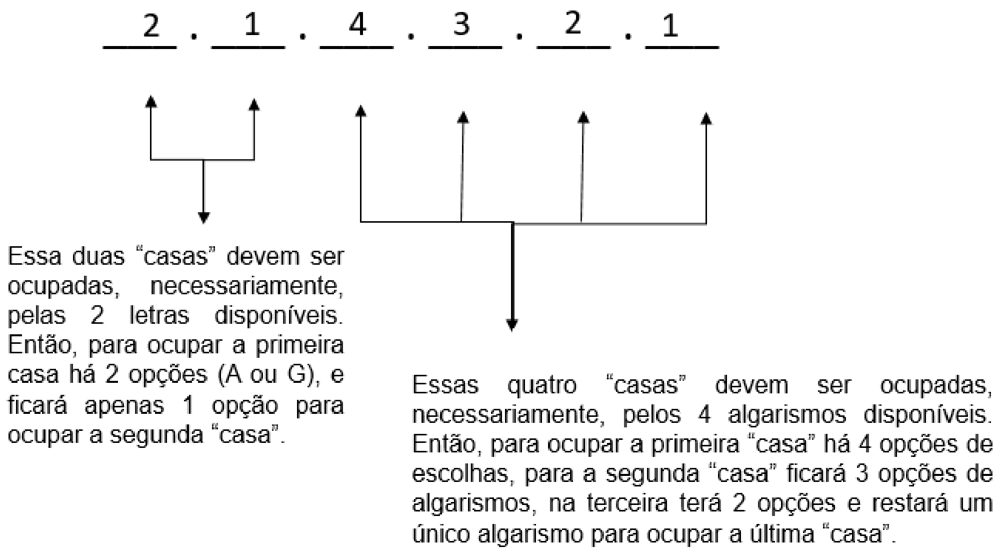
Reconhecendo que no nosso alfabeto tem 26 letras e o nosso sistema de numeração decimal é composto por 10 algarismos e precisamos ocupar dois lugares na placa de trânsito utilizando letras e quatro lugares com números, e ainda, que pode haver repetição de letras e números, podemos inicialmente dispor os espaços para os encaixes desses elementos, observe:



Fonte: da autora, 2018

Então, deve-se calcular o produto desses fatores $26.26.10.10.10.10 = 6\,760\,000$, possibilidades que haviam anterior a atual exigência do Detran para a composição das placas

Porém, nessa situação problema específica, como tem disponível somente duas letras, A e G, e ainda, 4 algarismos (2, 6, 0 e 5), esse produto é bem menor, pois:



Fonte: da autora, 2018

Assim, $2\ x\ 1\ x\ 4\ x\ 3\ x\ 2\ x\ 1 = 48$, possibilidades que há para a composição das placas, utilizando as 2 letras e os 4 algarismos.

Atividade 7. Problema de combinação

7ª Situação problema

Quantas placas diferentes são possíveis formar com o modelo atual com as letras H, Q, W e os algarismos 5, 6, 7 e 8?

Atualmente, o Detran exige três letras para a formação das placas de trânsito, isso ocorreu para aumentar o número de possibilidades para formação dessas placas. No caso de três letras, o cálculo ficaria:

$$26\ x\ 26\ x\ 26\ x\ 10\ x\ 10\ x\ 10\ x\ 10 = 175\ 760\ 000$$

Mas, especificamente a questão enunciada onde só pode ser utilizado as 3 letras (HQW) e os 4 algarismos, pode se resolver da seguinte forma:

$3\ x\ 2\ x\ 1\ x\ 4\ x\ 3\ x\ 2\ x\ 1 = 144$ maneiras de compor uma placa de trânsito, utilizando 3 letras e 4 algarismos.

