APÊNDICE B – Produto Educacional: Sequência de atividades com o uso do *software* GeoGebra na exploração de conceitos relacionados à função afim para estudantes do 1º ano do Ensino Médio.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS E DA NATUREZA – CCBN
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – MPECIM

ELIZABETH SILVA RIBEIRO

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES COM O USO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA NA EXPLORAÇÃO DE CONCEITOS RELACIONADOS À FUNÇÃO AFIM PARA ESTUDANTES DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Orientador: Prof. Dr. Itamar Miranda da Silva

Rio Branco

2019

ELIZABETH SILVA RIBEIRO

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES COM O USO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA NA EXPLORAÇÃO DE CONCEITOS RELACIONADOS À FUNÇÃO AFIM PARA ESTUDANTES DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Produto Educacional elaborado a partir da dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós – Graduação do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática (MPECIM), da Universidade Federal do Acre (UFAC), como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Itamar Miranda da Silva

CELA/UFAC – Orientador

Profª. Dr. Aline Andreia Nicolli

CELA/UFAC – Membro interno

Prof. Dr. Luiz Márcio Santos Farias

UFBA – Membro externo

Prof. Dr. Gilberto Francisco Alves de Melo

CAP/UFAC – Membro suplente

Rio Branco

2019

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Após o desenvolvimento desta pesquisa, organizamos as atividades que foram desenvolvidas com os alunos/sujeitos de forma que pudéssemos colocar à disposição, como sendo nosso produto educacional, uma sequência de atividades que utilize o *software* GeoGebra como recurso tecnológico no estudo da função afim. Também acrescemos a estas atividades outras situações que podem ser trabalhadas de forma complementar, já que as mesmas foram elaboradas com base nos resultados obtidos.

Por considerarmos importante que o trabalho docente esteja alinhado com o que propõe a BNCC, decidimos desenvolver as atividades que complementam nosso produto educacional com foco nas habilidades matemáticas que os alunos devem desenvolver, relativas ao ensino da função afim, sugeridas por este documento. Para isso, decidimos priorizar as habilidades que se referem a:

- (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. [...];
- (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica;
- (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. [...].

Desta forma, o produto educacional gerado a partir do desenvolvimento desta pesquisa tem o objetivo de servir de apoio ao trabalho docente, no que diz respeito ao ensino da função afim.

Por fim, desejamos sucesso a todos que se interessarem em desenvolver esta proposta e que tenham sempre em mente que o processo de ensino e aprendizagem está condicionado a muitos fatores que, com boas práticas, podem ser aproveitados para a melhoria dos resultados que se pretende obter.

CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA FUNÇÃO AFIM

É fato que todo professor tem ânsia de propor um bom ensino a seus alunos, muito embora os fatores condicionantes não dependam exclusivamente dele. No caso do ensino da matemática, além de o professor ter que escolher a melhor forma para interagir com os alunos, ele também deve estar atento à maneira como essas ideias serão apresentadas, pois, por muitas vezes, este ensino é prejudicado pela falta de clareza em relação à aplicabilidade de seus conceitos.

No que se refere ao ensino da função afim, os alunos também encontram dificuldades em conseguir associar este objeto matemático à situações dentro de um contexto. Sobre isto, apoiada em sua prática docente, Mangarinus (2013, p. 12), afirma que "apesar da contextualização e interdisciplinaridade, o ensino de funções não vem garantindo aos alunos sua efetiva aprendizagem ou a flexibilidade esperada para a resolução de problemas diversos". Ela também chama a atenção para o fato de que conceitos não compreendidos em anos anteriores dificultam a aprendizagem de funções no Ensino Médio, inclusive, chegam a comprometer o Ensino Superior. Afirmação também defendida por Costa (2004 apud Mangarinus, 2013, p. 12), segundo o autor: "muitas das dificuldades apresentadas pelos estudantes no que se refere ao conceito de limite, derivada e integral recaiam na compreensão do conceito de função".

A falta de compreensão e/ou a má interpretação de conceitos matemáticos faz com que o aluno apresente lacunas em sua aprendizagem, e isto se verifica muito nos estudantes do ensino médio. Temos muitas situações em que alunos não conseguem avançar em seus estudos por conta da falta de domínio sobre o que seria básico para a compreensão daquele conhecimento. Sobre isto e em relação ao ensino de funções, Chaves e Carvalho (2004) afirmam que:

> Muitos conteúdos estudados no Ensino Fundamental (EF) servem de "âncora" para o ensino de funções, como por exemplo: i) a proporção, pois trata de grandezas variáveis e interdependentes de forma direta ou indireta; ii) as equações do 1º e 2º graus e os sistemas que modelam situações do cotidiano; iii) a geometria onde perímetros e áreas dependem de medidas de lados, ângulos ou diagonais. (CHAVES e CARVALHO, 2004, p. 8).

Para Saraiva e Teixeira (2009 apud Andrade e Saraiva, 2012, p. 141), "algumas das dificuldades que os alunos enfrentam quando tentam compreender o conceito de função estão relacionadas com o uso do conjunto de símbolos relacionados com ele". O que traz para a discussão a ideia defendida por Duval (2009), em que afirma que a utilização de diferentes representações semióticas de um mesmo objeto matemático contribui para uma melhor aprendizagem, pois, os objetos matemáticos não são objetos “reais”, ou seja, que podemos ver, pegar ou até mesmo sentir. Portanto, uma maneira de conseguirmos perceber estes objetos é dando representantes a eles, no caso da função afim, estes representantes podem ser um gráfico, uma tabela uma relação algébrica entre duas incógnitas diferentes entre outras.

Por outro lado, também consideramos importante analisar qual a real contribuição do principal instrumento de apoio ao trabalho docente, que é o livro didático, ao ensino de funções. Neste sentido, segundo Rocha (2008, p. 18), “os autores abordam muitos conceitos que envolvem as funções em poucas páginas dos livros, não possibilitando ao aluno o tempo necessário para seu amadurecimento conceitual”.

Também encontramos no trabalho de Mesa (2001), argumentos a favor de uma investigação sobre os livros didáticos, na tentativa de explicar o motivo da dificuldade que os alunos têm na compreensão do conceito de função. A autora ainda afirma que os alunos formam suas concepções sobre os objetos matemáticos conforme são estimuladas pelos problemas e exercícios propostos em sala de aula, daí a importância de valorizarmos estas atividades.

Resumidamente, podemos concluir que, para termos uma melhor possibilidade de êxito no processo de ensino e aprendizagem da função afim, precisamos, por um lado, desenvolver nosso trabalho voltado para a coordenação das diferentes representações existentes para uma mesma função e, por outro, tentar potencializar este processo com a proposição de atividades estimuladoras do conhecimento matemático. Nossa fala também tem respaudo em Ponte (2005, p. 11-12), onde afirma que “formulando tarefas adequadas o professor pode suscitar a atividade do aluno. Não basta, no entanto, selecionar boas tarefas; é preciso ter atenção ao modo de propor e de conduzir a sua realização na sala de aula”.

Todas estas considerações nos remetem à busca de melhores ferramentas pedagógicas e de propostas de ensino diversificadas. Desta forma, o produto desta pesquisa visa apresentar uma sequência de atividades que utiliza o *software* GeoGebra para explorar a função afim, tendo em vista que o trabalho que desenvolvemos nos fez entender que o uso da tecnologia pode ser um grande aliado nesta busca por diferentes propostas de ensino que estimulam a aprendizaegem de nossos alunos.

SUGESTÕES DE ATIVIDADES SOBRE FUNÇÃO AFIM

Atividade 1 – Construir modelos empregando a função polinomial de 1º grau, para resolver problemas em contextos diversos, com apoio de tecnologias digitais.

Situação-problema

Suponha que um ônibus saia da Cidade de Sena Madureira com destino a Rio Branco, com velocidade constante de 90 km/h, o que equivale a 1,5 km/min. Com base nessas informações, responda:

a) Como podemos representar esta informação utilizando uma tabela que mostre a distância percorrida pelo ônibus em 1 min, 2 min, 5 min, 10 min e 30 min?
b) É possível determinar quanto tempo este ônibus leva pra chegar ao km 51? Qual foi este tempo?
c) Se a distância total entre as cidades citadas é de 144 km, quanto tempo o ônibus gastará para fazer este percurso?
d) Se representarmos por **D** a distância percorrida e por **T** o tempo gasto, estabeleça uma relação matemática que modele esta situação.
e) As grandezas distância e tempo são diretamente proporcionais? Com a utilização do *software* geogebra, represente esta situação graficamente?