Importante perceber que mesmo colocando restrições do tipo “usar somente duas ou três letras específicas e sem repetição”, e ainda, “quatro algarismos sem repetição", a quantidade de combinações possíveis aumenta consideravelmente, levando a compreensão da necessidade que se teve em aumentar uma letra na atual composição das placas, tendo em vista, uma maior quantidade de veículos rodando nas ruas. Vale ressaltar que em alguns anos terá uma nova modificação, devido ao crescimento acelerado do país, no que diz respeito a quantidades de veículos.

Atividade 8. Problema de permutação

Contextualização: A Mega-Sena consiste em um jogo onde o jogador tem que acertar 6 números dos 6 que são sorteados entre os 60 disponíveis (01 até 60). **Nesse tipo de jogo não é permitido repetição de números! Quem aqui já jogou ou joga na Mega-Sena? Já acertou quantos números?**

Problematização inicial: O jogador pode combinar quantos números numa única aposta? (de 6 a 15). Quantos números são sorteados pela Caixa Econômica Federal (CEF) em cada concurso? Na combinação da mega-sena é possível haver número repetido? Quem faz a quadra acerta quantos números? Quem acerta a sena em qualquer sorteio acerta quantos números? Existe algum número de ordem na sequência dos números sorteados em cada concurso? Que valor o jogador paga em 6 números? E em 15? Após a discussão, lançar o problema.

8º Situação problema

Os resultados do último sorteio da mega-sena foram os números 04, 10, 26, 37, 47 e 57. De quantas maneiras distintas pode ter ocorrido essa sequência de resultados?

<u>Estratégia de Resolução:</u>

Interessante o professor verificar a interpretação do aluno questionando se tal situação problema se trata de uma questão de permutação, combinação ou arranjo. Nesse sentido, uma conversa indagando-os se o número de objetos/elementos é igual ao número de posições, pode contribuir para a compreensão e consequentemente resolução da questão. Isso porque, ao perceber que o número de objetos/elementos é igual ao número de posições, o aluno pode aplicar a ideia de permutação, ou seja, $P_n = n!$

Desta forma,

$$P_6 = 6! = 6\ x\ 5\ x\ 4\ x\ 3\ x\ 2\ x\ 1 = 720\ maneiras\ pode\ ter\ ocorrido\ essa\ sequência.$$

Atividade 9. Problema de arranjo

9º Situação problema

Em uma urna de sorteio de prêmios existem dez bolas numeradas de 0 a 9. Determine o número de possibilidades existentes num sorteio cujo prêmio é formado por uma sequência de 6 algarismos.

Estratégia de Resolução:

Mais uma vez é comum a dúvida sobre como resolver a situação problema, mas o professor pode iniciar refletindo, novamente, se o número de objetos é igual ao número de posições.

Nesse caso, o aluno deve perceber que não, pois há 10 bolas e 6 posições. Isso leva a descartar a hipótese de permutação. Então como podemos resolver o problema? Um outro questionamento que o professor deve recorrer para estimular a interpretação é se a ordem dos elementos importa. Na questão citada, a resposta é sim, pois uma sequência como 1, 2, 4, 6, 8, 9 é diferente de 9, 8, 6, 4, 2, 1. Assim, nos casos em que a sequência é relevante deve-se utilizar arranjo, então:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

n é o número de objetos, nesse caso, $n = 10$;

p é o número de posições, assim, $p = 6$

Portanto,

$$A_{10,6} = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = \frac{10\ x\ 9\ x\ 8\ x\ 7\ x\ 6\ x\ 5\ x\ \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 151\ 200\ possibilidades\ existentes.$$

Atividade 10. Problema de permutação

Contextualização: O Brasil é o único país que tem o título de pentacampeão na copa do mundo. Conquistou o título nos anos de 1958, 1962, 1970, 1994 e 2002, por isso não é à toa que ele é conhecido como país do futebol. Importante reconhecer que a copa do mundo não é apenas um evento esportivo, envolve questões políticas e financeiras e mexe com a economia do país que sedia os jogos.