Estratégias de resolução:

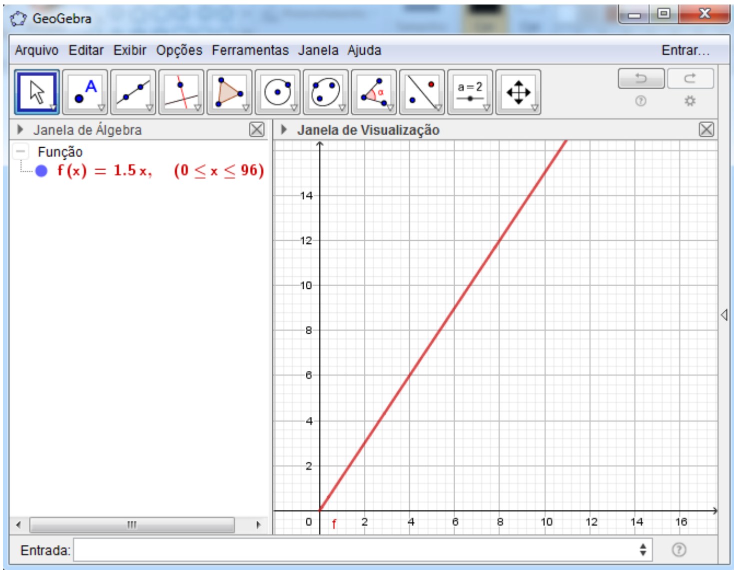
Nesta atividade, é necessário que o aluno interprete o enunciado de forma suficiente para poder realizar as conversões solicitadas. Inicialmente, os alunos terão que passar do registro da língua natural para o registro de tabela, analisando quais informações constam no problema e quais eles precisam encontrar. Em seguida, o que se pede é que façam a conversão para o registro algébrico e geométrico. Neste sentido, nosso objetivo é o de provocar a conversão entre estes diferentes tipos de registro de uma mesma função.

Também, como forma de evidenciar o coeficiente de proporcionalidade da função linear, é solicitado que o aluno relacione as grandezas tempo e distância e verifique como podemos obter a duração de tempo, sendo percorrida certa distância. Nosso objetivo é mostrar que existe uma constante de proporcionalidade nesta situação e relacioná-la com o conceito de função, tornando mais fácil a compreensão dos registros gráfico e algébrico.

Esta atividade deve ser trabalhada no Geogebra com o objetivo de verificar se as conjecturas e afirmações feitas pelos alunos estão coerentes com o que está representado na tela do computador. Esperamos que, com auxílio da visualização gráfica, o aluno consiga fazer manipulações e estabelecer relações entre as variáveis já identificadas.

Como forma de estimular o conhecimento dos alunos, perguntas provocativas podem se colocadas. Neste caso, sugerimos as seguintes indagações: o gráfico que aparece na tela corresponde aos dados apresentados no problema? Teremos alguma representação gráfica no 2º e 3º quadrante? De acordo com o problema, qual é o menor valor que pode ser atribuído para x? Qual é o domínio desta função?

Figura 1 - Registro gráfico da função *f(x) = 1,5x* no geogebra



Fonte: Tela do Geogebra criada pela autora.

Como dito anteriormente, nossa opinião é de que o dinamismo apresentado no *software* pode contribuir para o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, traduzindo-se em melhora na interpretação de informações e na organização dos dados apresentados.

Atividade 2 – Investigar relações entre números expressos em tabelas, identificando padrões e criando conjecturas para expressar algebricamente e graficamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

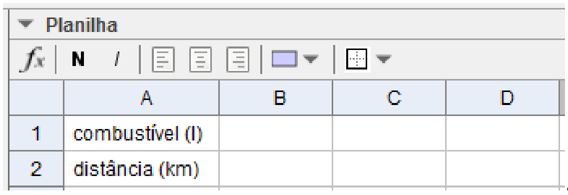
Situação-problema

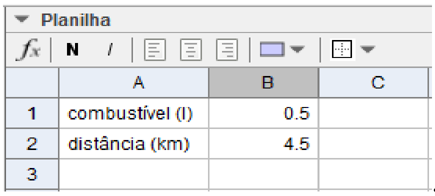
Agora, supondo que o consumo de combustível deste ônibus seja conforme os dados apresentados na tabela.

Combustível gasto (ℓ)	0,5	2	3		15	18	
Distância percorrida (km)	4,5	18		90			225

Complete o restante da tabela e responda:

a) Existe uma a constante de proporcionalidade nesta situação? Qual é este valor e o que ele representa neste contexto?

b) Organize esta tabela no *software* GeogebraClassic 5,clicando no botão Exibir e escolhendo a opção Planilha Ctrl+Shift+S. Para incluir os dados, você deve escrever as grandezas que são trabalhadas na situação: 

. Em seguida, deve incluirum dos valores de cada coluna e, na outra linha da mesma coluna, dar o comando necessário para que apareça o valor correspondente, por exemplo: na linha 1 da coluna B, digitamos "**0.5**" e na linha 2 da mesma coluna, digitamos "**=B1*9**". Com este comando irá aparecer o resultado de "**4.5**" no campo B2, conforme imagem, a seguir: 

. Agora, verifique se todos os resultados encontrados estão de acordo com o que você tinha previsto.

c) Considerando a distância de 144 km, aproximadamente quantos litros de combustível este ônibus gasta para fazer este percurso?

d) Se representarmos por **D** a distância percorrida e por **X** o total de combustível gasto, estabeleça uma relação matemática que modele esta situação.

e) Represente esta situação graficamente utilizando o *software* geogebra.

Estratégias de resolução:

A organização desta atividade levou em consideração a necessidade de propormos situações aos alunos em que apresentem os dados não apenas no registro da língua materna, no caso, utilizamos uma tabela como registro de saída e espera-se poder verificar se eles compreendem estes dados e se conseguem fazer a conversão entre os registros de tabela, língua materna, algébrico e gráfico.

Uma das estratégias possíveis para a resolução desta atividade é utilizar a constante de proporcionalidade para encontrar os valores que completam a tabela. Desta forma, se houver compreensão do que representa este valor na situação descrita, o aluno terá compreendido que a distância percorrida é função da quantidade de combustível gasto.

De antemão, podemos citar duas possíveis situações que poderão ser encontradas durante a resolução desta questão e quais procedimentos devem ser adotados diante da situação:

1ª situação: caso o aluno não consiga completar a tabela ou a complete parcialmente, deve ser verificado o motivo de tal impedimento/desistência, (se ele não compreendeu a situação, se compreendeu mas não consegue estabelecer uma constante de proporcionalidade, se as grandezas envolvidas na situação são conhecidas pelo aluno, se consegue associá-las, ou algum outro motivo que o impeça).

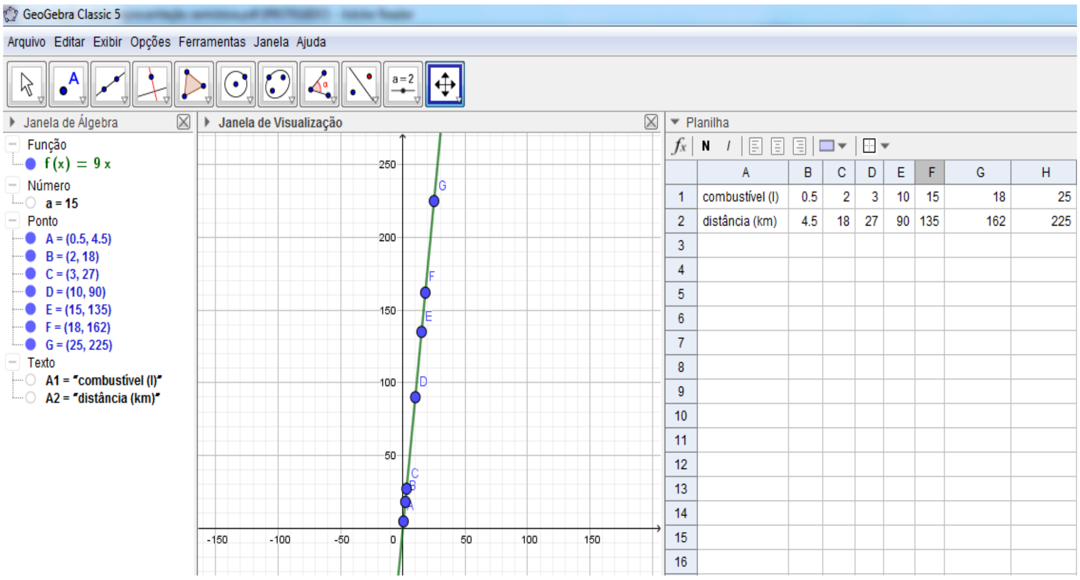
É importante que o tratamento dado a esta questão leve a compreensão de que estamos criando uma função. O aluno deve saber interpretar as generalizações ao fazer o processo de tratamento.

2ª situação: caso o aluno complete a tabela corretamente, isso não implica dizer que ele compreendeu que está trabalhando com um modelo de função, para isso, pode ser necessário que se identifique quais são os elementos constantes e quais são os variáveis. Esperamos que o aluno reconheça que o valor de 9 km/ℓ é constante no problema e que isso significa que a cada 9 km percorridos, gasta-se 1 ℓ de combustível.

Ainda neste sentido, o aluno é levado a fazer conjecturas em torno do conceito de função e a estabelecer, a partir de seu entendimento, uma relação de proporcionalidade entre as grandezas distância percorrida e combustível gasto. Esta modelagem será o registro algébrico da situação e deve ser descrita por ***D*** = 9.***x***.

É importante verificar se todos os alunos seguiram os passos corretos nas construções da tabela e do gráfico no *software* GeoGebra e, principalmente, se houve a compreensão de que o gráfico expressa as mesmas informações contidas na tabela e na expressão algébrica.

Figura 2 - Registro gráfico e da tabela da função *f(x)* = 9*x* no geogebra



Fonte: própria autora.

Também acreditamos que, a partir destas construções, os alunos podem fazer verificações acerca de suas conjecturas iniciais e que pode ser aproveitado este momento para a realização de uma discussão sobre coeficiente angular da função, sobre crescimento e decrescimento, sobre o fato de todos os pontos pertencerem a reta formada, sobre o domínio da função, entre outros questionamentos.

Atividade 3 – Construir modelos empregando a função polinomial de 1º grau, para resolver problemas em contextos diversos, com apoio de tecnologias digitais.

Situação-problema

Fábio está se preparando para uma competição de judô que irá participar dentro de 1 mês, mas ele está acima do "peso" permitido para sua categoria, por isso se submeteu a um treinamento específico para diminuição de gordura, em que se garante perca de 320 gramas por dia. Suponha que isso realmente ocorra e que Fábio esteja pesando 95 kg no início do treinamento.

a) Determine o "peso" de Fábio decorrido uma semana de treinamento.
b) Qual a expressão algébrica que relaciona o "peso" de Fábio (p), em quilogramas, em função do número de dias de treinamento (n)?
c) Faça um esboço de seu gráfico em seu caderno, depois verifique se esta construção está correta com auxílio do programa geogebra.
d) Caso Fábio siga rigorosamente este treinamento, será possível diminuir seu peso para 86 kg no tempo de um mês?

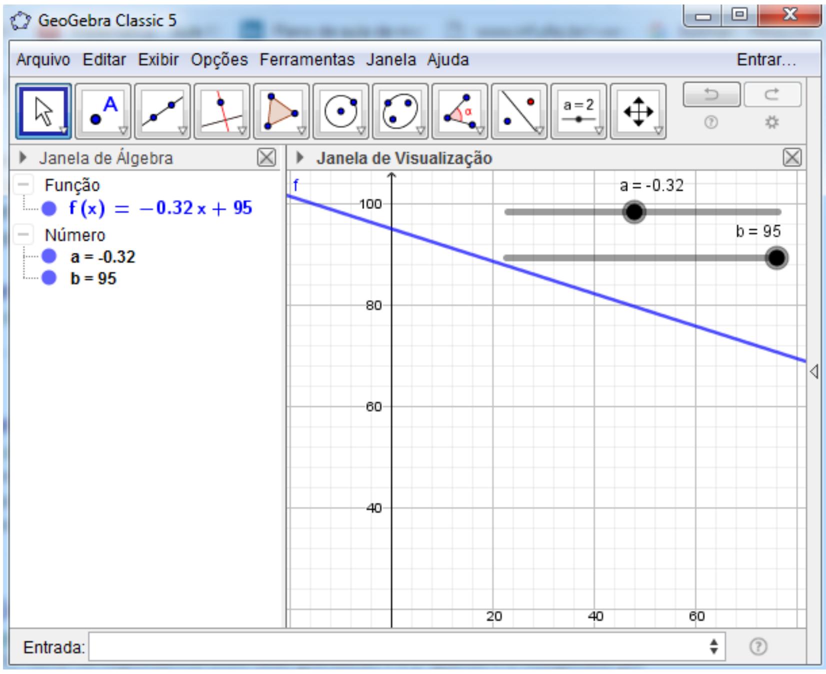
Estratégias de resolução:

O objetivo desta atividade é fazer a análise e reflexão de uma situação de caráter congruente que não é representada por uma função crescente. Após a compreensão do problema apresentado em língua materna, o aluno deve fazer a transformação para o registro numérico, pois acreditamos que desta forma o tratamento dado ao registro será melhor compreendido, podendo, ainda, facilitar a conversão para o registro algébrico.

Caso os alunos não tenham compreendido que o fato do atleta querer diminuir seu "peso" enquanto passam-se os dias se trata de um caso de função decrescente, deve ser proporcionado um momento para tal reflexão. É importante que percebam que, quanto menor for o "peso" pretendido pelo atleta, maior será a quantidade de dias necessários.

A construção gráfica no programa geogebra também é um momento valioso para a discussão do que representam os coeficientes angular e linear na função. Para o desenvolvimento desta discussão, devem ser construídos controles deslizantes numa função genérica $f(x) = ax + b$ e explorar estes comandos de forma a deixar o assunto claro.

Figura 3 - Registro gráfico da função *f(x) = -0,32x + 95* no Geogebra com utilização do controle deslizante.



Fonte: própria autora.

Atividade 4 – Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Situação-problema

Supondo que um certo capital seja aplicado a uma taxa de 1,5% ao mês no regime de juros simples e que apresente no primeiro mês um montante de R$ 203,00. Responda:

a) De acordo com estas informações, qual deve ter sido o valor aplicado?
b) Represente numa tabela o montante acumulado mês a mês, durante os seis primeiros meses.

Tempo decorrido (mês)	1	2	3	4	5	6
Montante (R$)	203					

c) Qual é a expressão matemática que relaciona o montante obtido em função do tempo de aplicação?
d) Utilizando o *software* geogebra, construa o gráfico desta situação.

Estratégias de resolução:

Esta questão se diferencia das questões anteriores pelo fato de não haver transparência entre as unidades significantes do registro de saída e o registro de chegada. Se compararmos estes registros, podemos observar que:

- ✓ Há uma mudança na ordem em que aparecem as informações entre o registro da língua natural e o registro algébrico;
- ✓ Os valores apresentados no registro de chegada não são os mesmos que aparecem no registro de saída;
- ✓ A situação não se mostra tão clara sobre quais procedimentos devem ser adotados.

Conforme apontam as pesquisas de Damm (2003), Mineiro (2016) e Duval (2009), temos aqui uma situação que envolve conversões não congruentes e que precisam fazer parte do cotidiano escolar do aluno.

Acreditamos que a análise e resolução de questões como esta, promove a aprendizagem matemática ao mesmo tempo em que possibilita uma evolução no raciocínio lógico de quem as interpreta.

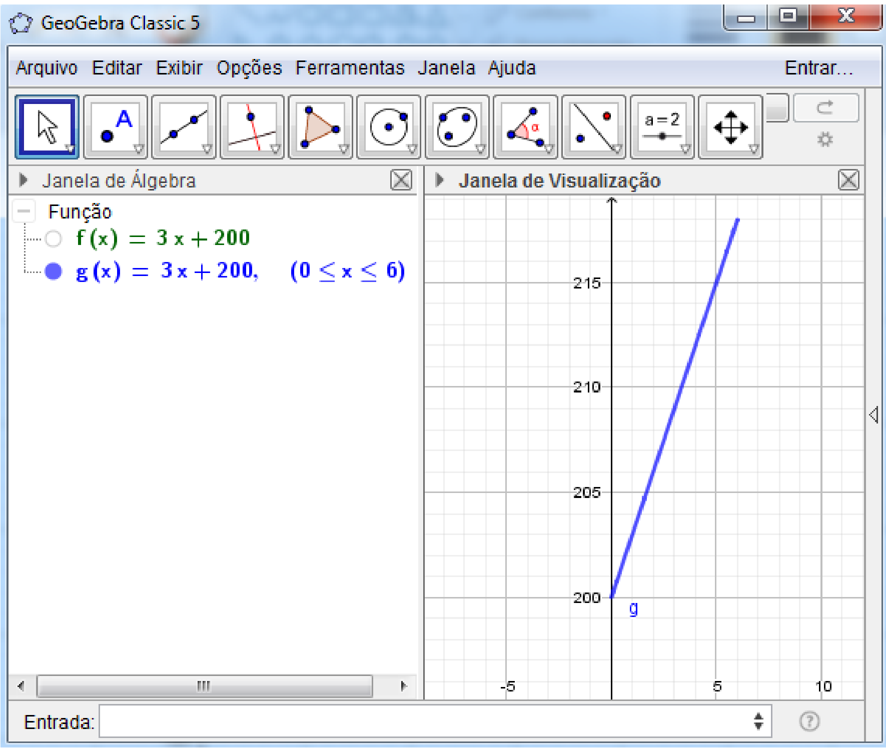
Ao conseguirem formular um registro algébrico que represente a situação descrita, o aluno poderá compreender as relações existentes entre os conceitos matemáticos envolvidos, apesar de que esperamos que tenham dificuldade para isso, pois estas diferentes formas de representar um mesmo objeto matemático podem esbarrar em obstáculos epistemológicos existentes na construção de seu conhecimento matemático.