Problematização inicial: Há investimento para se ter bons jogadores em um time de futebol? Você sabia que o jogador Neymar é considerado o mais valioso do mundo, segundo as últimas notícias de janeiro de 2018? Uma seleção é composta por quantos componentes? Se dentre 8 jogadores é preciso selecionar 3, como poderá ser feito essa escolha? Após a discussão, propor a resolução do problema.

10º Situação problema

Um técnico de futebol precisa escolher aleatoriamente, dentre 8 jogadores, 3 atletas para participar de um curso no exterior. Determine o número de maneiras que ele pode realizar essa escolha.

Estratégia de resolução:

Percebe-se que a interpretação do problema é essencial para determinar a maneira de se resolver. Retomando os questionamentos feitos nas duas questões anteriores, verifica-se que nos deparamos com outra situação, veja:

O número de objetos é igual ao número de posições? E a resposta é não, pois há 8 jogadores e serão escolhidos um total de 3.

Mas então porque não podemos usar a ideia de permutação? Ora, vamos tentar responder ao próximo questionamento, ou seja, a ordem importa? E a resposta também é não. Note que se organizarmos os jogadores de 1 a 8, e escolhermos os jogadores 5, 3 e 4 é o mesmo que escolher os jogadores 3, 5 e 4.

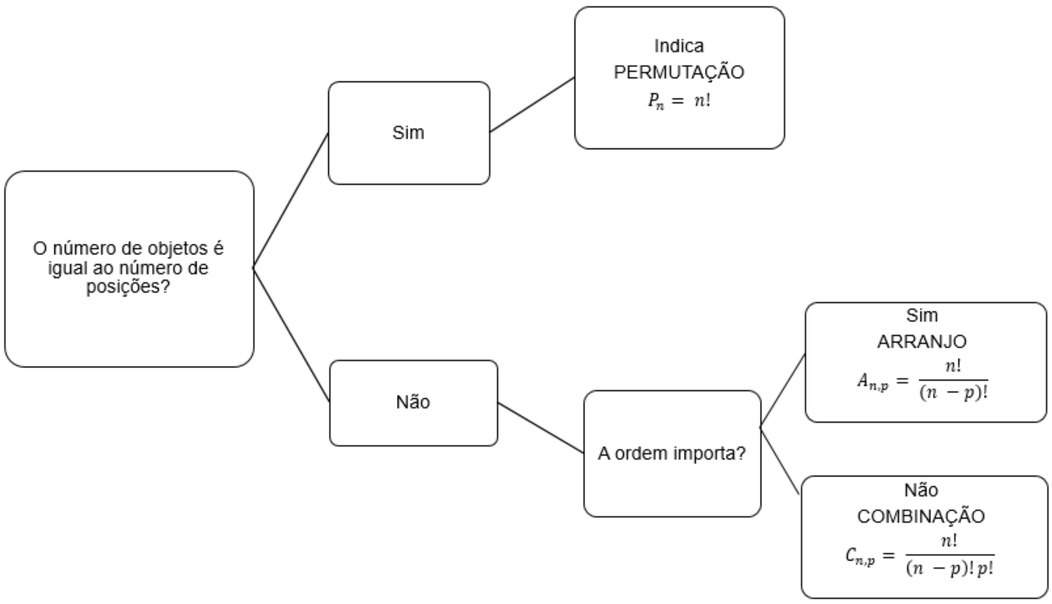
Portanto, nos deparamos com uma situação de combinação simples, onde o número de elementos é 8 e o número a ser escolhido é 3, ou seja, $n = 8 \; e \; p = 3$. E para encontrar o número total de combinações fazemos:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

$$C_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!\,3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}}{\cancel{5!}\,3 \times 2} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6}}{\cancel{6}} = 56$$

Assim, o técnico desse time tem 56 maneiras de escolher os três jogadores para a participação do curso.