A construção gráfica com o uso do geogebra deve ser um momento importante para a exploração de algumas características presentes no estudo de função afim. Desta forma, deve ser feito questionamentos do tipo:

- Qual valor representa o coeficiente angular desta função? E em que aspecto este valor interfere no gráfico formado?
- Qual valor representa o coeficiente linear da função? De que forma este valor auxilia na construção de um gráfico?
- Esta função é crescente ou decrescente? Por quê?
- Qual é o seu domínio?

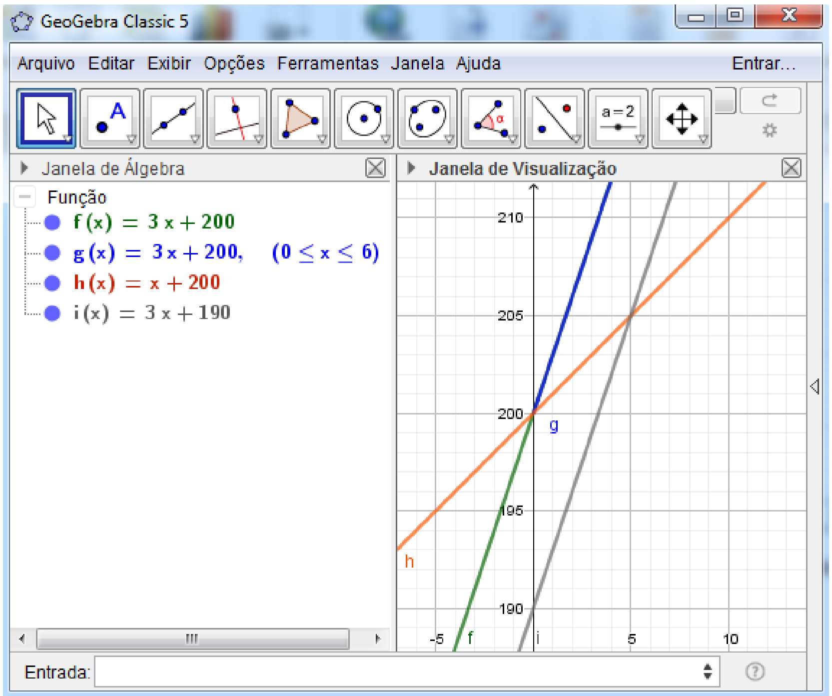
Com objetivo de melhorar a compreensão dessas características, sugerimos que seja construído um controle deslizante na tela do geogebra ou gráficos que representem outras funções, afim de proporcionar a comparação entre a interferência dos coeficientes angular e linear dessas funções. Também neste sentido, deve ser reforçada a ideia de domínio da função, deixando bem claro que, para representar graficamente a situação descrita, devemos considerar apenas o segmento de reta formado no intervalo $0 \leq x \leq 6$.

Figura 4 - Registro algébrico e gráfico da função *f(x) = 3x + 200* no Geogebra, no intervalo $0 \leq x \leq 6$.



Fonte: própria autora.

Figura 5 - Registro algébrico e gráfico de diferentes funções no geogebra.



Fonte: própria autora.

Atividade 5 – Interpretar funções afins em diferentes representações e relacioná-las dentro de um mesmo contexto.

Situação-problema

Gustavo não se sente bem quando viaja de ônibus, por isso pretende ir de Sena Madureira à Rio Branco usando um taxi. Sabendo que a distância entre as duas cidades é de 140 km e que o valor cobrado pelo taxista é de R$ 1,70 por quilômetro rodado (desconsiderando paradas e/ou congestionamentos), mais R$ 6,00 de taxa fixa (bandeirada), responda:

a) Quanto Gustavo irá gastar se pagar este valor sozinho?
b) E se ele dividir esta despesa com mais 3 amigos, quanto cada um deve desembolsar?
c) Como podemos representar a situação descrita nesta atividade usando uma fórmula matemática?
d) Utilizando o programa geogebra, expresse graficamente esta situação.

Estratégias de resolução:

Com esta atividade, esperamos poder verificar se os alunos compreendem e identificam os valores constantes e variáveis de uma função (respectivamente são: valor de R$ 6,00 correspondentes a bandeirada e de R$ 1,70 correspondente ao valor cobrado por km rodado).

Uma estratégia esperada para a resolução da letra “a” desta atividade é que seja feita a conversão do registro em língua natural para o registro numérico, tendo em vista, este ser mais apropriado para a execução de cálculos, conforme quadro abaixo:

Registro de saída (língua natural)	Registro de chegada (registro numérico)
Gustavo não se sente bem quando viaja de ônibus, por isso pretende ir de Sena Madureira à Rio Branco usando um taxi. Sabendo que a distância entre as duas cidades é de 140 km e que o valor cobrado pelo taxista é de R$ 1,70 por quilômetro rodado (desconsiderando paradas e/ou congestionamentos), mais R$ 6,00 de taxa fixa (bandeirada). Quanto Gustavo irá gastar se pagar este valor sozinho?	Valor = 6,00 + 140 x 1,70

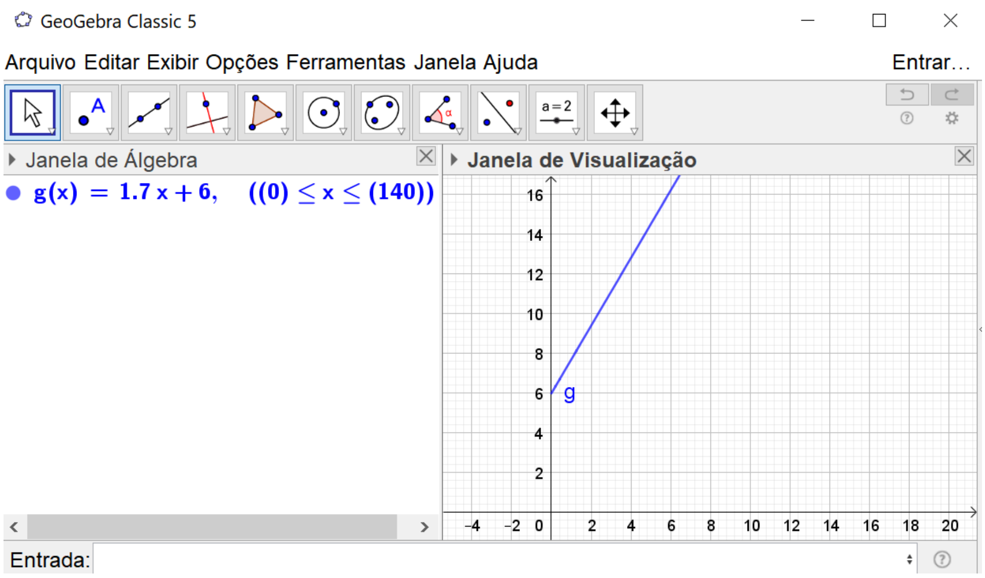
Quadro 1 – Conversão entre o registro em língua natural e o registro numérico.

Observamos ainda que, neste caso, nota-se uma transparência nas informações do problema, facilitando a conversão de um registro para outro e que os três critérios de congruência propostos por Duval (1993) são respeitados:

- ✓ Existe uma correspondência semântica entre os registros, ou seja, o significado dos símbolos se mantém iguais, mesmo havendo a troca de registro;
- ✓ Também é respeitada a univocidade semântica, isto é, cada termo do registro de saída tem seu único correspondente no registro de chegada e vice-versa;
- ✓ A ordem de apreensão nos diferentes registros é a mesma.

Na construção do gráfico também podem ser feitos questionamentos sobre o crescimento e decrescimento da função e qual deve ser o domínio para que o gráfico represente a situação descrita.

Figura 6 - Registro algébrico e gráfico da função *g(x)* = *1.7x* + *6* no GeoGebra.



Fonte: própria autora.

Atividade 6 – Construir modelos empregando a função polinomial de 1º grau, para resolver problemas em contextos diversos, com apoio de tecnologias digitais.

Situação-problema

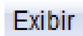
Para fazer uma corrida em seu taxi, Ronaldo cobra R$ 4,00 a bandeirada (taxa fixa), mais R$ 2,00 por quilômetro rodado. Podemos organizar estes valores em uma fórmula que permita calcular o preço de qualquer corrida que Ronaldo faça em seu taxi de acordo com o total de quilômetros que ele percorra. Com base nesta situação, responda às questões a seguir:

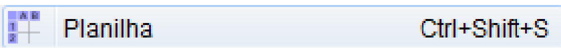
a) O que é a lei de formação de uma função?

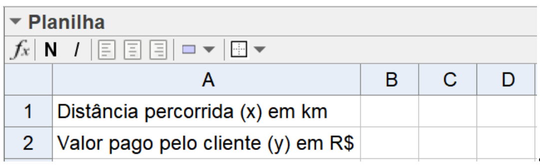
b) Sendo y o preço em reais da corrida e x o número de quilômetros rodados pelo taxi, determine a lei que de formação desta função.

c) Suponha que Ronaldo faça uma corrida com percurso igual 10 km. Quanto o cliente deve pagar por esta corrida?

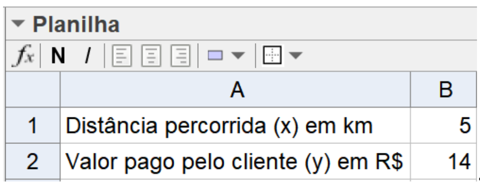
d) Construa uma tabela que relacione o número de quilômetros rodados com o preço que deve ser pago. Obs. Você mesmo deve escolher cinco distâncias diferentes para montar a tabela.

e) Faça esta mesma construção da tabela, mas, agora, utilizando o *software* Geogebra Classic 5. Para isso, clique no botão 

e escolha a opção 

. Para incluir os dados, você deve escrever as grandezas que são trabalhadas na situação: 

	A	B	C	D
1	Distância percorrida (x) em km			
2	Valor pago pelo cliente (y) em R$			

. Em seguida, deve incluir os valores escolhidos para a distância percorrida e, na outra linha, em cada coluna, deve dar o comando necessário para que apareça o valor correspondente, por exemplo: na linha 1 da coluna B, podemos digitar "**05**" e na linha 2 da mesma coluna, digitamos "**=B1*2+4**" e teclamos "enter" ou outra tecla que permita sair deste espaço. Com este comando irá aparecer o resultado "**14**" no campo B2, conforme imagem a seguir: 

	A	B
1	Distância percorrida (x) em km	5
2	Valor pago pelo cliente (y) em R$	14

. Depois de preencher toda a tabela, verifique se os resultados encontrados estão de acordo com o que você tinha previsto.

f) Utilizando o *software* GeoGebra, expresse graficamente esta situação e compare com a tabela que você construiu.
g) Caso não fosse cobrada a taxa fixa denominada de bandeirada, como seria a lei de formação desta nova função?
h) Utilize o *software* GeoGebra para representar o gráfico desta nova função e compare-os.

Estratégias de resolução:

No item **(a)** desta atividade, os alunos devem ser levados à compreensão de que a lei de formação de uma função nada mais é do que uma regra matemática que define exatamente como tal função deve ser representada, ou seja, é uma regra que expressa a relação existente entre os elementos de dois conjuntos. No caso da função afim, temos $y = ax + b$, com a e b sendo números reais e $a \neq 0$.

Já no item **(b)**, o objetivo é que os alunos consigam realizar a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico, para isso, eles precisam compreender e identificar os valores constantes e variáveis em uma função afim (que respectivamente, neste caso, são: valor de R$ 4,00 correspondente à bandeirada e de R$ 2,00 correspondente ao valor cobrado por km rodado), e que, substituídos na expressão algébrica $y = ax + b$, temos $y = 2x + 4$.

Feita a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico, no item **(c)**, a ideia é que o aluno utilize esta lei de correspondência que ele encontrou para responder a questão. Assim, em $y = 2x + 4$, como temos y sendo o preço em reais da corrida e x representando o número de quilômetros rodados pelo taxi, se o motorista percorrer uma distância de 10 km, teremos: $y = 2 \cdot (10) + 4$, portanto, $y = 24$, o que quer dizer que o cliente deve pagar R$ 24,00 pela corrida.

Observamos que nesta situação existe uma transparência nas informações do problema, facilitando a conversão de um registro para outro e que os três critérios de congruência propostos por Duval (1993) são respeitados:

- ✓ Existe uma correspondência semântica entre os registros, ou seja, o significado dos símbolos se mantém iguais, mesmo havendo a troca de registro;
- ✓ Também é respeitada a univocidade semântica, isto é, cada termo do registro de saída tem seu único correspondente no registro de chegada e vice-versa;
- ✓ A ordem de apreensão nos diferentes registros é a mesma.

Na construção da tabela, o aluno deve se sentir livre para a escolha dos valores que serão substituídos nas distâncias percorridas. O professor deve verificar se o tratamento efetuado em todas as substituições estão de acordo. A seguir, apresentamos uma das possibilidades de respostas:

Distância percorrida (x) em km	05	10	15	20	25
Valor pago pelo cliente (y) em R$	14	24	34	44	54

Também podemos representar esta tabela utilizando o *software* GeoGebra:

Figura 7 - Planilha construída a partir da função *f(x) = 2x + 4*

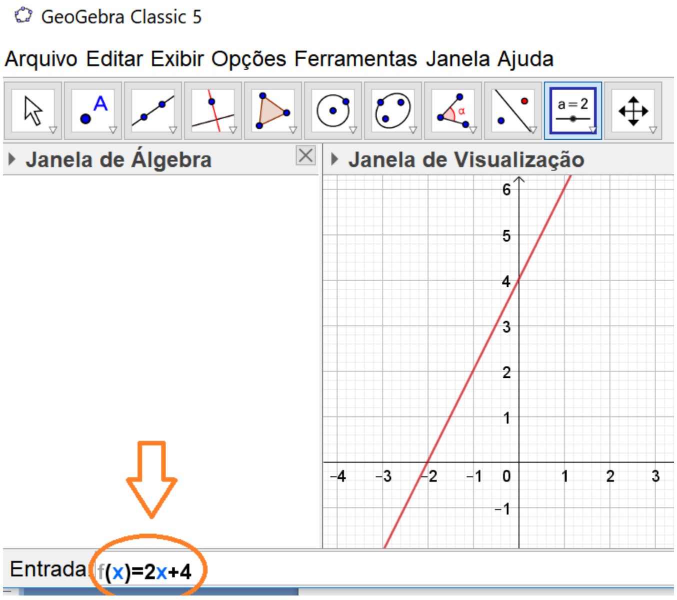
Planilha

	A	B	C	D	E	F
1	Distância percorrida (x) em km	5	10	15	20	25
2	Valor pago pelo cliente (y) em R$	14	24	34	44	54

Fonte: Própria autora

Para a construção gráfica, será necessário inserir no campo entrada a lei de formação da função, no caso, "**f(x) = 2x + 4**" e teclar "enter", conforme imagem, a seguir:

Figura 8 - Construção do gráfico da função *f(x) = 2x + 4* no GeoGebra

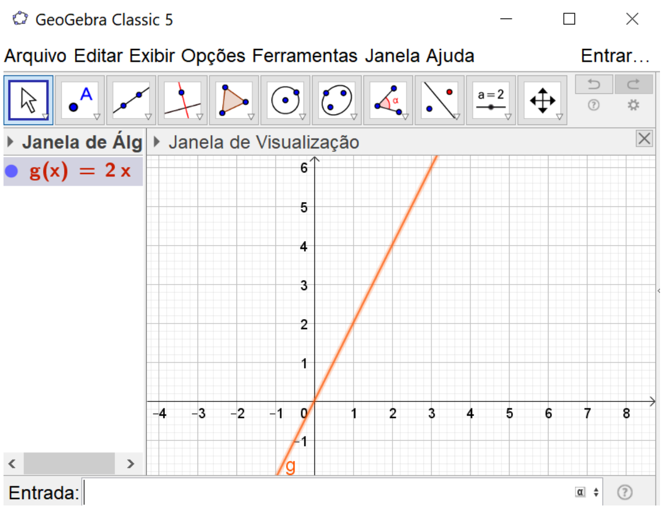


Fonte: Própria autora

Neste momento da atividade, podem ser feitos alguns questionamentos sobre o crescimento e decrescimento da função e qual deve ser o domínio para que o gráfico mostrado na tela do computador represente a situação descrita. Também é importante reforçar a ideia de que este problema não admite valores negativos para *x* já que este valor se refere ao preço cobrado por cada km percorrido pelo taxista.