A partir dessas questões é interessante organizar/destacar as dicas que foram mencionadas por meio das perguntas sugeridas nas três últimas questões. Veja:



Fonte: da autora, 2018

CONSIDERAÇÕES SOBRE O SABER PEDAGÓGICO

Diante das situações propostas, percebe-se que com o aumento dos objetos/elementos e com as problemáticas trazidas nas questões, a compreensão do princípio fundamental da contagem é elemento essencial, mas não único para a compreensão e resolução de todos os problemas de combinatória.

Essa sugestão de atividades/produto educacional, elaborada a partir da pesquisa, mostrou que o desenvolvimento do raciocínio combinatório deve ser trabalhado desde o Fundamental I, como orienta os documentos oficiais, mas que os livros didáticos não trazem de forma clara, ao pedagogo, que é responsável por esse trabalho. Ainda, nos anos iniciais do Ensino Fundamental II essa prática permanece.

Verificou-se que a maioria dos autores desenvolvem de forma explícita nos anos finais do Ensino Fundamental II, compreendendo assim que o trabalho no campo Análise Combinatória, fica a cargo do professor desenvolver ou não e por esse motivo deixa lacunas que consequentemente refletem no desempenho (ou falta dele) do aluno ao ingressar no ensino médio, onde o conteúdo é cobrado.

Reconhecendo essa lacuna no aprendizado do aluno, no que diz respeito às questões de combinatória, torna-se importantíssima a forma como a professora vai conduzir esse conteúdo em sala de aula. De fato, orienta-se que haja uma construção de conhecimento em que o aluno seja provocado a perceber questões de combinatória a partir de situações problemas do cotidiano e de maneira intuitiva (inicialmente), consiga interpretar e resolver problemas, como nas questões iniciais sugeridas nesse trabalho.

Assim, percebeu-se que a utilização de material concreto, a oportunidade de pegar em bolsas, chapéus e óculos e manipular as diversas combinações, e ainda, as temáticas do dia a dia do aluno (jogo da Mega-Sena, placa de um veículo, dentre outras situações) possibilitou interesse e envolvimento na temática em questão. A professora, sujeita da pesquisa, foi a peça principal para garantir a participação dos alunos e isso não se deve somente ao fato de dominar o conteúdo, mas principalmente de saber ensinar, tornar o conteúdo ensinável mesmo trabalhando com uma clientela que é marginalizada na sociedade, e por sua vez, traz grandes dificuldades de aprendizagens.

Nesse sentido, constatou-se que quando o professor tem esses dois domínios, ou seja, o conhecimento do conteúdo e o saber pedagógico do conteúdo específico, torna-se tarefa fácil selecionar livros didáticos, pesquisas ou mesmo criar situações problemas conforme o ano de estudo e a modalidade de ensino que desenvolve a sua ação docente.

REFERÊNCIAS

BORTOLOTI, WAGNER e FERREIRA. **A formação dos professores**: erros em análise combinatória. In: XIII Conferência Internacional de Educação Matemática, 2011. Recife. *Anais eletrônicos...* Disponível em <http://www.lematec.net.br/CDS/XIIICIAEM/artigos/1610.pdf>. Acesso em: 10 de set. de 2017.

CHARLOT, Bernard. **Da relação com o saber**: elementos para uma teoria. Trad. Bruno Magne. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto VOAZ: Matemática.** Ensino Médio – Parte II. 1. Ed. São Paulo, Ática, 2012.

COSTA, C. A. **Análise Combinatória:** Como aborda-la a partir do ensino fundamental. In: VII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004. Universidade Federal do Pernambuco, Recife. *Anais eletrônicos*... Disponível em: <http://www.sbem.com.br>. Acesso em 17 de jun. de 2017.

ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam no raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos - 8ª série do ensino fundamental**. São Paulo, 2000, 194 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

ROA, Rafael e NAVARRO-PELAYO, Virginia. **Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad**. Jornadas europeas de estadística, Ilhas Baleares, 10 e 11 de outubro de 2001.

SABO, Ricardo D. **Saberes docente**: A Análise combinatória no Ensino Médio. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática**.** Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PUC.SP. São Paulo, 2010.