Ao serem questionados sobre a organização de uma lei que relacione a distância percorrida com o preço a pagar para corridas sem a taxa fixa (bandeirada), os alunos devem observar que o valor que deve ser retirado da expressão algébrica é o 4, ou seja, a correta conversão, neste caso, seria $y = 2x$ e o gráfico a ser construído no GeoGebra deve ser o da figura a seguir:

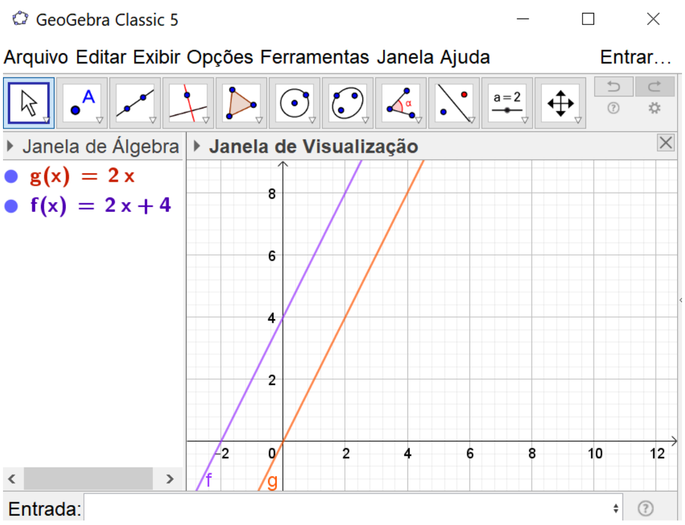
Figura 9 - Construção do gráfico da função $g(x) = 2x$ no GeoGebra



Fonte: Própria autora

Quanto à comparação entre as duas funções, graficamente, temos:

Figura 10 - Construção dos gráficos das funções $f(x)=2x+4$ e $g(x)=2x$ no GeoGebra



Fonte: Própria autora

Podemos observar que os gráficos formam duas retas paralelas, que a função f(x) corta o eixo y no ponto (0, 4) e a função g(x) corta o eixo y no ponto (0, 0). É interessante comentar que este ponto de corte é indicado pelo *coeficiente linear* da função que, no caso, é o valor de b na expressão algébrica $y = ax + b$.

Já o paralelismo existente entre as retas é consequência do *coeficiente angular* da função (o valor de a em $y = ax + b$), que nas duas situações é igual a 2, fazendo com que ambas as retas formem o mesmo ângulo com o eixo Ox.

Caso o professor queira proporcionar outros questionamentos a seus alunos, deve incluí-los no seu planejamento a fim de evitar improvisos.

Atividade 7 – Interpretar funções afins em diferentes representações e relacioná-las dentro de um mesmo contexto.

Situação-problema

Um grupo de amigos resolveu comemorar o aniversário de Marina fazendo uma excursão para o litoral brasileiro. Como meio de transporte para este passeio, resolveram alugar uma van em uma locadora de veículos. Ao pesquisarem na cidade, encontraram duas empresas de aluguéis de veículos, onde conseguiram as seguintes informações:

- Na Locadora **A**, ficaram sabendo que a empresa cobrava apenas o valor de R$ 2,00 por cada quilômetro percorrido, o que permitia a escrita de $f(x) = 2x$, para expressar o valor pago pelo aluguel em função do total de quilômetros rodados.
- E, na locadora **B**, descobriram a existência de uma taxa fixa de R$ 250,00, além do valor cobrado por cada quilômetro rodado. Nesta situação, eles apenas observaram alguns valores anotados em uma tabela que se referiam aos aluguéis pagos pelos últimos três clientes da loja, conforme vemos, a seguir:

Quantidade de quilômetros percorridos	180	284	528
Preço a pagar (R$)	520	676	1042

Sabendo que a distância que o grupo pretende percorrer é de aproximadamente 550 quilômetros, já contando o trajeto de ida e volta, responda:

a) Um dos amigos de Marina afirmou: “É sempre mais vantajoso alugar o veículo da Locadora **A**, pois eles não cobram a taxa fixa de R$ 250,00”. Você concorda com esta afirmação? Justifique sua resposta.
b) Qual locadora apresenta preços melhores para essa viagem? Justifique sua resposta.
c) Sabendo que o valor pago pelo aluguel depende da quilometragem percorrida pelo veículo, como podemos expressar algebricamente a situação apresentada pela segunda locadora?
d) Utilizando o *software* GeoGebra, construa os gráficos correspondentes a cada uma dessas funções.
e) Analisando os dois gráficos, verifique se sua resposta para o item (b) está correta.

Estratégias de resolução:

É necessário que o aluno compreenda o quanto antes que deve estabelecer uma estratégia que possibilite a comparação entre as duas funções.

A apresentação dos dados que permitem obter o valor do aluguel de cada empresa foi, propositadamente, realizada em linguagens diferentes (algébrica e tabular), para provocar a conversão entre essas representações com objetivo de comparar estes dados.

No item **(a)**, os alunos podem ser levados a concordarem com a afirmação apresentada por não terem, ainda, feito uma real comparação entre as duas situações. Os mais atentos podem observar que um dos valores mostrados na tabela da Locadora **B** é inferior ao valor que a Locadora **A** cobraria pelo mesmo percurso, mesmo sem taxa fixa.

Caso os alunos tenham dificuldade para responderem o item **(b)** e esta dificuldade esteja ligada à falta de compreensão do valor cobrado pela locadora **B**, o professor pode propôr uma reflexão sobre os preços cobrados por esta locadora, conforme apresentados na tabela. Um questionamento possível é: se esta locadora cobra R$ 250,00 de taxa fixa e um aluguel sai por R$ 520,00, tendo percorrido 180 km, qual é o valor cobrado por cada km percorrido? Uma possível estratégia a ser adotada é subtrair do valor pago o valor correspondente à taxa fixa, ou seja, fazer R$ 520,00 - R$ 250,00, o resultado obtido será o valor gasto apenas com a quilometragem que, dividido por 180 (total de km percorridos), fornece o valor cobrado por cada km rodado.

Já para a formação de uma representação algébrica desta situação, é interessante que seja explorada a relação existente entre a quantidade de quilômetros percorridos e o preço a pagar pelo aluguel. Ao entenderem que existe uma relação de dependência entre estas grandezas e que esta relação é um caso de função polinomial do 1º grau, também chamada por função afim, os alunos devem ser instigados a converterem os dados apresentados na tabela para a representação da forma $f(x) = ax + b$, onde x é a variável independente (quantidade de km percorridos), $f(x)$ é a variável dependente (valor pago pelo aluguel), a é o coeficiente de x (valor cobrado por cada km percorrido) e b é o termo constante (valor fixo).

Desta forma, pode ser utilizada uma das relações apresentadas na tabela para equacionar o problema, por exemplo, considerando a informação de que, por 180 km o cliente deve pagar R$ 520,00 e, sabendo que o valor fixo é de 250 (taxa cobrada pela locadora), podemos substituir estes valores em $f(x) = ax + b$.

Assim, temos:

$520 = a.180 + 250$

$a.180 = 520 - 250$

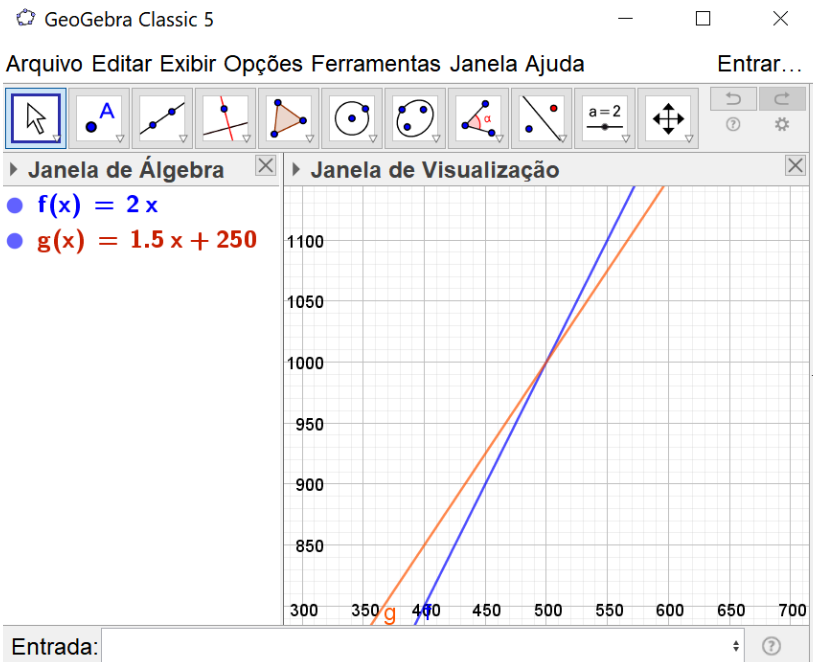
$a.180 = 270$

$a = \frac{270}{180}$

a = 1,5 ou seja, é cobrado R$ 1,50 por cada km percorrido com o veículo e a expressão algébrica da função é da forma *f(x) = 1,5x + 250*.

Na construção gráfica, estes devem ser construídos em uma mesma janela de visualização, a fim de facilitar a comparação entre o crescimento de cada função, conforme figura, a seguir:

Figura 11 - Construção dos gráficos das funções *f(x)=2x* e *g(x)=1,5x+250* no GeoGebra



Fonte: Própria autora

Espera-se que a visualização gráfica facilite a compreensão de como o coeficiente angular (coeficiente de *x*) interfere na inclinação da reta Neste caso, como na função *f(x)=2x* temos *a = 2* e em *g(x)=1,5x+250* temos *a = 1,5*, a inclinação de *f(x)* é menor que a de *g(x)*, isto é, quanto maior for o valor deste coeficiente, maior será o ângulo formado pela reta em relação ao eixo *Ox*.

Em uma análise contextualizada da situação, podemos afirmar que, para um percurso menor que 500 km é mais vantajoso o aluguel da Locadora **A** e, para um percurso maior que 500 km é mais vantajoso o aluguel da Locadora **B**, pois é neste valor que as funções se igualam, conforme vemos na imagem anterior.

Esta análise permite que os alunos reflitam sobre sua resposta para o item **(b)**. Eles precisam observar que nem sempre a Locadora **A** oferecerá melhores preços em relação a Locadora **B**, ou seja, a taxa fixa (coeficiente linear) tem maior interferência nos valores cobrados inicialmente, mas a elevação desses valores depende exclusivamente do valor cobrado por cada quilômetro percorrido (coeficiente angular).

Atividade 8 – Utilizar o *software* GeoGebra para promover a analise de como os coeficientes angular e linear interferem na construção gráfica de uma função afim.

Situação-problema

O professor de Gustavo, após tecer explicações sobre as características e propriedades da função afim, levou os alunos para o laboratório de informática da escola e solicitou que eles utilizassem o *software* GeoGebra para construir algumas representações gráficas dessas funções. Entre estas representações constavam as funções $f(x) = 2x - 5$ e $g(x) = -2x - 5$, no entanto, como Gustavo não havia prestado atenção nas explicações do professor, ele não entendeu o motivo dos gráficos ficarem ao contrário.

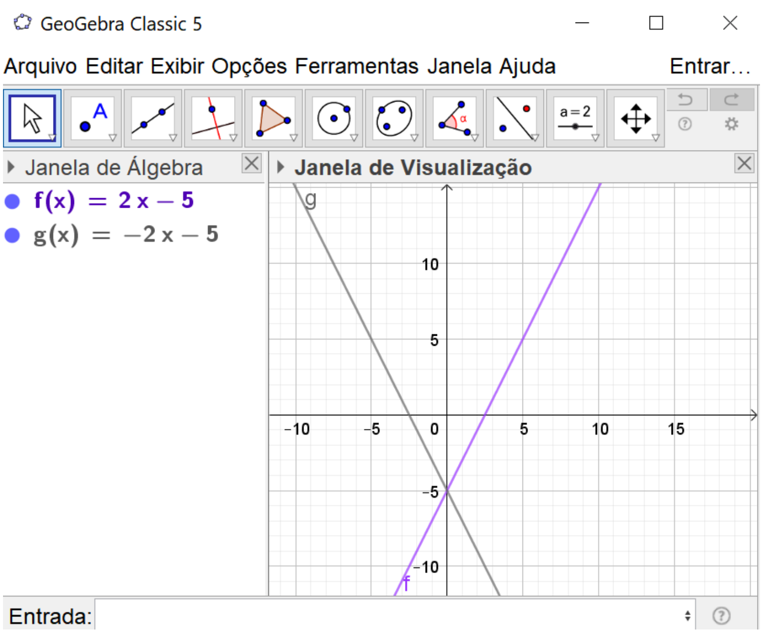
Diante disso, qual seria uma justificativa que poderia ser usada para explicar este fato a Gustavo? Utilize o *software* GeoGebra para construir esses gráficos e verifique o que mais podemos observar nessas construções.

Estratégias de resolução:

Esta atividade foi pensada para servir de apoio à atividade anterior. Neste caso, as conversões solicitadas mostram com muita clareza como o coeficiente angular interfere no ângulo que a reta faz com o eixo *Ox*.

As construções descritas no problema estão apresentadas na figura, a seguir:

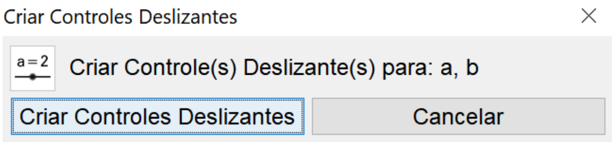
Figura 12 - Construção dos gráficos das funções $f(x)=2x - 5$ e $g(x)= -2x - 5$ no GeoGebra



Fonte: Própria autora

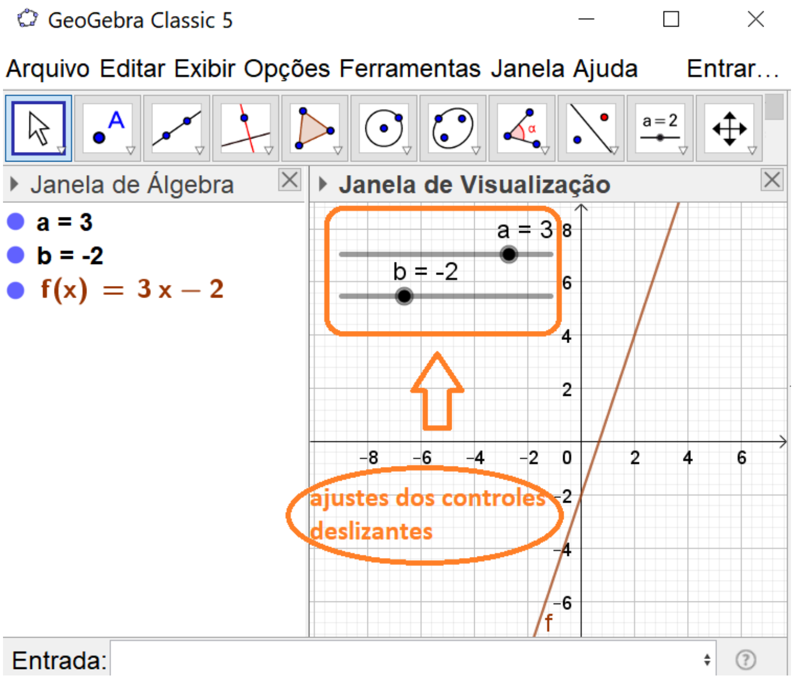
A construção de outros gráficos pode ser proposta pelo professor, como, também, a criação de controles deslizantes para os coeficientes de uma função genérica *f(x)* = *ax* + *b* e, a partir daí, explorar estes comandos de forma a deixar o assunto claro.

A criação de controles deslizantes pode ser feita com a inserção da expressão genérica *"f(x)* = *ax* + *b"* no campo entrada, a seguir, aparecerá a caixa de diálogo:



, clicando na opção "criar controles deslizantes", a ação será automática e a manipulação dos valores para *a* e *b* serão através de comandos mostrados na janela de visualização, conforme vemos na figura, a seguir:

Figura 13 - Construção de controles deslizantes no *software* GeoGebra.



Fonte: Própria autora

A aplicação desta atividade pode ser aproveitada também para questionar os alunos sobre:

- Como podemos reconhecer se uma função afim é crescente ou decrescente quando ela está representada na forma algébrica?
- E quanto à representação gráfica? O que nos permite tipificar uma função afim como crescente ou decrescente?
- O que você entende por variável?

- Na primeira função $f(x) = 2x - 5$, qual a variável dependente e qual a variável independente? Explique.
- Como denominamos a função $g(x) = 3x$?
- Apesar de possuir uma classificação específica, podemos dizer que ela é também uma função afim?
- Qual o valor do termo independente (valor fixo), neste caso?
- Quando isso ocorre, o gráfico intercepta os eixos em que ponto? Utilize o software GeoGebra para conferir sua resposta.
- Como denominamos a função $h(x) = 7$?
- Apesar de possuir uma classificação específica, podemos dizer que ela é também uma função afim?
- Qual o valor da variável independente neste caso? E termo independente?
- O gráfico desta função é uma reta? Utilize o *software* GeoGebra para conferir sua resposta.

Acreditamos que estas reflexões podem contribuir para a construção de uma aprendizagem mais significativa sobre o tema estudado.

Atividade 9 – Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional e recorrendo a *softwares* de álgebra e geometria dinâmica.

Situação-problema

André gosta muito de fotografias e, como está chegando seu aniversário, seus amigos resolveram fazer uma "vaquinha" para comprar uma máquina fotográfica para presenteá-lo. Após algumas pesquisas de preço, colocaram como opções de compra quatro tipos de máquinas fotográficas, a primeira opção custa R$ 1800,00, a segunda R$ 2592,00, a terceira R$ 4776,00 e a quarta opção sai por R$ 3096,00. Caso optem pela primeira opção, cada amigo deve colaborar com um valor de R$ 150,00, pois, cada um deles deve contribuir com o mesmo valor para a compra do presente. A partir dessas informações, responda aos questionamentos a seguir:

a) Relacione em uma tabela os valores que cada amigo deve dar de acordo com cada uma das opções de presente.
b) Quais as grandezas que estão variando neste problema?
c) Essas grandezas são proporcionais? Por quê?
d) Observe o preenchimento da tabela do item (a). que número se manteve constante?
e) O que este número representa no problema?
f) Como podemos representar esta situação utilizando uma expressão algébrica, onde *f(x)* representa o valor do presente e *x* representa a contribuição de cada amigo?
g) Utilize o *software* GeoGebra para construir o gráfico correspondente a esta função.
h) Apesar de possuir uma classificação específica, podemos dizer que ela ainda é uma função afim? Qual é esta classificação?
i) O que acontece com o termo independente neste caso?
j) Quando isso ocorre o gráfico intercepta os eixos em que ponto?
k) Isso irá ocorrer em todos os gráficos das funções em que a termo independente for nulo? Por quê?

Estratégias de resolução:

Um dos objetivos desta atividade é promover a reflexão sobre as características da função linear, tendo em vista esta ser um caso particular da função afim, que pode ser utilizada para representar inúmeras situações frequentes no cotidiano do aluno.

No item **(a)**, os alunos devem construir a seguinte tabela:

Valor do presente em (R$)	**Contribuição de cada amigo em (R$)**
1800	150
2592	216
4776	398
3096	258

Como o enunciado do problema traz a informação de que, pela compra da máquina fotográfica que custa R$ 1800,00 cada amigo deve contribuir com R$ 150,00, podem concluir que (1800 ÷ 150 = 12), ou seja, existe 12 amigos dividindo o valor deste presente.

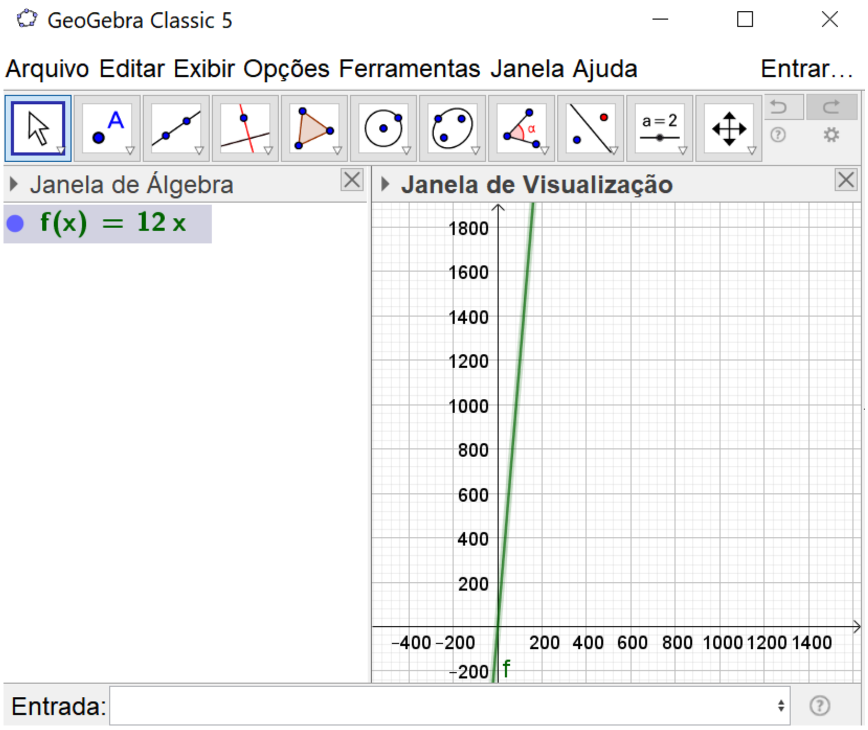
No item **(b)**, é importante que eles entendam que a quantidade de amigos não é variável no problema mas, sim, o valor do presente e a contribuição de cada amigo. Também deve ser destacada a relação de proporcionalidade existente na situação. Para responderem aos itens **(c), (d)** e **(e)**, os alunos devem observar que, quando duas grandezas x e y são diretamente proporcionais, a razão $\frac{y}{x}$ entre o valor de y e o valor correspondente de x é constante, neste caso, igual a 12 e representa o total de amigos que dividirá o valor do presente.

Se o valor dessa constante é a, então $\frac{y}{x} = a$, ou seja, $y = a.x$. Desta forma, dado o valor de x, para obtermos o valor correspondente de y, basta multiplicarmos x pela constante a. Então, dizemos que a expressão $y = a.x$ define y como uma função linear de x, e a situação descrita no problema pode ser representada pela expressão $y = 12x$, onde y representa o valor do presente e x representa a contribuição de cada amigo, (conversão solicitada no item **(f)**).

Esperamos, ainda, que a construção gráfica desta função no GeoGebra facilite a observação de como as variáveis do problema se relacionam.

A figura seguinte apresenta esta construção, conforme solicitado no item **(g)**.

Figura 14 - Construção do gráfico da função *f(x) = 12x* no *software* GeoGebra.



Fonte: Própria autora

Para a correta resolução dos itens **(h), (i), (j)** e **(k)**, os alunos devem compreender que o problema se trata de um caso de função afim, no entanto, por existir uma relação de proporcionalidade entre as grandezas envolvidas, também podem classificar a situação dada como sendo uma função linear. A observação de que o gráfico deste tipo de função sempre passa pela origem do plano cartesiano, ou seja, intercepta ambos os eixos no ponto (0, 0), também pode ser feita a partir de sua construção no GeoGebra e isso deve ser explorado como forma de esclarecer a interferência que o termo b exerce na função.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, J. M.; SARAIVA, M. J. **Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito função.** Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa, México, v. 15, n. 2, p. 137-169, 2012. Disponível em: <http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362012000200002> acesso em: 12 abril 2019.

CHAVES, M. I. de A.; CARVALHO, H.C. de. **Formalização do conceito de função no Ensino Médio:** uma sequência de ensino-aprendizagem. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004, Recife. Anais do VIII ENEM. Recife: 2004. p. 1-18. Disponível em: <http://www2.ufersa.edu.br/portal/view/uploads/setores/114/conceito_de_fun%C3%A7%C3%A3o.pdf > acesso em: 12 abril 2019.

MAGARINUS, R. **Uma proposta para o ensino de funções através da utilização de objetos de aprendizagem.** 2013, 99f. Dissertação (Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/10933/MAGARINUS%2C%20RENATA.pdf?sequence=1&isAllowed=y> acesso em: 08 abril 2019.

MESA, Vilma. **Functions in Middle School Mathematics Textbooks**: Implications for a Functional Approach to Álgebra. In: STUDY CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICAL INSTRUCTION (ICMI), 12, 2001, Melbourne. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Álgebra. Melbourne: Helen Chick et al. – University of Melbourne 2001, v. 1. p. 454-461.

ROCHA, S. M. C. da. **Investigação histórica na formação de professores de matemática:** um estudo centrado no conceito de função. 2008, 187 f. dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2008. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/16042> acesso em: 12 abril 2019.